УДК 517.9

# О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ

*В.Е. Федоров, О.А. Стахеева*

# ON LOCAL SOLVABILITY OF LINEAR EVOLUTIONARY EQUATIONS WITH MEMORY

*V.E. Fedorov, O.A.Stakheeva*

Доказана локальная однозначная разрешимость задачи Коши для линейного эволюционного уравнения с секториальным оператором и с интегральным оператором памяти в банаховом пространстве. Результат работы проиллюстрирован на примере начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения с частными производными.

*Ключевые слова: эволюционное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение с памятью, секториальный оператор, аналитическая полугруппа операторов*

The authors prove the local unique solvability of the Cauchy problem for linear evolutionary equation with sectorial operator and with integral memory operator in the Banach space. The result is illustrated on the example of the initial boundary value problem for integro-differential equation with partial derivatives.

*Keywords: evolutionary equation, integro-differential equation, equation with memory, sectorial operator, analytic semigroup of operators*

## Введение

Задача Коши для эволюционных уравнений является абстрактной формой начально-краевых задач для уравнений в частных производных, в естественных и технических науках часто описывающих различные процессы [1 – 3]. При этом часто встречаются системы с памятью, поведение которых не определяется целиком состоянием в настоящий момент, а зависит от всей «истории» системы (см. по этому поводу [4]).

В данной работе рассмотрена задача Коши для абстрактного линейного эволюционного уравнения с памятью в банаховом пространстве. С помощью принципа сжимающих отображений доказана однозначная локальная разрешимость этой задачи в смысле классических решений. Полученный результат использован при исследовании начально-краевой задачи для параболического интегро-дифференциального уравнения с памятью.

В перспективе результаты работы позволят с одной стороны перейти к рассмотрению полулинейных эволюционных уравнений с памятью, а с другой стороны – исследовать уравнения соболевского типа с памятью.

## 1. Предварительные сведения

В этом параграфе изложены используемые при получении основного результаты факты из классической теории полугрупп операторов (см. [1]).

Обозначим через $\rho(A)$ резольвентное множество оператора $A$, а через $\sigma(A)$ – его спектр.

**Определение 1.** Будем называть линейный замкнутый плотно определенный оператор $A$ в банаховом пространстве $X$ *секториальным,* если существуют константы $a \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}_+$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S_{a,\Theta}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho(A),$$

причем

$$\|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{|\mu - a|} \quad \forall \mu \in S_{a,\Theta}(A).$$

**Замечание 1.** В монографии [1] оператор $A$ называется секториальным, если условиям определения 1 удовлетворяет оператор $-A$. Авторы данной работы будут придерживаться более удобных для них формулировок.

**Определение 2.** *Аналитическая полугруппа* в банаховом пространстве $X$ — это семейство непрерывных линейных операторов $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ в $X$, удовлетворяющее условиям:

1. $T(0) = I$, $T(t)T(s) = T(t + s)$ для $t \geqslant 0, s \geqslant 0$.
2. $T(t)x \to x$ при $t \to 0+$ для $\forall x \in X$.
3. Отображение $t \mapsto T(t)x$ аналитически продолжимо в некоторую область, содержащую множество $\{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ для всех $x \in X$.

*Инфинитезимальный генератор* $L$ этой полугруппы определяется следующим образом:

$$Lx = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(T(t)x - x).$$

Его область определения $D(L)$ состоит из всех $x \in X$, для которых этот предел в $X$ существует. Будет использоваться обозначение $T(t) = e^{Lt}$.

**Теорема 1.** *Если $A$ — секториальный оператор, то $A$ — инфинитезимальный генератор аналитической полугруппы $\{e^{At}\}_{t\geqslant 0}$, где*

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\lambda - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \ ,$$

*$\Gamma$ — контур в $\rho(A)$, такой что $\arg\ \lambda \to \pm\Theta$ при $|\lambda| \to \infty$. При этом $e^{At}$ можно аналитически продолжить в сектор $\{t \in \mathbb{C} : |arg\ t| < \varepsilon\}$, содержащий положительную вещественную полуось, и*

$$\exists C > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|e^{At}\| \leqslant Ce^{at}, \quad \|Ae^{At}\| \leqslant \frac{C}{t} e^{at}.$$

*Наконец,*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} \quad \forall t > 0.$$

**Определение 3.** Пусть $-A$ — секториальный оператор, $\text{Re}\mu > 0$ при всех $\mu \in \sigma(A)$. Положим для любого $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt, \quad D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha}), \quad A^\alpha = \left(A^{-\alpha}\right)^{-1},$$

$A^0$ – тождественный оператор в $X$.

**Теорема 2.** *Если $-A$ — секториальный оператор в $X$, $\mathrm{Re}\mu > 0$ при всех $\mu \in \sigma(A)$, то для любого $\alpha > 0$ оператор $A^{-\alpha}$ есть ограниченный линейный оператор в $X$, инъективный и удовлетворяющий соотношениям $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ при $\alpha > 0$, $\beta > 0$.*

**Теорема 3.** *Пусть $-A$ — секториальный оператор, $\inf\{\mathrm{Re}\mu : \mu \in \sigma(A)\} > \delta > 0$. Тогда*

$$\forall \alpha \geqslant 0 \quad \exists C_\alpha > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|A^\alpha e^{-At}\| \leqslant C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

*Если при этом $0 < \alpha \leqslant 1$, $x \in D(A^\alpha)$, то*

$$\forall t > 0 \quad \|(e^{-At} - I)x\| \leqslant \frac{C_{1-\alpha} t^\alpha}{\alpha} \|A^\alpha x\|.$$

**Определение 4.** Пусть $A$ — секториальный оператор в банаховом пространстве $X$, $A_1 = aI - A$, где $a > \sup\{\mathrm{Re}\mu : \mu \in \sigma(A)\}$. Для каждого $\alpha \geqslant 0$ положим $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ и наделим пространство $X^\alpha$ нормой графика $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$, $x \in X^\alpha$.

**Теорема 4.** *Если $A$ — секториальный оператор в банаховом пространстве $X$, то $X^\alpha$ — банахово постранство с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ для $\alpha \geqslant 0$, причем $X^0 = X$. Для $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$ пространство $X^\alpha$ есть плотное подпространство в $X^\beta$, причем, соответствующее вложение непрерывно. Если $A$ имеет компактную резольвенту, то вложение $X^\alpha \subset X^\beta$ компактно при $\alpha > \beta \geqslant 0$.*

## 2. Эволюционное уравнение с памятью

Пусть $X$ — банахово пространство, $\mathcal{X}(T) = C([0,T];X)$, $\|u\|_{\mathcal{X}(T)} = \max\limits_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X$. Оператор $(Ju)(t)$ имеет вид

$$(Ju)(t) = \int\limits_0^\infty k(s)u(t-s)ds = \int\limits_0^t k(s)u(t-s)ds + \int\limits_0^\infty k(t+s)u_-(-s)ds,$$

где $u_-$ – заданная на $\mathbb{R}_-$ функция, описывающая «историю» системы. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \in X \tag{1}$$

для эволюционного уравнения с памятью

$$\dot{u}(t) = Au(t) + (Ju)(t). \tag{2}$$

Ее решением на отрезке $[0,T]$ называется функция $u \in C^1((0,T];X) \cap C([0,T];X)$, удовлетворяющая условию (1) и уравнению (2).

Основным результатом данной работы является доказательство однозначной локальной разрешимости этой задачи.

**Теорема 5.** *Пусть $A$ — секториальный оператор, $\mathrm{Re}\mu < 0$ для всех $\mu \in \sigma(A)$, $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-;X)$, $k \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Если*

$$\exists N > 0 \quad \forall t, s \geq 0 \ |k(t) - k(s)| \leqslant N|t-s|,$$

*то при некотором $T > 0$ существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке $[0,T]$.*

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\dot{u}(t) = Au(t) + g(t). \tag{3}$$

Положим

$$g_0 = \int_0^\infty k(s)u_-(-s)ds \in X, \quad 0 < \delta < 1,$$

$B(T) = \{g \in \mathcal{X}(T) : g(0) = g_0, \ \|g\|_{\mathcal{X}(T)} \leqslant \|g_0\|_X + 1, \ \|g(t) - g(s)\|_X \leqslant N_1|t-s|^\delta \ \forall s, t \in [0, T]\}.$

При $g \in B(T)$ решение задачи Коши (1) для уравнения (3) имеет вид

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds, \tag{4}$$

поэтому в силу теоремы 1

$$\|u(t)\| \leqslant C\|u_0\|_X + Ct(\|g\|_{\mathcal{X}(T)} + 1) = K_1 + K_2 t \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5}$$

Далее, при $t > s > 0$, применяя теорему 3, получим

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leqslant \|(e^{A(t-s)} - I)e^{As}u_0\|_X +$$

$$+ \int_0^s \|(e^{A(t-s)} - I)e^{A(s-\tau)}g(\tau)\|_X d\tau + \int_s^t \|e^{A(t-\tau)}g(\tau)\|_X d\tau \leqslant$$

$$C_\delta C_{1-\delta} s^{-\delta}(t-s)^\delta \|u_0\|_X + C_\delta C_{1-\delta}(t-s)^\delta \|g\|_{\mathcal{X}(T)} \int_0^s \frac{d\tau}{(s-\tau)^\delta} +$$

$$+ C(t-s)\|g\|_{\mathcal{X}(T)} \leqslant K_3(t-s)^\delta s^{-\delta}, \tag{6}$$

$$K_3 = C_\delta C_{1-\delta}\|u_0\|_X + \left(\frac{C_\delta C_{1-\delta}}{1-\delta} + C\right)(\|g_0\|_X + 1)T.$$

Определим на $B(T)$ оператор

$$[\Phi g](t) = \int_0^\infty k(s)u(t-s)ds,$$

где функция $u$ определяется функцией $g$ из задачи (1), (3) по формуле (4). Имеем очевидное равенство $[\Phi g](0) = g_0$. Далее, используя неравенство (5), получим

$$\|[\Phi g](t)\|_X \leqslant \int_0^t |k(s)| \cdot \|u(t-s)\|_X ds + \int_0^\infty |k(t+s) - k(s)| \cdot \|u_-(-s)\|_X ds + \|g_0\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant T} |k(s)| \left(K_1 t + K_2 \frac{t^2}{2}\right) + Nt\|u_-\|_{L_1(\mathbb{R}_-;X)} + \|g_0\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \|k\|_{C(\mathbb{R}_+)} C(\|u_0\|_X T + (\|g_0\|_X + 1)T^2) + NT\|u_-\|_{L_1(\mathbb{R}_-;X)} + \|g_0\|_X \leqslant \|g_0\|_X + 1,$$

при значении $T$, меньшем каждой из констант $(3C\|u_0\|_X\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)})^{-1}$, $(3C(\|g_0\|_X + 1)\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)})^{-\frac{1}{2}}$, $(3N\|u_-\|_{L_1(\mathbb{R}_-;X)})^{-1}$. Здесь использован также тот факт, что гельдерова функция непрерывна, а непрерывная вплоть до нуля функция класса $L_1(\mathbb{R}_+)$ является ограниченной.

Кроме того, в силу неравенства (6) при $t' > t$

$$\|[\Phi g](t) - [\Phi g](t')\|_X \leqslant \int\limits_t^{t'} |k(s)|\|u(t'-s)\|_X ds + \int\limits_0^t |k(s)|\|u(t'-s) - u(t-s)\|_X ds +$$

$$+ \int\limits_0^\infty |k(t'+s) - k(t+s)|\|u_-(-s)\|_X ds \leqslant -\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)} \left(K_1(t'-s) + \frac{K_2}{2}(t'-s)^2\right)\Bigg|_t^{t'} -$$

$$-\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)} K_3 (t'-t)^\delta \frac{(t-s)^{1-\delta}}{1-\delta}\Bigg|_0^t + N(t'-t)\|u_-\|_{L_1(\mathbb{R}_-;X)} \leqslant K_4(t'-t)^\delta.$$

Таким образом, имеем действие оператора $\Phi : B(T) \to B(T)$ при выбранном $T$.

Для произвольных функций $g_1, g_2 \in B(T)$ выполняется

$$\|[\Phi g_1](t) - [\Phi g_2](t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t k(s)ds \int\limits_0^{t-s} \|e^{A(t-s-\tau)}[g_1(\tau) - g_2(\tau)]\|_X d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\|g_1 - g_2\|_{\mathcal{X}(T)} \int\limits_0^t (t-s)k(s)ds \leqslant C\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)}\|g_1 - g_2\|_{\mathcal{X}(T)} \frac{T^2}{2}.$$

Поэтому, если помимо вышеупомянутых ограничений на $T$ будет выполняться неравенство $T < \sqrt{\frac{2}{C\|k\|_{C(\mathbb{R}_+)}}}$, то на соответствующем полном метрическом пространстве $B(T)$ с метрикой, порожденной sup-нормой, $\Phi$ — сжимающий оператор. Следовательно, по теореме о сжимающем отображении найдется единственный элемент $g_1 \in B(T)$, такой что $g_1 = \Phi g_1$. В этом случае функция

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)} g_1(s)ds$$

является одновременно решением задач (1), (2) и (1), (3), так как $g_1(t) = (Ju)(t)$.

С другой стороны, если $v$ — решение задачи (1), (2), то нетрудно показать, что $g(t) = (Jv)(t)$ – неподвижная точка оператора $\Phi$, лежащая в шаре $B(T)$. Отсюда следует единственность решения задачи (1), (2). □

**Замечание 2.** Все ограничения на $T$ определялись только оператором $A$, значением $u_0$ и функциями $k$ и $u_-$.

**Замечание 3.** Если требовать непрерывности изменения процесса, описываемого задачей (1), (2), то необходимо в условия теоремы добавить требования $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-; X) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_-; X)$, $u_-(0) = u_0$, где $\overline{\mathbb{R}}_- = \mathbb{R}_- \cup \{0\}$.

## 3. Пример

В качестве примера применения полученного абстрактного результата рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{8}$$

для параболического интегро-дифференциального уравнения с памятью

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + \int\limits_0^\infty k(s)u(x,t-s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{9}$$

в цилиндре $\Omega \times [0,T]$, где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу. В пространстве $X = L_2(\Omega)$ оператор $Au = \Delta u$ с областью определения

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega\},$$

как известно [1], является секториальным, причем $\mathrm{Re}\mu < 0$ при всех $\mu \in \sigma(A)$. Поэтому, задав гельдерову на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функцию $k \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и такую функцию $u_-(x,t)$, что $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, получим существование единственного решения $u \in C^1((0,T]; L_2(\Omega)) \cap C([0,T]; L_2(\Omega))$ задачи (7) – (9) при достаточно малом $T > 0$.

*Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, грант №07-01-96030-р_ урал_ а*

## Литература

1. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.

2. Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999.

3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003.

4. Grasselli, M. Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory / M. Grasselli, V. Pata. – In the book: Progress in nonlinear differential equations and their applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 2002. – Vol. 50. – P. 155 – 178.

Кафедра математического анализа,
Челябинский государственный университет
kar@csu.ru

*Поступила в редакцию 18 сентября 2008 г.*