УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ

В.Е. Федоров

В теории вырожденных полугрупп операторов существенную роль играют понятия (L,p)-радиального и сильно (L,p)-радиального операторов. В данной работе показано, что в определенных ситуациях каждое из них подразумевает обобщение на случай вырожденных сильно непрерывных полугрупп условий Хилле – Иосиды на инфинитезимальный генератор (C_0)-непрерывной полугруппы операторов. Кроме того, получены достаточные условия эквивалентности этих понятий. Аналогичные результаты получены и для (L,p)-секториальных и сильно (L,p)-секториальных операторов в случае вырожденных сильно голоморфных полугрупп.

Ключевые слова: *вырожденная полугруппа операторов, инфинитезимальный генератор, теорема Хилле – Иосиды*

Введение

Многие начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени, удобно исследовать в рамках начальных задач для уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \tag{1}$$

где линейные операторы L, M действуют из одного секвенциально полного локально выпуклого пространства $\mathcal{U}$ в другое – $\mathcal{F}$, при этом $\ker L \neq \{0\}$. Подходящим математическим аппаратом для исследования таких задач в локально выпуклых пространствах является теория вырожденных полугрупп операторов [1 – 3]. Речь идет о полугруппах, которые имеют нетривиальный проектор в качестве единицы. Это проектор вдоль ядра полугруппы на так называемое фазовое пространство уравнения (1).

В классической теории полугрупп [4, 5] главным образом рассматривается случай, когда единицей полугруппы является тождественный оператор. В дальнейшем такие полугруппы операторов будем называть невырожденными. Ключевыми результатами классической теории являются теоремы о порождении полугрупп операторов.

Для краткости назовем оператор $A \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (линейный, замкнутый и плотно определенный в $\mathcal{U}$, действующий в $\mathcal{F}$) *радиальным*, если при некотором $a \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение $(a,+\infty) \subset \rho(A)$ и при этом равностепенно непрерывно семейство операторов

$$\{((\mu - a)R_\mu(A))^n : \mu \in (a,+\infty), n \in \mathbb{N}\}.$$

Одной из теорем о порождении является теорема Хилле – Иосиды, которая утверждает, что оператор является инфинитезимальным генератором невырожденной сильно непрерывной полугруппы точно тогда, когда он радиален.

Оператор $A \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ называется *секториальным*, если при некоторых $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2,\pi)$ сектор $S_{a,\theta} = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta\} \subset \rho(A)$ и равностепенно непрерывно семейство операторов

$$\{(\mu - a)R_\mu(A) : \mu \in S_{a,\theta}\}.$$

Теорема Соломяка – Иосиды утверждает, что оператор является инфинитезимальным генератором невырожденной сильно голоморфной полугруппы точно тогда, когда он секториален.

При получении теорем о порождении вырожденных полугрупп операторов роль радиального (секториального) оператора играет сильно (L,p)-радиальный (сильно (L,p)-секториальный) оператор [2, 3, 6 – 8]. Непосредственное обобщение радиальности или секториальности, то есть равностепенная непрерывность семейств

$$\left\{\left(\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)(\mu_k L - M)^{-1}L\right)^n : \mu_k \in (a,+\infty),\ k=\overline{0,p},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\left\{\left(\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)L(\mu_k L - M)^{-1}\right)^n : \mu_k \in (a,+\infty),\ k=\overline{0,p},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

или семейств

$$\left\{\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)(\mu_k L - M)^{-1}L : \mu_k \in S_{a,\theta}\right\},$$

$$\left\{\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)L(\mu_k L - M)^{-1} : \mu_k \in S_{a,\theta}\right\}$$

означает (L,p)-радиальность или (L,p)-секториальность оператора M. При этом речь идет о двух полугруппах уравнения (1) – на пространстве $\mathcal{U}$ и на пространстве $\mathcal{F}$. Сильная (L,p)-радиальность (сильная (L,p)-секториальность) подразумевает, помимо (L,p)-радиальности ((L,p)-секториальности), выполнение еще двух дополнительных условий того же типа, достаточных для существования единицы полугруппы на всем пространстве и для существования оператора $L_1^{-1}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$ (линейного непрерывного из $\mathcal{F}^1$ в $\mathcal{U}^1$) – непрерывного обратного к сужению оператора L на фазовое пространство уравнения (1). Однако во многих задачах эти дополнительные условия проверить сложнее, чем непосредственно показать существование единиц полугрупп и оператора $L_1^{-1}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$. Главная цель работы – установить эквивалентность понятий сильной (L,p)-радиальности (сильной (L,p)-секториальности) и (L,p)-радиальности ((L,p)-секториальности) при условии существования единиц полугрупп и оператора $L_1^{-1}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ – секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства, X – некоторое множество индексов. Обозначим через $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) множество всех полунорм, непрерывных в топологии пространства $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$). Будем говорить, что семейство операторов $\{\Phi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F}) : x \in X\}$ *равностепенно непрерывно* относительно значений параметра x, если для любой полунормы $r \in \mathfrak{F}$ существует полунорма $q \in \mathfrak{U}$ такая, что для всех $x \in X$, $u \in \mathcal{U}$ выполняется $r(\Phi(x)u) \le q(u)$.

Для операторов $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (линейный непрерывный из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{F}$), $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ введем обозначения

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\},\quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}(\mu_k L-M)^{-1}L,\quad L^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}L(\mu_k L-M)^{-1},$$

$$\mathcal{U}^0=\ker R^L_{(\mu,p)}(M),\quad \mathcal{F}^0=\ker L^L_{(\mu,p)}(M),$$

$$\mathcal{U}^1=\overline{\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)},\quad \mathcal{F}^1=\overline{\mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)}$$

(замыкание в топологии пространства $\mathcal{U}$ или $\mathcal{F}$ соответственно). Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^k$ $(\mathrm{dom}M_k=\mathcal{U}^k\cap\mathrm{dom}M)$, $k=0,1$. Нетрудно убедиться, что $\mathrm{im}L_0\subset\mathcal{F}^0$, $\mathrm{im}M_0\subset\mathcal{F}^0$.

Лемма 1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда*

(i) *если для отображений из $\mathcal{F}^0$ в $\mathcal{U}^0$ выполняется теорема о замкнутом графике, то существует оператор $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$;*

(ii) *операторы $H=M_0^{-1}L_0$, $J=L_0M_0^{-1}$ нильпотентны степени не больше p;*

(iii) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u=u\ \forall u\in\mathcal{U}^1$;

(iv) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}f=f\ \forall f\in\mathcal{F}^1$;

(v) $\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1\subset\mathcal{U}$, $\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1\subset\mathcal{F}$.

Уравнение (1) и эквивалентное ему уравнение

$$L(\alpha L-M)^{-1}\dot f=M(\alpha L-M)^{-1}f$$

на пространстве $\mathcal{F}$ рассмотрим как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot v=Bv,\tag{2}$$

где операторы $A\in\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$, $B\in\mathcal{C}l(\mathcal{V},\mathcal{W})$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ – секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства. *Решением* уравнения (2) назовем вектор-функцию $v\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{V})$, удовлетворяющую (2) при $t\geq 0$. Здесь использовано обозначение $\overline{\mathbb{R}}_+=\{0\}\cup\mathbb{R}_+$.

Определение 1. Отображение $V(\cdot):\overline{\mathbb{R}}_+\to\mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *разрешающей полугруппой* уравнения (2), если

(i) $V(s)V(t)v=V(s+t)v$ для любых $s,t\geq 0$ и любого v из $\mathcal{V}$;

(ii) $v(t)=V(t)v$ есть решение уравнения (2) для любого v из плотного в $\mathcal{V}$ линеала;

(iii) для любого решения $v\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{V})$ и для всех $t\geq 0$ выполняется $v(t)\in\mathrm{im}V(0)$.

Замечание 1. Последний пункт в определении вырожденной разрешающей полугруппы имеет смысл требования максимальности ее образа. Без этого требования всегда можно говорить, например, о разрешающей полугруппе нулевых операторов.

Полугруппу операторов будем называть *экспоненциально ограниченной* с константой $\omega\in\mathbb{R}$, если семейство операторов $\{e^{-\omega t}V(t):t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ равностепенно непрерывно.

Определение 2. Оператор M *(L,p)-радиален*, если

(i) $\exists a\in\mathbb{R}$ $(a,+\infty)\subset\rho^L(M)$;

(ii) равностепенно непрерывны семейства операторов

$$\left\{\left(R^L_{(\mu,p)}(M)\prod_{k=0}^{p}(\mu_k-a)\right)^n:\mu=(\mu_0,\dots,\mu_p)\in(a,+\infty)^{p+1},n\in\mathbb{N}\right\},$$

$$\left\{\left(L^L_{(\mu,p)}(M)\prod_{k=0}^{p}(\mu_k-a)\right)^n : \mu=(\mu_0,\dots,\mu_p)\in(a,+\infty)^{p+1}, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Замечание 2. Определение 2 обобщает аналогичное определение, введенное в случае банаховых пространств в [9, 10].

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная с константой a сильно непрерывная разрешающая полугруппа $\{U(t) : t\geq 0\}$ $(\{F(t) : t\geq 0\})$ уравнения (1) ((2)), рассматриваемого на подпространстве $\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1)$.*

Доказательство. Выполнение первых двух пунктов определения 2 доказано в [8], остается лишь показать, что выполняется пункт (iii). Из уравнения (1) следует равенство $u = R^L_\alpha(M)(\alpha-\frac{d}{dt})u$. Для решения уравнения (1) класса $C^{p+1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{U})$ тогда можно получить равенство

$$u=(R^L_\alpha(M))^{p+1}\left(\alpha-\frac{d}{dt}\right)^{p+1}u,$$

откуда следует, что $u(t)\in \mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$. Осталось сослаться на плотность $C^{p+1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{U})$ в $C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{U})$. Более подробно подобные рассуждения проведены, например, в [8]. □

2. (L,p)-радиальность и прямые суммы

Представление $\mathcal{U}=\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}=\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1)$ равносильно существованию проектора P (Q) вдоль $\mathcal{U}^0$ $(\mathcal{F}^0)$ на $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$.

Предложение 1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $\mathcal{U}=\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}=\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1$. Тогда*
(i) $P=s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}$;
(ii) $Q=s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}$;
(iii) $LPu=QLu\ \forall u\in\mathcal{U}$;
(iv) $\forall u\in \mathrm{dom}M\ Pu\in\mathrm{dom}M$ *и* $MPu=QMu$.

Доказательство. Для $u\in\mathcal{U}$ имеем в силу леммы 1

$$\lim_{\mu\to\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u=\lim_{\mu\to\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}(Pu+(I-P)u)=$$

$$\lim_{\mu\to\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}Pu=Pu.$$

Тем самым доказано утверждение (i), утверждение (ii) доказывается аналогично.

Соотношение

$$M(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u=(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}Mu\quad\forall u\in\mathrm{dom}M\tag{3}$$

очевидно. Тогда, используя лемму 1, получим

$$\lim_{\mu\to+\infty}M(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u=\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}(QMu+(I-Q)Mu)=$$

$$\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}QMu=QMu\quad\forall u\in\mathrm{dom}M.$$

Устремим в (3) $\mu\to+\infty$ и, в силу замкнутости оператора M, получим утверждение (iv). Утверждение (iii) доказывается аналогично с использованием непрерывности оператора L. □

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^1$ ($\mathrm{dom}M_1 = \mathcal{U}^1 \cap \mathrm{dom}M$).

Предложение 2. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Тогда*
(i) $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$;
(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$;
(iii) $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$.

Доказательство. По определению проектора $u \in \mathcal{U}^1$ ($f \in \mathcal{F}^1$) тогда и только тогда, когда $u = Pu$ ($f = Qf$). Возьмем $u \in \mathcal{U}^1$ ($u \in \mathrm{dom}M_1$). Согласно предложению 1 $Lu = LPu = QLu$ ($Mu = MPu = QMu$), поэтому $\mathrm{im}L_1 \subset \mathcal{F}^1$ ($\mathrm{im}M_1 \subset \mathcal{F}^1$).

Осталось показать, что $\overline{\mathrm{dom}M_0} = \mathcal{U}^0$, $\overline{\mathrm{dom}M_1} = \mathcal{U}^1$. В силу предложения 1 для любого $u_\alpha \in \mathrm{dom}M$ имеем $Pu_\alpha \in \mathrm{dom}M_1$. Так как линеал $\mathrm{dom}M$ плотен в пространстве $\mathcal{U}$, для любого $u \in \mathcal{U}$, в частности для $u = Pu \in \mathcal{U}^1$, существует обобщенная последовательность $\{u_\alpha\} \subset \mathrm{dom}M$, сходящаяся к u. Поэтому $Pu_\alpha \to Pu = u$.

Плотность $\mathrm{dom}M_0$ показывается аналогично с использованием проектора $(I - P)$. □

Предложение 3. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

Доказательство. Инъективность оператора L_1 следует из того, что $\ker L \subset \mathcal{U}^0$. Далее,

$$(L_\mu^L(M))^{p+1} = (J(\mu J - I)^{-1})^{p+1}(I - P) + (L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}P = (L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}P,$$

так как J нильпотентен степени не больше p в силу леммы 1. Поэтому $\mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M) = \mathrm{im}L^{L_1}_{(\mu,p)}(M_1)$ и $\mathcal{F}^1 \subset \overline{\mathrm{im}L_1}$. Но $\mathrm{im}L_1 \subset \mathcal{F}^1$, следовательно, $\mathrm{im}L_1$ плотен в $\mathcal{F}^1$, а значит, L_1^{-1} плотно определен. □

Введем следующие обозначения: $S_1 = L_1^{-1}M_1 : \mathrm{dom}S_1 \to \mathcal{U}^1$, $\mathrm{dom}S_1 = \mathrm{im}R_\mu^{L_1}(M_1)$; $T_1 = M_1L_1^{-1} : \mathrm{dom}T_1 \to \mathcal{F}^1$, $\mathrm{dom}T_1 = \mathrm{im}L_\mu^{L_1}(M_1)$.

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U_1(t) : t \geq 0\}$ ($\{F_1(t) : t \geq 0\}$) является оператор S_1 (T_1).*

Доказательство. этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 5.1 [8], при этом сначала доказывается замкнутость операторов S_1, T_1. □

3. Сильная (L,p)-радиальность

В этом параграфе будут приведены условия, при которых оператор L_1^{-1} непрерывен.

Определение 3. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным,* если он (L,p)-радиален, для всех f из некоторого плотного в $\mathcal{F}$ линеала $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ и для любой полунормы $r \in \mathfrak{F}$ существует константа c, зависящая от f, такая, что

$$r\left((\lambda - a)\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\right) \leq c(f)$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p \in (a, +\infty)$, при этом равностепенно непрерывно семейство операторов

$$\left\{(\lambda - a)\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)\,R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} : \lambda \in (a, +\infty), \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (a, +\infty)^{p+1}\right\}.$$

Замечание 3. Определение 3 является обобщением аналогичного определения в случае банаховых пространств [10].

Замечание 4. В работе [10] показано, что в случае банаховых пространств из сильной (L,p)-радиальности оператора M следуют равенства $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Для случая секвенциально полных локально выпуклых пространств этот факт доказывается аналогично.

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M)$, т. е. $f = (L^L_\beta(M))^{p+1}g$ при некоторых $\beta \in \rho^L(M)$, $g \in \mathcal{F}$. Тогда получим

$$\mu^{p+2}(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}f - \lambda^{p+2}(R^L_\lambda(M))^{p+1}(\lambda L - M)^{-1}f =$$
$$\sum_{k=0}^{p+1}\Big(\mu^{p+2-k}\lambda^k(R^L_\mu(M))^{p+1-k}(R^L_\lambda(M))^k(\mu L - M)^{-1} -$$
$$\mu^{p+1-k}\lambda^{k+1}(R^L_\mu(M))^{p+1-k}(R^L_\lambda(M))^k(\lambda L - M)^{-1}\Big) f =$$
$$\sum_{k=0}^{p+1}\mu^{p+1-k}\lambda^k(R^L_\mu(M))^{p+1-k}(R^L_\lambda(M))^{k-1}(\lambda L - M)^{-1}\left(\mu L(\mu L - M)^{-1} - \lambda L(\lambda L - M)^{-1}\right) f =$$
$$\sum_{k=0}^{p+1}\mu^{p+1-k}\lambda^k(R^L_\mu(M))^{p+1-k}(R^L_\lambda(M))^{k-1}(\lambda L - M)^{-1}M((\mu L - M)^{-1} - (\lambda L - M)^{-1})f =$$
$$(\lambda - \mu)\sum_{k=0}^{p+1}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1-k}(\lambda R^L_\lambda(M))^k(\lambda L - M)^{-1}M(\mu L - M)^{-1}f =$$
$$(\lambda - \mu)\sum_{k=0}^{p+1}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1-k}(\lambda R^L_\lambda(M))^k(\lambda L - M)^{-1}L^L_\mu(M)(L^L_\beta(M))^p M(\beta L - M)^{-1}g.$$

Отсюда вследствие сильной (L,p)-радиальности оператора M для любой полунормы $r \in \mathfrak{U}$ найдется такая полунорма $q \in \mathfrak{F}$, что

$$r\left(\mu^{p+2}(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}f - \lambda^{p+2}(R^L_\lambda(M))^{p+1}(\lambda L - M)^{-1}f\right) \le$$
$$(\mu^{-1} + \lambda^{-1})\sum_{k=0}^{p+1}\frac{q(M(\beta L - M)^{-1}g)}{(1 - a/\mu)^{p+1-k}(1 - a/\lambda)^k(\beta - a)^p} \to 0$$

при $\mu, \lambda \to +\infty$. Поэтому, учитывая плотность $\mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M)$ в $\mathcal{F}^1$ и равностепенную непрерывность семейства операторов $\{\mu^{p+2}(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1} : \mu \in (a,+\infty)\}$, мы можем утверждать, что существует оператор

$$\hat{L}_1^{-1} = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} L_\mu^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1),$$

где $L_\mu^{-1} = \mu^{p+2}(R^{L_1}_\mu(M_1))^{p+1}(\mu L_1 - M_1)^{-1}$. Здесь мы использовали замечание 4 и предложение 2.

Возьмем $u = (R^L_\beta(M))^{p+1}v$ при некотором $v \in \mathcal{U}$. Обозначим $w_k = ((\beta L - M)^{-1}M)^k v = (\beta R^L_\beta(M) - I)^k v$, тогда

$$L_\mu^{-1}L_1 u = (\mu R^L_\mu(M))^{p+2}u = (I + (\mu L - M)^{-1}M)^{p+2}u =$$

$$u+\sum_{k=1}^{p+1}C_{p+2}^{k}(R_{\mu}^{L}(M))^{k}(R_{\beta}^{L}(M))^{p+1-k}w_{k}+(R_{\mu}^{L}(M))^{p+1}(\mu L-M)^{-1}Mw_{p+1}.$$

Из сильной (L,p)-радиальности оператора M получаем

$$r\left(L_{\mu}^{-1}L_{1}u-u\right)\leq\sum_{k=1}^{p+1}\frac{C_{p+2}^{k}q(w_{k})}{(\mu-a)^{k}(\beta-a)^{p+1-k}}+\frac{q(Mw_{p+1})}{(\mu-a)^{p+2}}\to 0$$

при $\mu\to+\infty$.

Покажем, что семейство операторов $\{L_{\mu}^{-1}L_{1}:\mu\in(2a,+\infty)\}$ равностепенно непрерывно. Для любой полунормы $r\in\mathfrak{U}$ существует такая полунорма $q\in\mathfrak{F}$, что для всех $\mu\in(2a,+\infty)$, $f\in\mathcal{F}$

$$r(L_{\mu}^{-1}f)=(1-a/\mu)^{-p-2}r\left((\mu-a)^{p+2}(R_{\mu}^{L_{1}}(M_{1}))^{p+1}(\mu L_{1}-M_{1})^{-1}f\right)\leq 2^{p+2}q(f)=\tilde{q}(f).$$

В силу непрерывности оператора L_1 для $\tilde{q}\in\mathfrak{F}$ существует такая полунорма $q_1\in\mathfrak{U}$, что для всех $u\in\mathcal{U}^1$ $\tilde{q}(L_1u)\leq q_1(u)$. Таким образом, для любой полунормы $r\in\mathfrak{U}$ существует такая полунорма $q_1\in\mathfrak{U}$, что для всех $\mu\in(2a,+\infty)$, $u\in\mathcal{U}^1$ выполняется $r(L_{\mu}^{-1}L_1u)\leq q_1(u)$.

Так как $\overline{\mathrm{im}R_{(\mu,p)}^{L}(M)}=\mathcal{U}^1$, из всего вышесказанного получаем, что $\hat{L}_1^{-1}L_1u=u$ для любого $u\in\mathcal{U}^1$. Аналогично доказывается, что $L_1\hat{L}_1^{-1}=I$. □

Сужение $\{U_1(t):t\geq 0\}$ ($\{F_1(t):t\geq 0\}$) полугруппы $\{U(t):t\geq 0\}$ ($\{F(t):t\geq 0\}$) на подпространство $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$) является равностепенно непрерывной полугруппой класса (C_0) [5].

При условии сильной (L,p)-радиальности оператора M введем также обозначения: $S_1=L_1^{-1}M_1:\mathrm{dom}S_1\to\mathcal{U}^1$, $\mathrm{dom}S_1=\mathrm{dom}M_1$; $T_1=M_1L_1^{-1}:\mathrm{dom}T_1\to\mathcal{F}^1$, $\mathrm{dom}T_1=L_1[\mathrm{dom}M_1]$. Очевидно, что $S_1\in\mathcal{C}l(\mathcal{U}^1)$, $T_1\in\mathcal{C}l(\mathcal{F}^1)$.

Теорема 4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U_1(t):t\geq 0\}$ ($\{F_1(t):t\geq 0\}$) является оператор S_1 (T_1).*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6.1 в [10]. □

Следствие 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\{\mu\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\mu>a\}\subset\rho^L(M)$;

(ii) *семейства операторов* $\{((\mathrm{Re}\mu-a)R_{\mu}(S_1))^n:\mathrm{Re}\mu>a,\ n\in\mathbb{N}\}$, $\{((\mathrm{Re}\mu-a)R_{\mu}(T_1))^n:\mathrm{Re}\mu>a,\ n\in\mathbb{N}\}$ *равностепенно непрерывны.*

Доказательство. (i) Возьмем $\mu>a$, тогда

$$(\mu L-M)^{-1}u=\sum_{k=0}^{p}\mu^kH^kM_0^{-1}(I-P)u+\int_0^{\infty}e^{-\mu t}U(t)L_1^{-1}Pudt\quad\forall u\in\mathcal{U}$$

согласно лемме 1, предложению 2 и теореме 3. Для $\lambda=\mu+i\tau$ рассмотрим экспоненциально ограниченную с константой a полугруппу $\{V(t)=e^{-i\tau t}U(t):t\geq 0\}$ с генератором $S-i\tau I$. Тогда

$$(\lambda I-S)^{-1}L_1^{-1}Pu=(\mu I-(S-i\tau I))^{-1}L_1^{-1}Pu=\int_0^{\infty}e^{-\mu t}V(t)L_1^{-1}Pudt=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}U(t)L_1^{-1}Pudt.$$

Таким образом, правая часть этого равенства определена в комплексной полуплоскости $\{\mu\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\mu>a\}$, поэтому и про левую часть можно сказать то же самое.

(ii) Утверждение следует из теоремы 2 [5, гл. IX, §4], если сделать замену $\mu - a = \lambda$ и рассмотреть резольвенты генераторов равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0) $S_1 - aI$, $T_1 - aI$. Действительно, в силу тождества (10) [5, гл. IX, §4] при положительных $\mathrm{Re}\lambda$

$$q((\mathrm{Re}\lambda\, R_\lambda(S_1 - aI))^{n+1}u) \leq \frac{(\mathrm{Re}\lambda)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| t^n dt \sup_{t\geq 0} q(\tilde{U}_1(t)u) \leq$$

$$\frac{(\mathrm{Re}\lambda)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-t\mathrm{Re}\lambda} t^n dt\, r(u) = r(u),$$

где $\{\tilde{U}_1(t) : t \geq 0\}$ – порождаемая оператором $S_1 - aI$ полугруппа. □

4. Основной результат

Выделим пять условий. Будем предполагать, что для отображений из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{U}$ справедлива теорема о замкнутом графике.

(A1) *Существуют две экспоненциально ограниченные сильно непрерывные полугруппы* $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \geq 0\}$, $\{F(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) : t \geq 0\}$ *операторов.*

Определим проекторы $P = U(0)$, $Q = F(0)$. Введем обозначения $\mathcal{U}^0 = \ker P$, $\mathcal{U}^1 = \mathrm{im}P$, $\mathcal{F}^0 = \ker Q$, $\mathcal{F}^1 = \mathrm{im}Q$; имеем $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Через $\{U_1(t) : t \geq 0\}$ и $\{F_1(t) : t \geq 0\}$ обозначим сужения соответствующих полугрупп на подпространства $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$. Сужения являются невырожденными полугруппами. По теореме Хилле – Иосиды [5, гл. IX, §7] экспоненциально ограниченные с общей константой a (если константы разные, выберем наибольшую) сильно непрерывные полугруппы $\{U_1(t) : t \geq 0\}$ и $\{F_1(t) : t \geq 0\}$ обладают инфинитезимальными генераторами S_1 и T_1.

(A2) *Существует линейный гомеоморфизм* $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$ *такой, что* $L_1[\mathrm{dom}S_1] = \mathrm{dom}T_1$, $L_1 S_1 = T_1 L_1$.

(A3) *Существует биективный оператор* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$.

Отсюда следует существование оператора $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

(A4) *Существует оператор* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ *такой, что оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* $p \in \mathbb{N}_0$.

(A5) $L = L_0(I - P) + L_1 P$; $M = M_0(I - P) + L_1 S_1 P$, $\mathrm{dom}M = \mathrm{dom}M_0 \dot{+} \mathrm{dom}L_1 S_1$.

Теорема 5. *Оператор M сильно (L, p)-радиален тогда и только тогда, когда выполнены все условия* (A1) – (A5).

Доказательство. Необходимость условий (A1) – (A5) следует из результатов предыдущих параграфов. Покажем их достаточность. Имеем

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q,$$

$$(R^L_{(\mu,p)}(M))^n = \mathbb{O}(I - P) + \prod_{k=0}^{p} (R_{\mu_k}(S_1))^n P,$$

$$(L^L_{(\mu,p)}(M))^n = \mathbb{O}(I - Q) + \prod_{k=0}^{p} (R_{\mu_k}(T_1))^n Q,$$

где $\mu_k > 0$, $k = \overline{0,p}$. Далее,

$$R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} = \mathbb{O}(I - Q) + \prod_{k=0}^{p}(\mu_k I - S_1)^{-1}(\lambda I - S_1)^{-1}L_1^{-1}Q,$$

$$M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f = \mathbb{O}(I - Q)f + (\lambda I - T_1)^{-1}\prod_{k=0}^{p}(\mu_k I - T_1)^{-1}T_1 Qf.$$

Здесь f из плотного линеала $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \dot{+} \mathrm{dom} T_1$. Из данных соотношений и выполнения условий Хилле – Иосиды для операторов S_1 и T_1 следует требуемое. □

Следствие 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда для любого $q \in \mathbb{N}$ оператор M сильно $(L,p+q)$-радиален.*

Для доказательства достаточно обратить внимание, что константа p среди достаточных условий сильной (L,p)-радиальности присутствует лишь в условии (A4).

Следствие 3. *Оператор M сильно (I,p)-радиален тогда и только тогда, когда он радиален.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, $L = I$. Тогда условия (A2) – (A5) становятся тривиальными, и остается лишь условие (A1) о существовании сильно непрерывной полугруппы, теперь уже невырожденной. При этом $M = S$ – ее генератор и поэтому является радиальным оператором. □

(A2)' *Существует инъективный оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$ с плотным в $\mathcal{F}^1$ образом, при этом* $\mathrm{dom} L_1 S_1 = \mathrm{dom} T_1 L_1$ *и для всех $u \in \mathrm{dom} L_1 S_1$ имеет место равенство $L_1 S_1 u = T_1 L_1 u$.*

Теорема 6. *Оператор M (L,p)-радиален и при этом имеют место равенства $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ тогда и только тогда, когда выполнены все условия* (A1), (A2)', (A3) – (A5).

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 5. Надо лишь вместо теоремы 4 использовать теорему 2 и тот факт, что равенства $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ следуют уже из условия (A1). □

Аналогично следствиям 2, 3 получим

Следствие 4. *Если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, то из (L,p)-радиальности оператора M следует его $(L,p+q)$-радиальность при любом $q \in \mathbb{N}$.*

Следствие 5. *Оператор M (I,p)-радиален тогда и только тогда, когда он радиален.*

В отличие от доказательства следствия 3 надо еще заметить, что при $L = I$ условия $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ также становятся тривиальными.

Замечание 5. Из следствий 3 и 5 вытекает, что каждая из теорем 5, 6 является обобщением теоремы Хилле – Иосиды.

Из теорем 5 и 6 получим следующий основной результат данной работы.

Теорема 7. *Оператор M сильно (L,p)-радиален точно тогда, когда выполняются следующие условия:*

(i) *оператор M (L,p)-радиален;*

(ii) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$;
(iii) *существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Доказательство. Тот факт, что утверждения (i) – (iii) следуют из сильной (L,p)-радиальности оператора, вытекает из ее определения и теоремы 5. Докажем обратное утверждение. Из утверждений (i), (ii) следует справедливость условий (A1), (A2)', (A3) – (A5). А утверждение (iii) вкупе с (A2)' влечет (A2). Наконец, из утверждений (A1) – (A5) следует сильная (L,p)-радиальность оператора M, что и требовалось. □

Другой возможной формулировкой теоремы 7 является

Следствие 6. *Пусть* $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ *и существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$. *Тогда (L,p)-радиальность оператора M эквивалентна его сильной (L,p)-радиальности.*

5. Случай (L,p)-секториального оператора

Аналогичные результаты имеют место и в случае, когда речь идет о вырожденных сильно голоморфных полугруппах операторов. Сформулируем их.

(B1) *Существуют две экспоненциально ограниченные сильно голоморфные полугруппы* $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \geq 0\}$, $\{F(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) : t \geq 0\}$ *операторов.*

Отличие от предыдущего параграфа состоит только в том, что операторы S_1, T_1 секториальны.

Теорема 8. [7]. *Оператор M сильно (L,p)-секториален тогда и только тогда, когда выполнены все условия* (B1), (A2) – (A5).

Теорема 9. *Оператор M (L,p)-секториален и при этом имеют место равенства* $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ *точно тогда, когда выполнены все условия* (B1), (A2)', (A3) – (A5).

Для случая банаховых пространств эта теорема доказана в [11]. В случае локально выпуклых пространств доказательство может быть проведено дословным повторением.

Теорема 10. *Оператор M сильно (L,p)-секториален точно тогда, когда выполняются следующие условия:*
(i) *оператор M (L,p)-секториален;*
(ii) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$;
(iii) *существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Доказательство. Условия (i) – (iii) следуют из определения сильной (L,p)-секториальности оператора и теоремы 8. Обратно, из утверждений (i), (ii) следует справедливость условий (B1), (A2)', (A3) – (A5). А утверждения (iii) и (A2)' влекут (A2). Выполнение условий (B1), (A2) – (A5) и теорема 8 позволяют сделать вывод о сильной (L,p)-секториальности оператора M. □

Следствие 7. *Пусть* $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ *и существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$. *Тогда (L,p)-секториальность оператора M эквивалентна его сильной (L,p)-секториальности.*

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, грант №07-01-96030-р_урал_а

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47 – 74.

2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
3. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003.
4. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М.: Иностр. лит., 1962.
5. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967.
6. Свиридюк, Г.А. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 604 – 616.
7. Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131 – 160.
8. Федоров, В.Е. Обобщение теоремы Хилле – Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 426 – 448.
9. Федоров, В.Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами / В.Е. Федоров // ДАН. – 1996. – Т. 351, № 3. – С. 316 – 318.
10. Федоров, В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Федоров // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, вып. 3. – С. 173 – 200.
11. Федоров, В.Е. Единицы вырожденных аналитических полугрупп операторов и относительная p-секториальность / В.Е. Федоров // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 138 – 155.

Кафедра математического анализа,
Челябинский государственный университет
kar@csu.ru

Поступила в редакцию 24 марта 2008 г.