

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО КУРСА ЯХТЫ

В.И. Ухоботов, И.В. Цеунова

GAME PROBLEM OF THE BEST YACHT COURSE CHOICE

V.I. Ukhobotov, I.V. Tseunova

Рассматривается задача об управлении яхты с переменным ветром. Задача рассматривается в виде дифференциальной игры. Второй игрок управляет ветром.

Ключевые слова: управление, дифференциальная игра, игрок

The authors handle a problem of controlling a yacht in the baffling wind conditions. The problem is analyzed in the form of differential game. The second player controls the wind.

Keywords: management, differential game, player

1. Постановка задачи

В известной задаче выбора наилучшего курса яхты скорость яхты зависит от угла, который образует курс яхты и направление ветра. При постоянной по направлению и по величине скорости ветра в [1] рассмотрена конкретная модель такой зависимости. Исследуется задача, когда выгоднее идти галсами, чем прямо по заданному курсу.

Если рассматривать случай, когда вектор скорости v ветра может меняться, находясь в некотором множестве V , то вектор скорости u яхты можно выбирать из некоторого множества $U(v)$, зависящего от скорости ветра. Цель управления яхтой заключается в том, чтобы побыстрее вывести ее на заданное множество Z (например, причалить к острову). В каждый момент времени скорость ветра считается известной.

Рассмотренный пример является частным случаем задачи управления с помехой

$$z^* = -u, \quad z \in R^n, \quad u \in U(v) \subset R^n, \quad v \in V. \quad (1.1)$$

Здесь V -множество произвольной природы; при каждом $v \in V$ множество $U(v)$ является непустым компактом в R^n . Считаем, что ограниченным является множество

$$K = \bigcup_{v \in V} U(v). \quad (1.2)$$

Первый игрок, выбирая управление $u \in U(v)$, стремится побыстрее осуществить встречу

$$z(t) \in Z, \quad (1.3)$$

где Z является выпуклым и замкнутым множеством в R^n . Второй игрок, выбирая управление $v \in V$, стремится сделать время встречи (1.3) как можно дольше.

Будем рассматривать игру, когда управление первого игрока строится в зависимости от реализовавшегося в момент времени t состояния $z(t)$ и от значения в этот момент времени

управления $v(t)$ второго игрока. Будем строить управление первого игрока так, чтобы они допускали движение галсами [1].

Будем предполагать, что изменение управления $v(t)$ с течением времени меняется не очень сильно. Чтобы строго сформулировать это допущение введем, в рассмотрение евклидов шар S в R^n единичного радиуса и с центром в начале координат. Требование на $v(t)$ запишем в следующем виде: для любого отрезка $[0, p]$ существует число $L > 0$ такое, что

$$U(v(t)) \subset U(v(\tau)) + L(\tau - t)S \quad \text{при } 0 \leq t < \tau \leq p. \quad (1.4)$$

Под управлением $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ первого игрока понимаем правило, которое каждому состоянию $t \geq 0, z \in R^n$ и любому $v \in V$ ставит в соответствие конечный набор

$$u_s = u_s(t, z, v) \in U(v), \quad s = 1, \dots, k = k(t, z, v), \quad \lambda_s = \lambda_s(t, z, v) > 0, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1. \quad (1.5)$$

Движение системы (1.1) будем определять с помощью ломаных. Пусть заданы начальное состояние $t_0 \geq 0, z_0 = z(t_0) \in R^n$ и конечный момент времени $p > t_0$. Возьмем разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{l+1} = p \quad (1.6)$$

с диаметром

$$d(\omega) = \max_{0 \leq i \leq l} (t_{i+1} - t_i). \quad (1.7)$$

Построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int_{t_i}^t u_i^*(r) dr, \quad t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = \overline{0, l}. \quad (1.8)$$

Здесь обозначено $u_i^*(r) = u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$ при $t_i^{(s-1)} < r \leq t_i^{(s)}, s = 1, \dots, k(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$,

$$t_i^{(0)} = t_i, \quad t_i^{(s)} = t_i + (t_{i+1} - t_i) \sum_{q=1}^s \lambda_q. \quad (1.9)$$

Содержательный смысл управлений (1.9) следующий. С помощью чисел λ_s первый игрок разбивает отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ точками $t_i = t_i^{(0)} < t_i^{(1)} < \dots < t_i^{(s)} < \dots < t_i^{(k)} = t_{i+1}$ и на каждом из промежутков $(t_i^{(s-1)}, t_i^{(s)})$ движется с постоянной скоростью $u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$. Управление второго игрока постоянно на промежутке $(t_i^{(s-1)}, t_{i+1}^{(s)})$ и равно $v(t_i)$.

Из ограниченности множества (1.2) следует, что все ломаные (1.8) удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой. Следовательно, семейство ломаных (1.8) удовлетворяет условию теоремы Арцела[2]. Под движением системы (1.1) с управлением (1.5) и с начальным условием $z(t_0) = z_0$ понимаем любую функцию $z : [t_0, p] \rightarrow R^n$, которая является пределом равномерно сходящейся на отрезке $[t_0, p]$ последовательности ломаных (1.8), у которых диаметр разбиения стремится к нулю.

Отметим, что

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i^*(r) dr = (t_{i+1} - t_i) \sum_{s=1}^k \lambda_s u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i)). \quad (1.10)$$

2. Оператор программного поглощения и его свойства

Следуя [3], введем для игры (1.1) оператор программного поглощения D_σ . Пусть $X \subset R^n$, $\sigma \geq 0$. Точка $z \in D_\sigma(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $v \in V$ найдется измеримое управление $u : [0, \sigma] \rightarrow U(v)$ такое, что $z - \int_0^\sigma u(r)dr \in X$ при некотором $0 \leq t \leq \sigma$.

Для любого ограниченного множества $F \subset R^n$ и для любого отрезка $[a, b] \subset R$ имеет место формула [4]

$$\left\{ \int_a^b f(r)dr \mid f : [a, b] \rightarrow F \text{ -- измерима} \right\} = (b - a)coF. \quad (2.1)$$

Здесь посредством coF обозначена выпуклая оболочка множества F .

Будем использовать операции сложения множеств X и Y из R^n и умножение множества X на число a

$$X + Y = \{z = x + y : x \in X, y \in Y\}, \quad aX = \{z = ax : x \in X\}.$$

С учетом этих формул, а также формулы (2.1), оператор программного поглощения принимает вид

$$D_\sigma(X) = \bigcap_{v \in V} \bigcup_{0 \leq \tau \leq 1} (X + \sigma \tau coU(v)). \quad (2.2)$$

Этот оператор обладает следующими свойствами.

Свойство 2. 1. $D_0(X) = X$.

Свойство 2. 2. Если $0 \leq \delta \leq \sigma$, $X \subset Y$, то $D_\delta(X) \subset D_\sigma(Y)$.

Свойство 2. 3. $D_\sigma(X + Y) \supset D_\sigma(X) + Y$.

Свойство 2. 4. $D_\delta(D_\sigma(X)) \subset D_{\delta+\sigma}(X)$.

Свойство 2. 5. $D_\sigma(\sigma X) = \sigma D_1(X)$.

Свойство 2. 6. Если X – выпуклое множество, то множество $D_\sigma(X)$ является выпуклым.

Свойство 2. 7. Если X – выпуклое множество, то $D_\delta(D_\sigma(X)) = D_{\delta+\sigma}(X)$.

Свойство 2. 8. Если X – замкнутое множество, то множество $D_\sigma(X)$ является замкнутым.

Свойство 2. 9. Пусть X – замкнутое множество, последовательность $0 \leq \sigma_{k+1} \leq \sigma_k$, $\sigma_k \rightarrow \sigma$ и точка $z \in D_{\sigma_k}(X)$. Тогда $z \in D_\sigma(X)$.

Свойства 2.1 – 2.6 непосредственно следуют из формулы (2.2). При доказательстве свойства 2.7 применим схему доказательства из работы [5]. В силу свойства 2.1 нужно рассмотреть случай $\delta > 0$ и $\sigma > 0$. Обозначим $X_* = (\delta + \sigma)^{-1}X$. Тогда из выпуклости множества X следует равенство $\delta X_* + \sigma X_* = X$. Отсюда, используя свойства 2.2, 2.3 и 2.5, получим

$$\begin{aligned} D_\delta(D_\sigma(X)) &= D_\delta(D_\sigma(\delta X_* + \sigma X_*)) \supset D_\delta(D_\sigma(\sigma X_*) + \delta X_*) \supset \\ &\supset D_\delta(\delta X_*) + D_\sigma(\sigma X_*) = \delta D_1(X_*) + \sigma D_1(X_*) \supset \\ &\supset (\delta + \sigma)D_1(X_*) = D_{\delta+\sigma}((\delta + \sigma)X_*) = D_{\delta+\sigma}(X). \end{aligned}$$

Обратное включение следует из свойства 2.4.

При доказательстве свойств 2.8 и 2.9 используется тот факт, что выпуклая оболочка компакта в R^n является компактом [6, теорема I.1.7].

3. Оптимальное время встречи

Для каждой точки $z \in R^n$ положим $T(z) = +\infty$, если $z \notin D_\sigma(Z)$ при всех $\sigma \geq 0$. В противном случае

$$T(z) = \inf \sigma, \quad \sigma \geq 0, \quad z \in D_\sigma(Z). \quad (3.1)$$

Эта функция обладает следующими свойствами.

Свойство 3. 1. Если $\sigma = T(z) < +\infty$, то $z \in D_\sigma(Z)$.

Свойство 3. 2. $T(z) \geq 0$ при любом $z \in R^n$; $T(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in Z$.

Свойство 3. 3. Функция $T(z)$ является выпуклой.

Доказательство свойства 3.1 следует из замкнутости множества Z и из свойства 2.9 оператора D .

Первая часть свойства 3.2 следует из формулы (3.1). Если $T(z) = 0$, то из свойства 3.1 следует, что $z \in D_0(Z) = Z$. Если же $z \in Z$, то равенство $T(z) = 0$ очевидно.

Докажем свойство 3.3. Возьмем точки $z_i \in R^n$, $i = 1, 2$, у которых $\sigma_i = T(z_i) < +\infty$. Тогда из свойства 3.1 и из формулы (2.2) следует, что для любой точки $v \in V$ найдутся числа $0 \leq \tau_i \leq 1$, $i = 1, 2$, такие, что $z_i \in Z + \sigma_i \tau_i coU(v)$, $i = 1, 2$. Возьмем числа $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда из предыдущего включения, используя выпуклость множеств Z и $coU(v)$, получим

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in Z + (\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2) \tau coU(v), \quad \tau = \frac{\lambda_1 \sigma_1}{\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2} \tau_1 + \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2} \tau_2 \in [0, 1].$$

Отсюда и из формулы (3.1) получим, что $T(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \leq \lambda_1 T(z_1) + \lambda_2 T(z_2)$.

Утверждение 3. 1. Пусть начальное состояние $z(0) = z_0 \in Z$. Тогда для любого числа $0 < p < T(z_0)$ существует точка $v \in V$ такая, что постоянное управление второго игрока $v(t) = v$ при всех $0 \leq t \leq p$ обеспечивает для любого управления (1.5) первого игрока выполнение условия

$$z(t) \in Z \text{ при всех } 0 \leq t \leq p. \quad (3.2)$$

Доказательство. Поскольку $z_0 \in D_p(Z)$, то из формулы (2.2) следует, что найдется точка $v \in V$, для которой

$$z_0 \in Z + t coU(v) \text{ при всех } 0 \leq t \leq p. \quad (3.3)$$

Из формул (1.8) и (1.9) следует, что при $v(t) = v$ каждая ломаная удовлетворяет равенству

$$z_\omega(t) = z_0 - tu(t) \text{ при некотором } u(t) \in coU(v).$$

Следовательно, аналогичному равенству удовлетворяет и любое движение $z(t)$. Отсюда и из (3.3) получим (3.2). \square

4. Построение управления первого игрока

При построении управления первого игрока, обеспечивающего встречу (1.3) из начального состояния $z(0) = z_0$ к моменту $T(z_0)$, воспользуемся схемой из работы [7].

Лемма 4. 1. Пусть $z \in D_{\delta+\sigma}(Z)$ при $\delta > 0$ и $\sigma > 0$. Тогда для любой точки $v \in V$ существует точка $u \in coU(v)$ такая, что либо

$$z - \delta u \in D_\sigma(Z), \quad (4.1)$$

либо при некотором $0 \leq t \leq \delta$

$$z - tu \in Z. \quad (4.2)$$

Доказательство. Из формулы (2.2) и из свойства 2.7 отображения D следует, что для точки $v \in V$ непустым является множество чисел

$$0 \leq t \leq \delta, \quad z \in D_\sigma(Z) + tcoU(v). \quad (4.3)$$

Обозначим через t_0 верхнюю грань таких чисел t . Из замкнутости множества $D_\sigma(Z)$ и из компактности множества $coU(v)$ следует, что включение (4.3) выполнено при $t = t_0$. Если $t_0 = \delta$, то из (4.3) следует (4.1)

Пусть $0 \leq t_0 < \delta$. Возьмем число $0 < \gamma < \delta - t_0$, чтобы $j\gamma = \sigma$ при некотором целом $j > 1$. Тогда из включения (4.3) при $t = t_0$ получим, что

$$z - t_0 u_1 \in D_{j\gamma}(Z) = D_\gamma(D_{(j-1)\gamma}(Z))$$

при некотором $u_1 \in coU(v)$. Отсюда следует, что найдется число $0 \leq t_1 \leq \gamma$ такое, что

$$z - t_0 u_1 \in D_{(j-1)\gamma}(Z) + t_1 coU(v).$$

Отсюда, используя свойство 2.2 отображения D , получим, что при $t = t_0 + t_1$ выполнено включение (4.3). Поскольку число t_0 является верхней гранью чисел t , удовлетворяющих (4.3), то $t_1 = 0$. Продолжая этот процесс дальше, найдем точку $u \in coU(v)$ такую, что при $t = t_0$ будет выполнено включение (4.2). \square

Теорема 4. 1. *Пусть начальное состояние z_0 такое, что $p = T(z_0) < +\infty$. Тогда существует управление (1.4) первого игрока такое, что для любого управления $v(t)$ второго игрока будет выполнено включение (1.3) при некотором $t \leq p$.*

Доказательство. Обозначим

$$U_0(v) = \{z = u - u_* : u \in coU(v), u_* \in coU(v)\}. \quad (4.4)$$

При каждого $z \in R^n$, $0 \leq t \leq p$, $v \in V$ положим

$$\varepsilon(t, z, v) = \min \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0, \quad z \in D_{p-t}(Z) + \varepsilon U_0(v) + \varepsilon S. \quad (4.5)$$

Множество $D_{p-t}(Z)$ является замкнутым, а множества $U_0(v)$ и S – компакты. Поэтому включение (4.5) выполнено при $\varepsilon = \varepsilon(t, z, v)$. Из определения множества (4.4) следует, что

$$z + \varepsilon(t, z, v)(u_*(t, z, v) - u(t, z, v)) \in D_{p-t}(Z) + \varepsilon(t, z, v)S \quad (4.6)$$

при некоторых $u_*(t, z, v) \in coU(v)$ и $u(t, z, v) \in coU(v)$.

По теореме Каратеодори [6, теорема I.1.1]

$$\begin{aligned} u(t, z, v) &= \sum_{s=1}^k \lambda_s(t, z, v) u_s(t, z, v), \quad \lambda_s(t, z, v) > 0, \\ \sum_{s=1}^k \lambda_s(t, z, v) &= 1, \quad u_s(t, z, v) \in U(v). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $k = k(t, z, v) \leq n + 1$. Эти функции берем в качестве управления (1.5) первого игрока.

Пусть в процессе игры реализуется управление $v(t) \in V$ второго игрока, удовлетворяющее условию (1.4). Тогда из формулы (4.4) следует, что включению (1.4) удовлетворяет и многозначная функция $U_0(v(t))$. Отсюда получим, что

$$U_0(v(t)) \subset U_0(v(\tau)) + L(\tau - t)S \text{ при } 0 \leq t < \tau \leq p. \quad (4.8)$$

Возьмем разбиение ω (1.6) и построим ломаную (1.8) с функциями (4.7). Обозначим

$$z_i = z_\omega(t_i), \quad v_i = v(t_i), \quad u^{(i)} = u(t_i, z_i, v_i), \quad u_*^{(i)} = u_*(t_i, z_i, v_i), \quad \varepsilon_i = \varepsilon(t_i, z_i, v_i).$$

Тогда из (4.6) следует, что при $i = 0$ выполнено включение

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} \in D_{p-t_i}(Z) + \varepsilon_i S, \quad (4.9)$$

причем $\varepsilon_0 = 0$. Предположим, что в момент времени t_i , $i < l+1$ выполнено включение (4.9). Тогда, используя лемму 4.1, найдем точку $u \in coU(v_i)$ такую, что либо

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t_{i+1} - t_i)u \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i S, \quad (4.10)$$

либо при некотором $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t - t_i)u \in Z + \varepsilon_i S. \quad (4.11)$$

Рассмотрим случай (4.10). Из формулы (1.10) получим, что $z_{i+1} = z_i - (t_{i+1} - t_i)u^{(i)}$. Отсюда и из (4.10) будем иметь, что

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u^{(i)} + \varepsilon_i u_*^{(i)} - (t_{i+1} - t_i)u \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i S. \quad (4.12)$$

Пусть $t_{i+1} - t_i \geq \varepsilon_i$. Тогда $(t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u^{(i)} + \varepsilon_i u_*^{(i)} \in (t_{i+1} - t_i)coU(v_i)$. Отсюда и из (4.12) получим, что

$$z_{i+1} \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + (t_{i+1} - t_i)U_0(v_i) + \varepsilon_i S \subset D_{p-t_{i+1}}(Z) + (t_{i+1} - t_i)U_0(v_{i+1}) + (\varepsilon_i + L|t_{i+1} - t_i|^2)S.$$

Здесь было использовано включение (4.8). Отсюда и из (4.5) следует, что

$$\varepsilon_{i+1} \leq (t_{i+1} - t_i)(1 + L(t_{i+1} - t_i)).$$

Пусть $t_{i+1} - t_i < \varepsilon_i$. Тогда

$$(\varepsilon_i - t_{i+1} + t_i)u^{(i)} + (t_{i+1} - t_i)u \in \varepsilon_i coU(v_i)$$

и, как следует из (4.12) и (4.8),

$$\begin{aligned} z_{i+1} &\in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i U_0(v_i) + \varepsilon_i S \subset \\ &\subset D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i U_0(v_{i+1}) + (\varepsilon_i + L(t_{i+1} - t_i)\varepsilon_i)S. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.5) следует неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_i(1 + L(t_{i+1} - t_i)).$$

Объединяя оба случая, будем иметь, что включение (4.9) выполнено при $i+1$, причем

$$\varepsilon_{i+1} \leq \max(t_{i+1} - t_i; \varepsilon_i)(1 + L(t_{i+1} - t_i)). \quad (4.13)$$

Поскольку $\varepsilon_0 = 0$, то из этого неравенства следует, что для всех t_i , для которых выполняется включение (4.10), будет выполнено

$$\varepsilon_{i+1} \leq d(\omega)e^{Lt_i}. \quad (4.14)$$

Обозначим

$$U_0 = \text{co} \bigcup_{v \in V} U_0(v).$$

Из ограниченности множества (1.2) следует ограниченность множества U_0 .

Пусть включение (4.10) выполнено для всех $i \leq l$. Тогда из (4.5) и (4.14) следует, что

$$z_\omega(p) \in Z + \delta(\omega)(U_0 + S), \quad \delta(\omega) = d(\omega)e^{pL}. \quad (4.15)$$

Рассмотрим случай, когда для какого-то $i \leq l$ выполнено включение (4.11). На отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ реализуется управление $u_i^*(r) \in U(v_i)$, которое определяется формулами (1.9). Из (4.11) и (1.8) следует, что

$$z_\omega(t) + \int_{t_i}^t u_i^*(r)dr + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t - t_i)u \in Z + \varepsilon_i S.$$

Поскольку

$$\int_{t_i}^t u_i^*(r)dr \in (t - t_i)\text{co}U(v_i),$$

то из предыдущего включения получим, что

$$z_\omega(t) \in Z + (t - t_i + \varepsilon_i)(U_0 + S) \subset Z + d(\omega)(1 + e^{pL})(U_0 + S). \quad (4.16)$$

Отсюда и из (4.15) следует, что для каждой ломаной (1.8) найдется число $0 \leq t(\omega) \leq p$ такое, что при $t = t(\omega)$ выполнено включение (4.16).

Пусть последовательность ломаных $z_{\omega_k}(t)$ с диаметром разбиения $d(\omega_k) \rightarrow 0$ равномерно на отрезке $[0, p]$ сходится к движению $z(t)$. Для каждой ломаной в точке $t = t(\omega_k)$ выполнено включение (4.16). Можно считать, что $t(\omega_k) \rightarrow t_*$ (иначе перейдем к последовательности). Из равномерной сходимости ломаных следует, что $z_{\omega_k}(t(\omega_k)) \rightarrow z(t_*)$. Отсюда и из включения (4.16) получим, что $z(t_*) \in Z$. \square

Литература

1. Крэггс, Дж.У. Задачи управления движением. Математическое моделирование / Дж.У. Крэггс. – М., 1979. – С. 21 – 34.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М., 1972. – 496 с.
3. Пшеничный, Б.Н. Структура дифференциальных игр / Б.Н. Пшеничный // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 184, № 2. – С. 285 – 287.
4. Hermes, H. The Generalized Differential Equation $\dot{x} \in R(t, x)$ / H. Hermes // Advances in Mathematics. – 1970. – № 4. – P. 149 – 169.
5. Ухоботов, В.И. К вопросу об окончании за первый момент поглощения / В.И. Ухоботов // Прикл. матем. и мех. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 892 – 897.
6. Пшеничный, Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М., 1980. – 320 с.
7. Ухоботов, В.И. Непрерывная игра в пространстве с неполной линейной структурой / В.И. Ухоботов // Теория и системы управления. – 1997. – № 2. – С. 107 – 109.

Кафедра теории управления и оптимизации
Челябинский государственный университет
ukh@csu.ru, iriska-cat@mail.ru

Поступила в редакцию 13 февраля 2009 г.