УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА

А.А. Баязитова

Уравнение Хоффа описывает динамику выпучивания двутавровой балки. Впервые рассмотрена обратная коэффициентная задача, моделирующая эксперимент, в результате которого при дополнительных измерениях изучается не только динамика выпучивания, но и свойства материала балки. Показано существование единственного решения этой задачи.

Ключевые слова: *уравнение Хоффа, фазовое пространство, обратная задача*

Введение

Уравнение Хоффа

$$\lambda u_t + u_{txx} = \alpha u + \beta u^3 \tag{1}$$

моделирует выпучивание двутавровой балки при постоянной нагрузке. Уравнение (1) изучалось на разных множествах и в различных аспектах (см. [1 – 5] и библиографию там). Однако, несмотря на различие аспектов во всех цитированных работах, подход к исследованию уравнения (1) одинаков. Уравнение (1) редуцируется к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \tag{2}$$

где L и M – линейные, а N – ,вообще говоря, нелинейный операторы, действующие из пространства $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$. Пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ обычно банаховы и подбираются таким образом, чтобы купировать те или иные краевые [1 – 4] или какие-нибудь другие [5] условия. Причем, параметры α, $\beta \in \mathbb{R}$, характеризующие свойства материала балки, и $\lambda \in \mathbb{R}$, характеризующий нагрузку, предполагаются известными.

Между тем, физически осмысленной является задача нахождения не только решения уравнения (1), но и параметров α, β для того, чтобы узнать различия между имеющимся материалом балки и предполагаемым. Такие задачи относятся к обратным или некорректным задачам, теория и приложения которых в настоящее время достаточно полно разработаны (см. [6 – 8] и библиографию там). Однако исследование обратных задач для уравнений соболевского типа находится сейчас в начальной стадии [9], [10], причем по традиции первыми изучаются линейные задачи. Статья содержит первое исследование коэффициентной обратной задачи для полулинейного уравнения соболевского типа. Основное содержание статьи состоит из двух частей, в первой находится постановка прямой задачи и относящиеся к ней результаты, почерпнутые из [2]; а во второй – постановка и рассмотрение обратной задачи.

1. Прямая задача

В полосе $(0, l) \times \mathbb{R}$ ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

и начальному

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l) \tag{4}$$

условиям. Сначала необходимо задачу (1), (3) редуцировать к уравнению (2). Для этого, следуя [2], введем в рассмотрение пространства $\mathfrak{U} =\overset{\circ}{W}{}_2^1$ и $\mathfrak{F} = W_2^{-1}$ (здесь и далее все функциональные пространства определены на интервале $(0,l)$) и зададим операторы

$$< Lu, v >= \int_0^l (\lambda uv - u_x v_x) dx, \quad < Mu, v >= \alpha \int_0^l uv dx,$$

$$< N(u), v >= \beta \int_0^l u^3 v dx \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1,$$

где $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение в смысле L_2. Операторы L, $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. По построению оператор L фредгольмов (т.е. ind $L = 0$), а оператор M $(L, 0)$-ограничен. Кроме того, спектр $\sigma(L) = \{\lambda_k : \quad \lambda_k = \lambda - (\frac{\pi k}{l})^2, \quad k = 1, 2, ...\}$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке $-\infty$. Таким образом, редукция задачи (1), (3) – (4) к задаче

$$u(0) = u_0 \tag{5}$$

для уравнения (2) закончена. Вектор-функцию $u \in C^1((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2) при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$ назовем решением этого уравнения, а если решение вдобавок удовлетворяет условию (5), то будем называть его решением задачи (2), (5). Если ker $L = \{0\}$, то уравнение (2) тривиально редуцируется к эквивалентному ему уравнению

$$\dot{u} = F(u), \tag{6}$$

где оператор $F = L^{-1}(M + N) \in C^\infty(\mathfrak{U})$ по построению. Существование единственного локального решения $u \in C^\infty((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$ задачи (2), (5) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ – результат классической теоремы Коши. Другое дело, если ker $L \neq \{0\}$. В этом случае полезным оказывается следующее понятие.

Определение 1. *Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется фазовым пространством уравнения (2), если*

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in (-\tau, \tau)$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (2), (5).

Теорема 1. *([2]). Пусть*

(i) $\lambda \neq (\frac{\pi k}{l})^2$. Тогда фазовым пространством уравнения (1) служит все пространство $\mathfrak{U}$.

(ii) $\lambda = (\frac{\pi k}{l})^2$, ненулевые коэффициенты α, β удовлетворяют соотношению $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$. Тогда фазовым пространством уравнения (1) служит простое многообразие $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : < \alpha u + \beta u^3, \chi_k >= 0\}$, где через $\{\chi_k\}$ обозначены ортонормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_k\}$ оператора L.

2. Обратная задача

Для уравнений (1) рассмотрим обратную задачу (3) — (4) с дополнительными условиями

$$(\lambda+\Delta)u_t(x_1,0)=\varphi,\quad x_1\in(0,l) \tag{7}$$

$$(\lambda+\Delta)u_t(x_2,0)=\psi,\quad x_2\in(0,l). \tag{8}$$

Здесь φ, ψ показывают изменение скорости в точках x_1 и x_2 балки в начальный промежуток времени. Подставляя правую часть уравнения (1) при $t=0$ в (7), (8), получаем системы уравнений относительно α, β

$$\begin{cases} \alpha u_0(x_1)+\beta u_0^3(x_1)=\varphi \\ \alpha u_0(x_2)+\beta u_0^3(x_2)=\psi. \end{cases} \tag{9}$$

Для систем уравнений (9) воспользуемся правилом Крамера

(i) Если $\Delta=u_0(x_1)u_0^3(x_2)-u_0(x_2)u_0^3(x_1)\neq 0$, то существует единственное решение α, β каждой из систем уравнений (9), причем

$$\alpha=\frac{\varphi u_0^3(x_2)-\psi u_0^3(x_1)}{\Delta},\quad \beta=\frac{\psi u_0(x_1)-\varphi u_0(x_2)}{\Delta}; \tag{10}$$

(ii) Если $\Delta=0$, $\varphi=\psi=0$, то существует бесконечно много пар решений α, β; если же φ или $\psi\neq 0$, то решения не существует.

Нас интересует случай, когда α, $\beta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, поэтому дополнительно предполагаем $\varphi u_0^3(x_2)\neq\psi u_0^3(x_1)$ и $\varphi u_0(x_2)\neq\psi u_0(x_1)$.

Лемма 1. *Пусть $\lambda\neq(\frac{\pi k}{l})^2$. Тогда при любых $u_0\in\mathfrak{U}$, φ, $\psi\in\mathbb{R}$ таких, что $u_0(x_1)\neq 0$, $u_0(x_2)\neq 0$, $u_0(x_1)\neq\pm u_0(x_2)$, $\varphi u_0^3(x_2)\neq\psi u_0^3(x_1)$ и $\varphi u_0(x_2)\neq\psi u_0(x_1)$ существует единственное решение обратной задачи (1), (3) - (4), (7) - (8).*

Доказательство. В силу условий $u_0(x_1)\neq 0$, $u_0(x_2)\neq 0$ и $u_0(x_1)\neq\pm u_0(x_2)$ определитель системы $\Delta=u_0(x_1)u_0(x_2)(u_0(x_2)-u_0(x_1))(u_0(x_2)+u_0(x_1))$ не равен нулю, а при $\varphi u_0^3(x_2)\neq\psi u_0^3(x_1)$ и $\varphi u_0(x_2)\neq\psi u_0(x_1)$ коэффициенты α, $\beta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, поэтому в силу теоремы 1 решение обратной задачи существует и единственно для любых $u_0\in\mathfrak{U}$. □

Рассмотрим теперь случай нетривиального ядра $\ker L$. Для выполнения условий теоремы 1 необходимо, чтобы решения систем (9) были все одного знака. Из (10) следует, что для того, чтобы α, $\beta>0$, должно быть выполнено

$$\begin{cases} \varphi u_0^3(x_2)-\psi u_0^3(x_1)>0 \\ \psi u_0(x_1)-\varphi u_0(x_2)>0 \\ u_0(x_1)u_0^3(x_2)-u_0(x_2)u_0^3(x_1)>0 \end{cases} \tag{11}$$

или

$$\begin{cases} \varphi u_0^3(x_2)-\psi u_0^3(x_1)<0 \\ \psi u_0(x_1)-\varphi u_0(x_2)<0 \\ u_0(x_1)u_0^3(x_2)-u_0(x_2)u_0^3(x_1)<0, \end{cases} \tag{12}$$

а для того, чтобы α, $\beta<0$

$$\begin{cases} \varphi u_0^3(x_2)-\psi u_0^3(x_1)>0 \\ \psi u_0(x_1)-\varphi u_0(x_2)>0 \\ u_0(x_1)u_0^3(x_2)-u_0(x_2)u_0^3(x_1)<0 \end{cases} \tag{13}$$

или

$$\begin{cases} \varphi u_0^3(x_2) - \psi u_0^3(x_1) < 0 \\ \psi u_0(x_1) - \varphi u_0(x_2) < 0 \\ u_0(x_1)u_0^3(x_2) - u_0(x_2)u_0^3(x_1) > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Обозначим через $\mathfrak{D}^+$ область допустимых значений φ, ψ, при которых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (т.е. всегда верна одна из систем неравенств (11) или (12)), а через $\mathfrak{D}^-$ область допустимых значений φ, ψ, при которых $\alpha < 0$, $\beta < 0$ (т.е. всегда верна одна из систем неравенств (13) или (14)). Введем множества

$$\mathfrak{A}^1 = \left[\begin{array}{l} 0 < u_0(x_1) < u_0(x_2) \\ 0 < -u_0(x_2) < u_0(x_1) \\ u_0(x_1) < u_0(x_2) < 0 \\ 0 < -u_0(x_1) < u_0(x_2) \end{array} \right.$$

и

$$\mathfrak{A}^2 = \left[\begin{array}{l} 0 < u_0(x_2) < -u_0(x_1) \\ u_0(x_2) < u_0(x_1) < 0 \\ 0 < u_0(x_2) < u_0(x_1) \\ 0 < u_0(x_1) < -u_0(x_2). \end{array} \right.$$

Оказывается, что

$$\mathfrak{D}^+ = \begin{cases} \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi < \psi < (\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)})^3\varphi, \text{если } u_0(x_1), u_0(x_2) \in \mathfrak{A}^1 \\ \\ (\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)})^3\varphi < \psi < \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi, \text{если } u_0(x_1), u_0(x_2) \in \mathfrak{A}^2, \end{cases} \tag{15}$$

а

$$\mathfrak{D}^- = \begin{cases} (\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)})^3\varphi < \psi < \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi, \text{если } u_0(x_1), u_0(x_2) \in \mathfrak{A}^1 \\ \\ \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi < \psi < (\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)})^3\varphi, \text{если } u_0(x_1), u_0(x_2) \in \mathfrak{A}^2. \end{cases} \tag{16}$$

Для примера найдем области допустимых значений φ и ψ, при которых решения α, $\beta > 0$ в случае $\Delta > 0$, то есть разрешим систему (11). В зависимости от знаков $u_0(x_1)$ и $u_0(x_2)$ возможны четыре случая:

(i) Пусть $u_0(x_1) > 0$, $u_0(x_2) > 0$. Тогда $u_0(x_1)+u_0(x_2) > 0$ и, для того, чтобы выполнялось $\Delta > 0$ необходимо $u_0(x_2) - u_0(x_1) > 0$, то есть получился случай $0 < u_0(x_1) < u_0(x_2)$. В этом случае система (11) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi < \psi < \frac{u_0^3(x_2)}{u_0^3(x_1)}\varphi.$$

(ii) Пусть $u_0(x_1) > 0$, $u_0(x_2) < 0$. Тогда $u_0(x_2)-u_0(x_1) < 0$ и, для того, чтобы выполнялось $\Delta > 0$ необходимо $u_0(x_2)+u_0(x_1) > 0$, то есть получился случай $0 < -u_0(x_2) < u_0(x_1)$. В этом случае система (11) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi < \psi < \frac{u_0^3(x_2)}{u_0^3(x_1)}\varphi.$$

(iii) Пусть $u_0(x_1) < 0$, $u_0(x_2) > 0$. Тогда $u_0(x_2)-u_0(x_1) > 0$ и, для того, чтобы выполнялось $\Delta > 0$, необходимо $u_0(x_2)+u_0(x_1) < 0$, то есть получился случай $0 < u_0(x_2) < -u_0(x_1)$. В этом случае система (11) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_0^3(x_2)}{u_0^3(x_1)}\varphi < \psi < \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi.$$

(iv) Пусть $u(x_1) < 0$, $u(x_2) < 0$. Тогда $u(x_1) + u(x_2) < 0$ и для того, чтобы выполнялось $\Delta > 0$, необходимо $u(x_2) - u(x_1) < 0$, то есть получился случай $0 < -u(x_1) < -u(x_2)$. В этом случае система (11) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_0^3(x_2)}{u_0^3(x_1)}\varphi < \psi < \frac{u_0(x_2)}{u_0(x_1)}\varphi.$$

Аналогично разрешаются системы (12) — (14).

Пусть $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^+ \cup \mathfrak{D}^-$. Из всего вышесказанного следует

Теорема 2.

(i) Пусть $\lambda \neq (\frac{\pi k}{l})^2$. Тогда при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$, φ, $\psi \in \mathbb{R}$ таких, что $u_0(0) \neq 0$, $u_0(l) \neq 0$, $u_0(0) \neq \pm u_0(l)$, $\varphi u_0^3(l) \neq \psi u_0^3(0)$ и $\varphi u_0(l) \neq \psi u_0(0)$ существует единственное решение обратной задачи (1), (3) - (4), (6) - (7).

(ii) Пусть $\lambda = (\frac{\pi k}{l})^2$. Тогда при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$, φ, $\psi \in \mathfrak{D}$ таких, что $u_0(0) \neq 0$, $u_0(l) \neq 0$, $u_0(0) \neq \pm u_0(l)$ и $< (\varphi u_0^3(l) - \psi u_0^3(0))u_0 + (\psi u_0(0) - \varphi u_0(l))u_0^3, \chi_k >= 0$ существует единственное решение $u \in \mathfrak{U}$, α, $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ обратной задачи (1),(3) - (4), (7) - (8).

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. «Математика». – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192 – 207.
2. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292 – 297.
3. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54 – 60.
4. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т.42, № 1. – С.126 – 131.
5. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Наука, 1995.
6. Романов, В.Г. Устойчивость в обратных задачах / В.Г. Романов. – М.: Науч. мир, 2005.
7. Fedorov, V.E. An inverse problem for linear Sobolev type equations / V.E. Fedorov, A.V. Urazaeva // J. Inv. Ill – Posed Problems. – 2004. – V. 12, № 5. – P. 1 – 9.
8. Свиридюк, Г.А. Обратная задача для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения, посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа». – Новосибирск, 2007. – С. 244 – 250.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
alfiya@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 10 марта 2008 г.