УДК 533.2+534

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

В.Ф. Куропатенко

Рассматривается метод определения скорости распространения слабых сигналов в различных средах – идеальных, неидеальных (с отличным от нуля девиатором напряжений) и многокомпонентных. Что касается идеальных сред, то формула Лапласа для скорости звука

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S$$

настолько широко применяется во всем мире в течение длительного времени, что она воспринимается как определение скорости звука. В работе показано, что эта формула является не определением, а следствием рассмотрения законов сохранения массы импульса и энергии в случае малых возмущений в среде с произвольным уравнением состояния. Точно такое же рассмотрение в случае упругой изотропной среды позволяет выразить скорости распространения продольных и поперечных малых возмущений через свойства твердого тела. Эти зависимости достаточно хорошо изучены в теории упругости, хотя иногда встречаются работы по механике сплошных сред, содержащие несколько иные, чем общепринятые, связи скоростей продольных и поперечных возмущений с гидродинамической скоростью звука. Их обсуждение в данной статье вызвано необходимостью продемонстрировать общность применяемого метода.

Наконец, в случае многокомпонентных сред метод приводит к уравнению для скорости звука смеси, принципиально отличному от широко применяемого. В работе дается обоснование нового уравнения, выражающего скорость звука смеси через скорости звука и концентрации компонентов.

Ключевые слова: математическая модель, скорость звука, идеальная среда, смесь, упругость, концентрация, уравнение состояния.

1. Идеальная среда

В идеальной сплошной среде девиатор тензора напряжений равен нулю, и в каждой точке пространства x, y, z, t на вещество действует единственная сила – давление. Законы сохранения массы, количества движения и энергии в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{U} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} + \left(\bar{U}\nabla\right)\rho\bar{U} + \rho\bar{U}\left(\nabla\bar{U}\right) + \nabla P = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \nabla\left(\bar{U}\left(\rho\varepsilon + P\right)\right) = 0, \tag{3}$$

где ρ – плотность, $\bar{U}$ – скорость, P – давление, ε – удельная полная энергия, равная сумме удельной внутренней энергии E и удельной кинетической энергии $\frac{1}{2}\bar{U}^2$

$$\varepsilon = E + \frac{1}{2}\bar{U}^2.$$

Одним из следствий законов сохранения (1) – (3) является постоянство энтропии S вдоль траектории любой материальной частицы

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\bar{U}\nabla S=0. \tag{4}$$

В случае плоскосимметричного одномерного течения законы сохранения (1), (2) и уравнение (4) имеют вид [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+U\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{5}$$

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}+\rho U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+U\frac{\partial S}{\partial x}=0. \tag{7}$$

Система уравнений (5) – (7) замыкается уравнением состояния

$$P=P\left(\rho,S\right).$$

Продифференцируем $P\left(\rho,S\right)$ вдоль траектории частицы

$$\frac{\partial P}{\partial t}+U\frac{\partial P}{\partial x}=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+U\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t}+U\frac{\partial S}{\partial x}\right). \tag{8}$$

Обозначим [1]

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S=C^2 \tag{9}$$

и, используя (7), запишем (8) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+U\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{o}}=\frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}+U\frac{\partial P}{\partial \tilde{o}}\right). \tag{10}$$

Подставив (10) в (5), получим уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t}+U\frac{\partial P}{\partial x}+\rho C^2\frac{\partial U}{\partial x}=0. \tag{11}$$

Уравнение (11) вместе с уравнением (6) вдоль характеристических направлений

$$\frac{dx}{dt}=U\pm C \tag{12}$$

преобразуется к виду

$$\frac{dP}{dt}\pm\rho C\frac{dU}{dt}=0, \tag{13}$$

где

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(U\pm C)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{14}$$

Если в некоторой точке среды изменить хотя бы одну из величин, характеризующих состояние и движение, то это возмущение будет распространяться во все стороны. Введем слабые возмущения следующим образом. Будем считать, что P,ρ,C и U имеют вид

$P = P_0 + \delta P, C = C_0 + \delta C, U = U_0 + \delta U, \rho = \rho_0 + \delta\rho$, где $P_0 = \text{const}, \rho_0 = \text{const}, U_0 = 0$, $C_0 = \text{const}$, а $\delta P, \delta\rho, \delta C, \delta U$ такие малые величины, что $\delta P << P_0$, $\delta\rho << \rho_0$, $\delta C << C_0$, $\delta U << C_0$. Подставив P, ρ, C, U в (12), (13) и отбросив малые величины, получим уравнения характеристик и уравнения вдоль характеристик в виде

$$\frac{dx}{dt} = U_0 \pm C_0, \tag{15}$$

$$\frac{d\delta P}{dt} \pm \rho_0 C_0 \frac{d\delta U}{dt} = 0. \tag{16}$$

Поскольку $\rho_0 = \text{const}$, $C_0 = \text{const}$, $U_0 = 0$, то уравнения (15), (16) можно проинтегрировать. После интегрирования получим:

1) вдоль характеристик 1-го семейства

$$x = x_0 + (U_0 + C_0)(t - t_0)$$

справедливо уравнение

$$\delta P + \rho_0 C_0 \delta U = \text{const}, \tag{17}$$

2) вдоль характеристик 2-го семейства

$$x = x_0 + (U_0 - C_0)(t - t_0)$$

справедливо уравнение

$$\delta P - \rho_0 C_0 \delta U = \text{const}. \tag{18}$$

Постоянные вдоль характеристик величины в уравнениях (17), (18) назовем акустическими инвариантами α и β

$$\alpha = \delta U + \frac{1}{\rho_0 C_0}\delta P,\ \beta = \delta U - \frac{1}{\rho_0 C_0}\delta P.$$

Малые возмущения δUи δP выражаются через акустические инварианты так

$$\delta U = 0,5\,(\alpha + \beta)\,,\ \delta P = 0,5\,(\alpha - \beta)\,\rho_0 C_0\,.$$

Анализ полученного решения показывает, что начальное возмущение $\delta U\,(x)$ или $\delta P\,(x)$ при $t > 0$ распадается на две одинаковые части: $0,5\delta U$или $0,5\delta P$, которые переносятся без изменения вдоль характеристик в противоположных направлениях. Скорость распространения этого возмущения в покоящейся среде равна наклону характеристик $\frac{dx}{dt} = \pm C_0$. Величина C_0 зависит только от свойств среды и не зависит от формы возмущения. Типичными возмущениями для воздуха являются шумы, звуковые сигналы, поэтому величина С получила название **скорость звука**.

Скорость звука, которая определяется по формуле (9), является вещественной при условии $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \geq 0$. Все случаи нарушения этого условия требуют специального рассмотрения.

Рассмотрим теперь одномерные течения идеальной сплошной среды в случае цилиндрической или сферической симметрии. После перехода от координаты x к координате r уравнения (5), (6) примут вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{(\nu - 1)\,\rho U}{r} = 0, \tag{19}$$

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t} + \rho U\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \tag{20}$$

где U – скорость вдоль любого луча $0r$, ν – показатель симметрии ($\nu = 1$ – плоское течение, $\nu = 2$ – течение с цилиндрической симметрией, $\nu = 3$ – течение со сферической симметрией). После замены с помощью (10) производных $\rho\,(t,\,r)$ производными $P\,(t,\,r)$ и перехода к малым возмущениям уравнение (19) принимает вид

$$\frac{\partial\delta P}{\partial t} + U_0\frac{\partial\delta P}{\partial r} + \rho_0 C_0^2\frac{\partial\delta U}{\partial r} + \frac{(\nu-1)\left(\rho_0 C_0^2\delta U + U_0 C_0^2\delta\rho + 2U_0\rho_0 C_0\delta C\right)}{r} = 0. \tag{21}$$

После преобразования уравнений (20), (21) к характеристической форме получаем, что уравнения самих характеристик при $U_0 = 0$ имеют точно такую же форму

$$\frac{dr}{dt} = \pm C_0,$$

как и в случае плоской симметрии, а уравнения вдоль характеристик отличаются.

2. Неидеальная среда

Из всех возможных неидеальных сред рассмотрим только упругую изотропную среду, поскольку упругие деформации обратимы и, следовательно, энтропия остается постоянной вдоль траектории материальной частицы, т.е. выполняется уравнение (7). Закон сохранения массы не зависит от неидеальности среды и имеет вид (1). Векторное уравнение движения неидеальной среды в проекциях на координатные оси распадается на три скалярных уравнения [2]

$$\rho\frac{dU_x}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0, \tag{22}$$

$$\rho\frac{dU_y}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0, \tag{23}$$

$$\rho\frac{dU_z}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = 0, \tag{24}$$

где S_{xx}, S_{yy}, S_{zz} – нормальные, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ – касательные компоненты девиатора напряжений. Воспользуемся результатами теории упругих напряжений и деформаций [3] и выпишем зависимости между ними.

$$S_{xx} = \frac{2G}{3}\left(2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}\right), \tag{25}$$

$$S_{yy} = \frac{2G}{3}\left(-\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}\right), \tag{26}$$

$$S_{zz} = \frac{2G}{3}\left(-\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + 2\varepsilon_{zz}\right), \tag{27}$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{yx},\; \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz},\; \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \tag{28}$$

где

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial x}{\partial x_0},\; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial y}{\partial y_0},\; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial z}{\partial z_0}, \tag{29}$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial y}{\partial x_0},\ \gamma_{zy} = \frac{\partial z}{\partial y_0},\ \gamma_{xz} = \frac{\partial x}{\partial z_0}. \tag{30}$$

В одномерном течении вдоль оси x все величины в плоскости zOy, ортогональной оси x, должны быть одинаковыми. Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial}{\partial y_0} = 0,\ \frac{\partial}{\partial z_0} = 0.$$

С учетом этого факта уравнения (1), (22) – (30), принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U_x}{\partial x} = 0, \tag{31}$$

$$\rho \frac{\partial U_x}{\partial t} + \rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} = 0, \tag{32}$$

$$\rho \frac{\partial U_y}{\partial t} + \rho U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0, \tag{33}$$

$$\rho \frac{\partial U_z}{\partial t} + \rho U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0,$$

$$\varepsilon_{yy} = 0,\ \varepsilon_{zz} = 0,\ \gamma_{zy} = 0,\ \gamma_{xz} = 0,$$

$$S_{xx} = \frac{4}{3} G \frac{\partial x}{\partial x_0},\ S_{yy} = -\frac{2}{3} G \frac{\partial x}{\partial x_0},\ S_{zz} = -\frac{2}{3} G \frac{\partial x}{\partial x_0}, \tag{34}$$

$$\tau_{yx} = G \frac{\partial y}{\partial x_0},\ \tau_{zx} = 0,\ \tau_{zy} = 0. \tag{35}$$

Сделаем еще одно упрощение и будем считать, что $U_z = 0$, т.е. в случае поперечных колебаний материальные частицы смещаются только вдоль оси y. Продифференцировав (34), (35), получим уравнения для S_{xx} и τ_{yx}

$$\frac{dS_{xx}}{dt} - \frac{4}{3} G \frac{\partial U_x}{\partial x_0} = 0,\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} - G \frac{\partial U_y}{\partial x_0} = 0. \tag{36}$$

Чтобы перейти от лагранжевой координаты x_0 к эйлеровой координате x, рассмотрим параллелепипед объемом $d\theta_0 = dx_0 dy_0 dz_0$. Удельный объем вещества с массой dm в этом объеме обозначим через $V_0 = dx_0 dy_0 dz_0/dm$. В одномерном движении $dy_0 = \mathrm{const}$, $dz_0 = \mathrm{const}$, а dx изменится, в результате чего изменится удельный объем

$$V = dx\, dy_0\, dz_0/dm. \tag{37}$$

Полный дифференциал функции $x(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_{y_0, z_0} dx_0, \tag{38}$$

поскольку в рассматриваемом движении отсутствуют сдвиги и повороты и $\frac{\partial x}{\partial y_0} = 0$, $\frac{\partial x}{\partial z_0} = 0$. Подставив (38) в (37), получим связь Vи V_0

$$V = V_0 \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_{y_0, z_0}. \tag{39}$$

Из-за отсутствия сдвигов и поворотов производные $\frac{\partial U_x}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial U_y}{\partial x_0}$, входящие в уравнения (36), преобразуются к виду

$$\frac{\partial U_x}{\partial x_0} = \frac{\partial U_x}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right), \frac{\partial U_y}{\partial x_0} = \frac{\partial U_y}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right). \tag{40}$$

Преобразуем дальше выражения $\frac{\partial U_x}{\partial x_0}$, $\frac{\partial U_y}{\partial x_0}$, подставив $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ из (39) в (40), и подставим полученный результат в (36). Заменив субстанциональные производные $\frac{dS_{xx}}{dt}$ и $\frac{d\tau_{yx}}{dt}$ их выражениями через $\frac{\partial S_{xx}}{\partial t}$, $\frac{\partial S_{xx}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}$, получим

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial t} + U_x\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{4}{3}G\cdot\frac{V}{V_0}\frac{\partial U_x}{\partial x} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} + U_x\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - G\frac{V}{V_0}\frac{\partial U_y}{\partial x} = 0. \tag{42}$$

Окончательно имеем систему уравнений (31) – (33), (41) и (42). В этих уравнениях перейдем, как и ранее, к малым возмущениям $P = P_0 + \delta P$, $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $U_x = U_{x_0} + \delta U_x$, $S_{xx} = S_{xx_0} + \delta S_{xx}$, $V = V_0 + \delta V$, $C^2 = C_0^2 + \delta C^2$, $\tau_{yx} = \tau_{yx_0} + \delta\tau_{yx}$ при $P_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$, $C_0^2 = \text{const}$, $U_{x_0} = 0$, $S_{xx_0} = 0$, $V_0 = \text{const}$, $\tau_{yx_0} = 0$. В результате приходим к системе линейных уравнений

$$\frac{\partial\delta P}{\partial t} + \rho_0 C_0^2\frac{\partial\delta U_x}{\partial x} = 0, \tag{43}$$

$$\rho_0\frac{\partial\delta U_x}{\partial t} + \frac{\partial\delta P}{\partial x} - \frac{\partial\delta S_{xx}}{\partial x} = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial\delta S_{xx}}{\partial t} - \frac{4}{3}G\frac{\partial\delta U_x}{\partial x} = 0, \tag{45}$$

$$\rho_0\frac{\partial\delta U_y}{\partial t} - \frac{\partial\delta\tau_{yx}}{\partial x} = 0, \tag{46}$$

$$\frac{\partial\delta\tau_{yx}}{\partial t} - G\frac{\partial\delta U_y}{\partial x} = 0. \tag{47}$$

Эти уравнения распадаются на две системы уравнений: уравнения (43), (44) и (45) – первая система, и уравнения (46), (47) – вторая система. Запишем уравнения (43) – (45) в характеристической форме. Для этого умножим (44) на λ, (45) – на μ, где λ и μ – пока неопределенные множители, и сложим

$$\lambda\rho_0\frac{\partial\delta U_x}{\partial t} + \left(\rho_0 C_0^2 - \frac{4}{3}\mu G\right)\frac{\partial\delta U_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta P}{\partial t} + \lambda\frac{\partial\delta P}{\partial x} + \mu\frac{\partial\delta S_{xx}}{\partial t} - \lambda\frac{\partial\delta S_{xx}}{\partial x} = 0. \tag{48}$$

Характеристические направления трех, входящих в (48) характеристических операторов, совпадают при $\mu = -1$ и $\lambda = \pm\sqrt{C_0^2 + \frac{4}{3}\frac{G}{\rho_0}}$ и определяются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{C_0^2 + \frac{4}{3}\frac{G}{\rho_0}}. \tag{49}$$

Эта величина называется скоростью звука продольных упругих возмущений и обозначается C_L. Рассмотрим далее систему уравнений (46), (47). Умножим (46) на неопределенный множитель λ и сложим с (47)

$$\lambda\rho_0\frac{\partial\delta U_y}{\partial t}-G\frac{\partial\delta U_y}{\partial x}+\frac{\partial\delta\tau_{yx}}{\partial t}-\lambda\frac{\partial\delta\tau_{yx}}{\partial x}=0. \tag{50}$$

Характеристические направления двух, входящих в (50) характеристических операторов, совпадают при $\lambda=\pm\sqrt{\frac{G}{\rho_0}}$ и определяются уравнением

$$\frac{dx}{\partial t}=\pm\sqrt{\frac{G}{\rho_0}}.$$

Эта величина называется скоростью звука поперечных упругих возмущений и обозначается C_s. Окончательно имеем

$$C_L^2=C_0^2+\frac{4}{3}\frac{G}{\rho_0},\, C_s^2=\frac{G}{\rho_0}. \tag{51}$$

Величина C_0 выражается через C_L и C_s из (51)

$$C_0^2=C_L^2-\frac{4}{3}C_s^2.$$

3. Многокомпонентные среды

Рассмотрим одномерное течение многокомпонентной среды с плоской симметрией. В этом случае законы сохранения массы и количества движения, учитывающие парные и кластерное взаимодействия [4], принимают вид

$$\frac{\partial\alpha_i\rho_i}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_i\rho_i U_i}{\partial x}=0, \tag{52}$$

$$\frac{\partial\alpha_i\rho_i U_i}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_i\rho_i U_i^2}{\partial x}+\frac{\partial\alpha_i\left(P_i+F_i\right)}{\partial x}=R_i, \tag{53}$$

где i – номер компонента, α_i – объемная концентрация i-го компонента, F_i – функция кластерного взаимодействия i-го компонента со смесью, определяемая согласно [4] уравнением

$$F_i=-\frac{1}{2}\rho_i\left(U-U_i\right)^2. \tag{54}$$

В уравнении (54) U – скорость смеси

$$U=\sum\eta_i U_i,$$

η_i – массовая концентрация i-го компонента, связанная с α_i соотношением

$$\eta_i\rho=\alpha_i\rho_i,$$

ρ – плотность смеси

$$\rho=\sum\alpha_i\rho_i.$$

Свойства каждого i-го компонента определяются уравнением состояния

$$P_i=P_i\left(\rho_i,\, S_i\right), \tag{55}$$

где S_i – энтропия i-го компонента. В соответствии с формулой Лапласа производная $\left(\frac{\partial P_i}{\partial\rho_i}\right)_{S_i}$ определяет скорость звука i-го компонента

$$C_i^2 = \left(\frac{\partial P_i}{\partial \rho_i}\right)_{S_i}.$$

С помощью (52) преобразуем (53) в уравнение движения

$$\alpha_i \rho_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \alpha_i \rho_i U_i \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i \left(P_i + F_i\right)}{\partial x} = 0, \tag{56}$$

а уравнение (52) запишем в виде

$$\rho_i \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x}\right) + \alpha_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x}\right) + \alpha_i \rho_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0. \tag{57}$$

Продифференцируем (55) по t и по x и с помощью полученных зависимостей производных

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = C_i^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial t},\ \frac{\partial P_i}{\partial x} = C_i^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial x}$$

преобразуем (57) к виду

$$\rho_i \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x}\right) + \frac{\alpha_i}{C_i^2} \cdot \left(\frac{\partial P_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial P_i}{\partial x}\right) + \alpha_i \rho_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0. \tag{58}$$

Следуя [5], запишем такие же уравнения для смеси

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \left(P - F\right)}{\partial x} = 0, \tag{59}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \tag{60}$$

Уравнения (59), (60) не содержат производной $\frac{\partial P}{\partial t}$, поэтому невозможно скомбинировать характеристический оператор функции P. Это станет возможным, если заменить производные $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ производными $\frac{\partial P}{\partial t}$ и $\frac{\partial P}{\partial x}$, как это было сделано для каждого компонента. Однако, в соответствии с [6, 7] смесь не имеет уравнения состояния. Давление P, плотность ρ и энтропия S смеси выражаются через P_i, ρ_i, S_i, α_i и η_i компонентов с помощью суммирований

$$P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i,\ \rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i,\ S = \sum_{i=1}^{N} \eta_i S_i.$$

Попытки продифференцировать P по ρ при $S = \text{const}$ при $N > 2$ наталкиваются на непреодолимые трудности. Именно поэтому все попытки определения скорости звука смеси ограничивались случаем только двух компонентов [6–9]. Будем считать, что слабый (акустический) сигнал в смеси распространяется с некоторой скоростью C, которая может быть измерена экспериментально как отношение пройденного сигналом расстояния Δx ко времени Δt. Предположим, что скорость звука смеси удовлетворяет уравнению (9). Это позволяет заменить в уравнении (60) производные $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ производными $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, в результате чего в уравнениях появляется возможность сконструировать характеристические операторы функций P и U. После этого выразим эту виртуальную скорость звука через C_i и α_i. Критерием правильности такого выражения будет малое отличие $C\left(C_i,\ \alpha_i\right)$ от экспериментального значения C.

Рассмотрим находящуюся в равновесном состоянии смесь, каждый компонент которой характеризуется следующими величинами: $\rho_{i0} = \text{const}$, $P_{i0} = P_0 = \text{const}$, $U_{i0} = 0$, $S_{i0} = \text{const}$, $\eta_{i0} = \text{const}$, $\alpha_{i0} = \text{const}$, $F_{i0} = 0$, $C_{i0} = \text{const}$. Сформулируем систему упрощающих гипотез, в рамках которой перейдем от уравнений (56), (58) – (60) к уравнениям, содержащим малые возмущения всех входящих в них величин:

1. Звук является малым возмущением: $f = f_0 + \delta f$, $f_i = f_{i0} + \delta f_i$, где f и f_i – это общее обозначение величин, входящих в (36), (58) – (60).

2. Звук обратим: $\delta S = 0$, $S = S_0$, $\delta S_i = 0$, $S_i = S_{i0}$.

3. Время релаксации давлений равно нулю: $\delta P_i = \delta P$.

4. Все $\delta\alpha_i$ и $\delta\eta_i$ $(i = 1, 2...N)$ имеют одинаковый знак.

Следствия 4-го условия и уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \sum_{i=1}^{N} \eta_i = 1$$

имеют вид

$$\delta\alpha_i = 0, \quad \alpha_i = \alpha_{i0}, \quad \delta\eta_i = 0, \, \eta_i = \eta_{i0}.$$

После перехода к малым возмущениям при $U_{i0} = U_0 = 0$ уравнения (56), (58) – (60) принимают вид

$$\rho_{i0} \frac{\partial \delta U_i}{\partial t} + \frac{\partial \delta P_i}{\partial x} = 0, \tag{61}$$

$$\frac{\partial \delta P_i}{\partial t} + \rho_{i0} C_{i0}^2 \frac{\partial \delta U_i}{\partial x} = 0, \tag{62}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta U}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial x} = 0, \tag{63}$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} + \rho_0 C_0^2 \frac{\partial \delta U}{\partial x} = 0. \tag{64}$$

После перехода в уравнениях (61), (62) и (63), (64) к характеристической форме, получим:

1. Вдоль характеристик компонентов

$$\frac{dx}{dt} = \pm C_{i0}$$

выполняются уравнения

$$\frac{d\delta P_i}{dt} \pm \rho_{i0} C_{i0} \frac{d\delta U_i}{dt} = 0, \tag{65}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \pm C_{i0} \frac{\partial}{\partial x}.$$

2. Вдоль характеристик смеси

$$\frac{dx}{dt} = \pm C_0$$

выполняются уравнения

$$\frac{d\delta P}{dt} \pm \rho_0 C_0 \frac{d\delta U}{dt} = 0, \tag{66}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \pm C_0 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Проинтегрировав (65), получим

$$\delta P_i + \rho_{i0} C_{i0} \delta U_i = R_i = \mathrm{const},$$

$$\delta P_i - \rho_{i0} C_{i0} \delta U_i = Z_i = \mathrm{const}.$$

Будем рассматривать бегущую вправо волну, на которой $Z_i = 0$. Следовательно,

$$\delta U_i = \frac{1}{\rho_{i0} C_{i0}} \delta P_i. \tag{67}$$

Проинтегрировав (66), получим на бегущей вправо волне

$$\delta U = \frac{1}{\rho_0 C_0} \delta P. \tag{68}$$

После линеаризации уравнения

$$U = \sum_{i=1}^{N} \eta_i U_i$$

получается связь δU и δU_i в виде

$$\delta U = \sum_{i=1}^{N} \eta_{i0} \delta U_i. \tag{69}$$

Умножим (67) на η_{i0}, просуммируем по i и вместе с (68) подставим в (69). В результате получим

$$\frac{1}{\rho_0 C_0} \delta P = \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_{i0}}{\rho_{i0} C_{i0}} \, \delta P_i. \tag{70}$$

Поскольку $\delta P_i = \delta P$, а $\eta_{i0} = \alpha_{i0}\, \rho_{i0}/\rho_0$, то из (70) следует зависимость скорости звука смеси C_0 от скоростей звука и концентраций компонентов

$$\frac{1}{C_0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_{i0}}{C_{i0}}\,. \tag{71}$$

Это выражение принципиально отличается от широко применяемого [6–9] в течение более полувека уравнения

$$\frac{1}{\rho_0 C_0^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\rho_{i0}\, C_{i0}^2}\,.$$

Аргументом в пользу уравнения (71) является то, что оно получено единообразно со скоростями распространения малых возмущений в идеальных и неидеальных (упругих) средах.

Для получения еще одного аргумента в пользу зависимости (71) рассмотрим смесь в виде набора плоских слоев – компонентов. Каждый i-й слой имеет массу Δm_i, а вся смесь

– массу $\Delta m = \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta m_i$, При распространении плоской ударной волны по слоистой системе каждый i-й слой ударная волна проходит со скоростью W_i за время Δt_i

$$\Delta t_i = \frac{\Delta m_i}{W_i}. \tag{72}$$

От одной границы смеси до другой ударная волна пройдет за время Δt

$$\Delta t = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i. \tag{73}$$

Определим среднюю скорость ударной волны в смеси уравнением

$$W = \Delta m / \Delta t. \tag{74}$$

Подставив Δt_i из (72) и Δt из (74) в (73) получим уравнение

$$\frac{\Delta m}{W} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{W_i}. \tag{75}$$

Отношение Δm_i к Δm есть массовая концентрация η_i. Из теории ударных волн известно, что

$$W = \rho \left(D - U \right), \, W_i = \rho_i \left(D_i - U_i \right). \tag{76}$$

Звуковое возмущение является бесконечно слабым. На бесконечно слабой ударной волне

$$D = U + C, \; D_i = U_i + C_i. \tag{77}$$

Из (75) – (77) следует, что на звуковой волне

$$\frac{1}{\rho C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_i}{\rho_i C_i}. \tag{78}$$

Подставив $\eta_i = \alpha_i \rho_i / \rho$ в (78) и сократив общие множители получим уравнение (71).

Наконец, в качестве еще одного аргумента в пользу уравнения (71) по программе ВОЛНА [10] было рассчитано распространение ударной волны по слоистой системе из плоских слоев вольфрама и парафина. УРС парафина и вольфрама были взяты в виде

$$P = \left(\gamma - 1 \right) \rho E + \frac{\rho_{0k} C_{0k}^2}{n} \left(\frac{n - \gamma}{n - 1} \delta^n + \frac{\left(\gamma - 1 \right) n}{n - 1} \delta - \gamma \right).$$

В таблице приведены параметры УРС и начальные характеристики вольфрама и парафина при $P_0 = 10^{-4}$ ГПа, $T_0 = 293\,K$.

Таблица

Вещество	ρ_{0k} г/см^3	C_{0k} км/с	γ	n	ρ_0 г/см^3	E_0 кДж/г	C_0 км/с
W	19,35	4,051	2,67	3,6	19,2	0,07650	4,036
$C_{22}H_{46}$	0,930	3,357	1,667	3,5	0,91	0,364444	3,328

Расчеты для разных значений α_w проводились на сходимость по числу пар слоев и по стремящейся к нулю амплитуде начального возмущения. Результаты расчетов с точностью 6 знаков совпадают с расчетом C по формуле (71).

Работа поддержана РФФИ. Грант 13-01-00072.

Литература

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Техтеорлит, 1957. – 784 с.
2. Куропатенко, В.Ф. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках / Б.Л. Глушак, В.Ф. Куропатенко, С.А. Новиков. – Новосибирск: Наука, 1992. – 294 с.
3. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М.: Высш. шк., 1988. – 512 с.
4. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физ. журн. – 2011. – Т. 84, №1. – С. 74–92.
5. Куропатенко, В.Ф. Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах / В.Ф. Куропатенко // Прикладная механика и техн. физика. – 2005. – Т. 46, №1. – С. 7–15.
6. Wood, A.B. Textbook of Sound / A.B. Wood. – London: Bell&Sons Ltd, 1941.
7. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
8. Кутателадзе, С.С. Теплообмен и волны в газожидкостных системах / С.С. Кутателадзе, В.Е. Накоряков. – Новосибирск: Наука, 1984. – 301 с.
9. Лобойко, Б.Г. Сборник задач по газодинамике взрыва / Б.Г. Лобойко, О.Ю. Диков, Е.Б. Смирнов. – Снежинск: РФЯЦ–ВНИИТФ, 2006. – 249 с.
10. Комплекс программ «ВОЛНА» и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред / В.Ф. Куропатенко, Г.В. Коваленко, В.И. Кузнецова, Г.И. Михайлова, Г.Н. Сапожникова // Вопр. атомной науки и техники. Сер. «Математическое моделирование физических процессов». – 1989. – Вып. 2. – С. 9–17.

Валентин Федорович Куропатенко, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Российского федерального ядерного центра – Всероссийского научно-исследовательского института технической физики им. академика Е.И. Забабахина, (г. Снежинск, Российская Федерация), v.f.kuropatenko@rambler.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 1, pp. 43–55.

MSC 76T30

Propagation of Weak Signals Through Continua

V.F. Kuropatenko, Russian Research Institute of Technical Physics, Academician E.I. Zababakhin, Snezhinsk, Russian Federation, v.f.kuropatenko@rambler.ru

The paper considers a method of determining the velocity of weak signals in different media – ideal, non-ideal (nonzero stress deviator), and multi-component. As for the ideal media, the placeLaplace's formula for sound velocity

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S$$

has long been such a widely used expression that it is understood as a definition of sound velocity. It is shown here that the formula is not a definition, but corollary from the consideration of mass, momentum and energy conservation laws in case of small perturbations in a medium described by an arbitrary equation of state. A similar consideration for an elastic isotropic medium gives expressions for longitudinal and transverse perturbation velocities dependent on the properties of solids. These relationships are studied rather well in the theory of elasticity though some papers on continuum mechanics provide somewhat different formulas for longitudinal and transverse perturbation velocities versus hydrodynamic sound velocity. Their consideration here was caused by the need to demonstrate universality of the method.

Finally, for multi-component media, an equation for sound velocity is provided; it is principally different from what is widely used. The new equation is validated. It expresses sound velocity in a mixture versus sound velocities and concentrations of its components.

Keywords: mathematical model, sound velocity, ideal medium, mixture, elasticity, concentration, equation of state.

References

1. Loytzyansky L.G. *Fluid Mechanics.* Moscow, TEKHTEORLIT, 1957. 784 p. (in Russian)
2. Kuropatenko V.F., Glushak B.L., Novikov S.A. *Strength of Materials under Dynamic Loads.* Novosibirsk, NAUKA, 1992. 294 p. (in Russian)
3. Bezukhov N.I. *Foundations of Elasticity, Plasticity and Creep Theory.* Moscow, Vysshaya shkola, 1988. 512 p. (in Russian)
4. Kuropatenko V.F. New Models of Continuum Mechanics. *Engineering Physics J.*, 2011, vol. 84, no. 1, pp. 74–92.
5. Kuropatenko V.F. Momentum and Energy Exchange in Non-Equilibrium Multi-Component Media. *Applied Mechanical and Engineering Physics J.,* 2005, vol. 46, no. 1, pp. 7–15.
6. Wood A.B. *Textbook of Sound.* London, Bell&Sons Ltd, 1941.
7. Loytzyansky L.G., *Fluid Mechanics.* Moscow, NAUKA, 1973. 640 p. (in Russian)
8. Kutateladze S.S. *Heat Exchange and Waves in Fluid Systems.* Novosibirsk, NAUKA, 1984. 301 p. (in Russian)
9. Loboyko B.G., Dikov O.Y., SmirnovE.B. *Explosion Hydrodynamics Problem Book.* Snezhinsk, RFNC-VNIITF, 2006. 249 p. (in Russian)
10. Kuropatenko V.F., Kovalenko G.V., Kuznetsova V.I., Mikhaylova G.I., Sapozhnikova G.N. ≪Wave≫ Code and Inhomogeneous Difference Method for Simulating Non-Equilibrium Compressible Continuum Flows. *Problems in Nuclear Science and Engineering Journal, Series: Mathematical Modeling of Physical Processes,* 1989, issue 2, pp. 9–17. (in Russian)

Поступила в редакцию 7 ноября 2012 г.