

## ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

*В.Л. Дильман*

### RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODELS OF THE STRESS CONDITION OF THE THIN-WALLED HETEROGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS BASED ON ANALYTICAL METHODS

*V.L. Dil'man*

Строятся и исследуются аналитическими методами математические модели напряженных состояний тонкостенных цилиндрических оболочек, продольных, поперечных и спиральных менее прочных слоев (прослоек) в них, в том числе содержащих дефекты, более прочных слоев с дефектами, при нагружении оболочек внутренним давлением и осевой силой. Подробно исследуются состояния деформационного, контактного и конструкционного упрочнения этих слоев. На этой основе получены явные аналитические зависимости для вычисления критических напряженных состояний в стенке неоднородной оболочки и критического внутреннего давления.

*Ключевые слова: тонкостенная цилиндрическая оболочка, менее прочный слой, пластическое деформирование, контактное упрочнение, система уравнений в частных производных гиперболического типа*

Using analytical methods the author creates and researches mathematical models of the stress conditions of the thin-walled cylindrical shells, linear, cross and less solid helical layers (interlayers) in them including those ones with defects, as well as more solid layers with defects while loading the shells with internal pressure and axial force. The author minutely researches the state of the deformative, contact and structural hardening of these layers. On this basis the author obtains evident analytical dependences for calculating the extreme stress state in the wall of the heterogeneous shell and extreme internal pressure.

*Keywords: thin-walled cylindrical shell, less solid layer, plastic deformation, local strengthening, partial differential system of the hyperbolic type*

## Введение

### Обозначения и соглашения

В работе используются обычные, принятые в механике твердого тела, обозначения, а также:

$\kappa$  – относительная толщина слоя;

$m$  – коэффициент двухосности нагружения стенки оболочки или листового образца;

$n$  – показатель упрочнения материала;

индекс «0» внизу – значение величины в начальный момент нагружения;

индекс «\*» вверху – значение величины в критический момент;  
индекс «БП» («МП») вверху указывает на отношение данной величины к более прочной (менее прочной) части соединения (для снижения громоздкости формул индекс «МП» в некоторых случаях не ставится).

В работе приняты следующие сокращения.

ТБД – труба большого диаметра; МТП – магистральный трубопровод; ЗТВ – зона термического влияния; ОМ – основной металл; ТЦО – тонкостенная цилиндрическая оболочка; МНС – механически неоднородное соединение; СвС – сварное соединение;

ММ – математическая модель (математические модели); НС – напряженное состояние; НДС – напряженно-деформированное состояние;

МП – менее прочный; БП – более прочный;

ОПУПД – общая потеря устойчивости (процесса) пластического деформирования; ЛПД – локализация пластических деформаций; НСп – несущая способность.

ГППС – гипотеза плоских поперечных сечений; ГПрС – гипотеза продольных сечений; ГРП – гипотеза разделения переменных; МГ – мультипликативная гипотеза;

НПТ – напряжение пластического течения; НПН – напряжение пластической неустойчивости; СПН – среднее предельное напряжение; ТРТ – точка раздела течения;

КСМ – критерий Свифта – Марциньяка.

## Объект изучения

Рассматривается НС ТЦО из упрочняемого материала, подверженных монотонному статическому нагружению внутренним давлением, а также осевой силой, в процессе их пластического деформирования. Оболочки могут быть однородными либо содержать слои (прослойки) из МП материала и расположенные вдоль, поперек или под углом к образующей. Примером таких оболочек являются ТБД, содержащие продольные, спиральные или поперечные (монтажные) СвС. В работе изучается НС МП слоев при их нагружении вплоть до момента начала их пластического течения вследствие *потери устойчивости процесса пластического деформирования* материалом слоя. Внутри МП или БП слоя, на границе между слоем и ОМ или в ОМ соединения могут располагаться дефекты (моделируемые как разрезы нулевой или конечной толщины).

Оболочка считается *тонкостенной*, если выполняются условия: 1) НС предполагается постоянным по толщине оболочки (в ее однородном участке); 2) в частности, напряжения, направленные по нормали к поверхности оболочки, всюду внутри оболочки считаются равными разности внешних давлений (при их равенстве или отсутствии – равными нулю); 3) при исследовании локального участка оболочки, по площади сравнимого с ее толщиной (например, участка, содержащего МП прослойку), кривизной оболочки можно пренебречь; 4) отношение толщины стенки к ее радиусу мало:  $t \ll r$ , что позволяет пренебрегать по сравнению с единицей слагаемыми, имеющими порядок  $t^2/r^2$ .

В инженерных расчетах обычно оболочку принимают тонкостенной, если у нее отношение толщины стенки к ее радиусу составляет величину около 0,05 и менее.

В работе рассматриваются

ММ критических НДС однородных ТЦО из упрочняемых материалов, при их двухосном нагружении; ММ критических НДС МП слоев, содержащихся в ТЦО, при их двухосном нагружении;

ММ НС МП тонких слоев в тонкостенных листовых и трубчатых образцах и влияние МП слоев на НСп содержащих их ТЦО;

ММ НС соединений, содержащих дефекты в МП или БП участках.

## 1. Математические модели критических НДС однородных ТЦО из упрочняемых материалов

Интенсивность напряжений в критический момент нагружения является критериальной величиной, на основе которой можно получать силовые и деформационные критерии несущей способности конструкций в виде явных аналитических выражений, зависящих от их прочностных и геометрических параметров и условий нагружения. Построение и исследование ММ критических НДС ТЦО из упрочняемых материалов основывается на двух принципах: 1) гипотезе П. Людвига (P. Ludwik) о «единой кривой», то есть гипотезе о независимости диаграммы деформирования от вида напряженного состояния при сложном нагружении; 2) критерии Свифта – Марциньяка ОПУПД либо ЛПД оболочки (H.W. Swift, Z. Marciniak, кратко: КСМ).

При использовании деформационной теории диаграмма деформирования имеет вид

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad (1)$$

где  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  – интенсивности напряжений и деформаций. В случае использования теории течения закон деформирования имеет вид  $\sigma_i = f(\bar{\varepsilon}_i)$ , где  $\bar{\varepsilon}_i$  – параметр Одквиста. Среди большого количества известных аппроксимаций зависимости (1) выделяется простотой в использовании степенная функция

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n, \quad (2)$$

где  $A$  и  $n$  – константы материала. К числу наиболее серьезных недостатков аппроксимации диаграммы деформирования (2) можно отнести нелинейность реальных зависимостей для ряда материалов в логарифмических координатах. В работах [1, 2, и др.] предложен ряд уточнений формулы (2), свободных от этого недостатка:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \exp(a\varepsilon_i), \quad (3)$$

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \exp(a\varepsilon_i + b\varepsilon_i^2), \quad (4)$$

$$\sigma_i = A(\varepsilon_i + B)^n \exp(a(\varepsilon_i + B)), \quad \sigma_i = A(\varepsilon_i + B)^n \exp(a(\varepsilon_i + B) + b(\varepsilon_i + B)^2).$$

Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$  – постоянные, характеризующие свойства материала.

Всюду в работе потеря оболочечной конструкцией несущей способности определяется на основе КСМ ОПУПД или ЛПД оболочки. Суть КСМ заключается в следующем [3]. Изменение размеров (во всех направлениях) участка стенки конструкции при возрастании внешних нагрузок приводит к приращению напряжений на этом участке, которые компенсируются за счет упрочнения материала стенки, и в этом случае пластическое деформирование протекает устойчиво. Однако упрочнение происходит по закону, который на стадии развитых пластических деформаций можно аппроксимировать функцией вида (1), где график  $f$  – монотонно возрастающая выпуклая вверх гладкая кривая, а рост напряжений за счет изменения геометрии конструкции в зависимости от деформаций происходит по экспоненте, скорость роста которой выше скорости роста выпуклой вверх функции. Поэтому в какой-то момент упрочнения материала оказывается недостаточно для нейтрализации роста напряжений, связанного с изменением формы. В этот момент, определяемый равенством дифференциалов двух указанных зависимостей, начинается деформирование материала с неконтролируемой скоростью при постоянных или уменьшающихся внешних нагрузках, т. е. начинается ОПУПД данного участка.

Известно, что при действии нескольких независимых внешних нагрузок, критерий экстремума одной из внешних нагрузок для определения неустойчивого состояния может оказаться ошибочным – потеря устойчивости может произойти, когда одна из внешних нагрузок

прошла свой максимум. Можно показать, что если все эффективные силы, действующие на тело, зависят от одного параметра и монотонно изменяются вместе с ним, критерий СМ равносильен критерию экстремума внешней нагрузки.

Рассмотрим ММ НДС ТЦО на основе теории малых деформаций. Этот вопрос подробно изучался в работе [4]. Там предполагалось, что коэффициент  $m$  двухосности нагружения стенки трубы,  $m = \sigma_z/\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  и  $\sigma_\varphi$  – главные напряжения в стенке трубы, осевое и кольцевое соответственно, при постоянном отношении внешних нагрузок ( $N/p = \text{const}$ ) остается постоянным. Вследствие изменения размеров оболочки в процессе деформирования простое нагружение стенки по внешним нагрузкам приводит к сложному по напряжениям. Действительно, из известных соотношений

$$\sigma_z = \frac{Rp}{2t} + \frac{N}{2\pi Rt}; \quad \sigma_\varphi = \frac{Rp}{t}; \quad \sigma_r = 0,$$

где  $R$  и  $t$  – внутренний радиус и толщина стенки оболочки,  $p$  – внутреннее давление,  $N$  – осевая сила, из условия несжимаемости и подобия девиаторов напряжений и деформаций следует

$$(2 - m)\varepsilon_z = (2m - 1)\varepsilon_\varphi, \quad 2m - 1 = (2m_0 - 1) \exp(-2\varepsilon_\varphi) \quad (5)$$

(индекс 0 указывает на начальный момент нагружения,  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_\varphi$  – осевые и кольцевые деформации стенки оболочки). Вторая формула (5) определяет изменение коэффициента  $m$  в зависимости от кольцевой деформации. Из (5) видно, что  $m$  меняется в процессе пластического деформирования трубы, за исключением случая  $m_0 = 0,5$ , когда осевое усилие  $N = 0$ , и случая  $m_0 = 2$ , при котором  $R$  не меняется в процессе деформирования трубы. С учетом непостоянства  $m$  НДС ТЦО на основе теории малых деформаций рассматривалось в [1] и других работах автора. Для вычисления интенсивности напряжений  $\sigma_i$  как функции от интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  понадобятся приведенные ниже приближенные формулы. Они выводятся из формул (5). В работе [1] получены зависимости

$$\sigma_i = \frac{s_0 R_0 p}{t_0} \exp(\alpha \varepsilon_i + \beta \varepsilon_i^2), \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{3}{2s_0} - \frac{(2m_0 - 1)^2(2 - m_0)}{4s_0^3}; \quad \beta = \frac{3(2m_0 - 1)(2 - m_0)(4m_0^3 - 9m_0^2 + 11m_0 - 3)}{16s_0^6}.$$

Из равенства дифференциалов функций (4) и (6), в соответствии с КСМ, следует уравнение для нахождения критического значения интенсивности деформаций  $\varepsilon_i^*$ , соответствующего моменту ОПУЦД, откуда выводится критическое значение интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_i^* = \frac{2n}{\sqrt{(\alpha - a)^2 + 8(\beta - b)n + \alpha - a}}. \quad (7)$$

Это позволяет вычислить критическое значение интенсивности напряжений  $\sigma_i^*$  и критическое давление  $p^*$ , при котором происходит исчерпание несущей способности однородной ТЦО вследствие ОПУЦД. В [1] и других работах автора выводится и анализируется ряд приближенных формул для вычисления критических значений  $\varepsilon_i^*$ ,  $\sigma_i^*$  и  $p^*$ , в том числе при различных аппроксимациях закона упрочнения. Например, при условии (2) или (3) и нагружении ТЦО внутренним давлением получены соответственно формулы

$$p^* = \frac{2}{\sqrt{3}^{n+1}} \frac{t_0}{R_0} \sigma_B \quad \text{или} \quad p^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1 - a}{\sqrt{3} - a} \right)^n \exp\left( \frac{an}{\sqrt{3} - a} \right) \frac{t_0}{R_0} \sigma_B. \quad (8)$$

Анализируя условия, определяющие рабочее давление в действующем трубопроводе по СНиП [5], можно отметить, что отсутствие коэффициента двухосности  $m$  и параметров,

определяющих упрочнение материала, свидетельствуют о том, что принятая в [5] вычислительная схема может быть усовершенствована.

Наряду с ОПУПД неустойчивость пластического деформирования может наступить в форме ЛПД. В работе [1], на основании теории малых деформаций, с использованием КСМ и методики работы [4], но при условии непостоянства параметра  $m$ , вычислены значения критических деформаций, соответствующих моменту ЛПД, в зависимости от параметров  $m_0$  и  $n$ , и установлены условия возникновения осевой или кольцевой шейки в зависимости от тех же величин (под осевой шейкой имеется в виду локальная выпучина с утонением стенки оболочки) получены формулы:

$$\varepsilon_{iz}^{\text{III}} = \frac{2n}{\sqrt{(\alpha_1 - a)^2 + 8(\beta_1 - b)n + \alpha_1 - a}}; \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \frac{2m_0 - 1}{2s_0} \left( \frac{2}{m_0} - \frac{(2m_0 - 1)(2 - m_0)}{2s_0^2} \right);$$

$$\beta_1 = \frac{(2m_0 - 1)(2 - m_0)(8m_0^5 - 29m_0^4 + 35m_0^3 - 19m_0^2 + 4m_0 - 4)}{16s_0^6 m_0^2}.$$

$$\varepsilon_{i\varphi}^{\text{III}} = \frac{2n}{\sqrt{(\alpha_2 - a)^2 + 8(\beta_2 - b)n + \alpha_2 - a}}; \quad (10)$$

$$\alpha_2 = -\frac{(2 - m_0)(2m_0^2 - 2m_0 - 1)}{4s_0^3}; \quad \beta_2 = \frac{(2 - m_0)(2m_0 - 1)(2m_0^3 - 5m_0^2 + 7m_0 - 1)}{16s_0^6}.$$

В ряде частных случаев полученные формулы сводятся к известным. Анализ формул показывает, что в случаях, когда  $0 \leq m \leq 2$ , локализация пластической деформации (появление шейки или выпучины) наступает позже ОПУПД; если  $2 \leq m \leq \infty$ , то этап ОПУПД перед возникновением шейки отсутствует. Формулы (9) и (10) позволяют установить, каким должно быть исходное отношение главных напряжений  $m_0$ , чтобы возникла продольная либо, наоборот, кольцевая шейка. Обозначим пограничное значение  $m_0$  через  $m_0^*$ . Когда  $\varepsilon_{iz}^{\text{III}} < \varepsilon_{i\varphi}^{\text{III}}$ , следует ожидать появления кольцевой шейки, в противном случае – осевой. Показано, что пограничное значение  $m_0^*$ , при котором направление шейки не имеет предпочтений, зависит от показателя упрочнения  $n$  (при упрочнении по формуле (2)). Так, при  $n = 0, 1$   $m_0^* \approx 0, 90$ ; при  $n = 0, 15$   $m_0^* \approx 0, 98$ ; при  $n = 0, 20$  и  $m_0 \approx 1, 06$ ; при  $n = 0, 25$   $m_0^* \approx 1, 12$ . Отсюда следует, что величина  $m_0^*$  не всегда равна единице («парадокс» Е.А. Девиса [6, с. 336 – 363]) и зависит от параметров упрочняемого материала (рис. 1).

Рассмотрим ММ НДС ТЦО на основе теории течения [2]. Отличие этой модели от предыдущей в том, что вместо (5) используется система обыкновенных дифференциальных уравнений

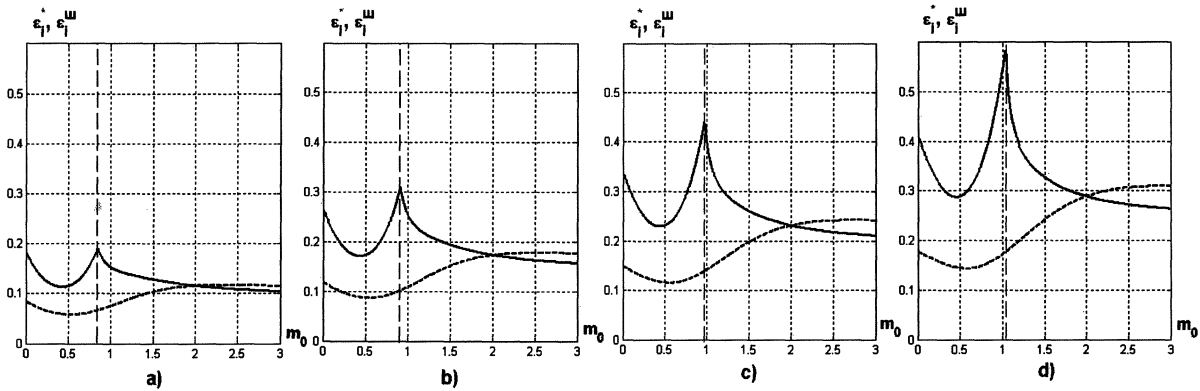
$$\frac{d\varepsilon_z}{2m - 1} = \frac{d\varepsilon_\varphi}{2 - m} = \frac{d\varepsilon_r}{-(m + 1)} = \frac{\overline{d\varepsilon}_i}{2s}, \quad (11)$$

где  $\overline{d\varepsilon}_i$  – интенсивность приращений деформаций. Система (11) приводит к уравнению

$$(2m_0 - 1) \exp(-2\varepsilon_\varphi) + 2(2 - m_0) \exp \varepsilon_z = 3. \quad (12)$$

Раскладывая экспоненты в степенные ряды, в первом приближении можно получить из (12) первое равенство (5) при  $m = m_0$ . Следовательно, для «очень малых» деформаций теория течения приводит в данном случае к одинаковым результатам с теорией малых деформаций. На основе КСМ, когда упрочнение описывается по закону (3), имеет место рекуррентное соотношение

$$\varepsilon_i^* = \frac{2sn}{(2m - 1)^2(m - 2)/2s^2 + 3 - 2as}, \quad s = \sqrt{m^2 - m + 1}. \quad (13)$$



**Рис. 1.** Зависимость от параметра двухосности нагружения  $m_0$  величины критической интенсивности деформаций  $\varepsilon_i^*$ , при которой происходит ОПУПД (пунктирная), и  $\varepsilon_i^{\text{III}}$ , при которой возникает шейка (сплошная): а)  $n = 0, 10$ ; б)  $n = 0, 15$ ; в)  $n = 0, 20$ ; д)  $n = 0, 25$

В общем случае при  $b \neq 0$   $\varepsilon_i^*$  находится из соответствующего квадратного уравнения. Рекуррентность формулы (13) заключается в том, что параметры  $m$  и  $s$  зависят от  $\varepsilon_i$ . Для параметра  $m$  в важном для приложений диапазоне  $0,5 \leq m \leq 2,5$  получена оценка (приводим вариант с ошибкой порядка 1%)

$$m \approx m_0 - 0,3(2 - m_0)(2m_0 - 1)\varepsilon_i,$$

что позволяет получить явную приближенную формулу для вычисления  $\varepsilon_i^*$ .

В работе [2] получены, на основе теории течения, аналитические рекуррентные выражения для вычисления деформаций, при которых наступает ЛПД. Например, при  $a = 0$ ,  $\tilde{m}_0^* = 1 + 0,4n + 0,24n^2$  (поправка при втором приближении – от нескольких тысячных до двух сотых). Ограничиваясь первым приближением, можем заметить, что смена направления разрушения происходит при  $m_0 = 1,1 \dots 1,2$ . Полученные результаты объясняют не только эффект Дэвиса, но и различие экспериментальных результатов его работы и работы [7]: значение  $m_0^*$  существенно зависит от деформационных свойств материала – параметров  $n$  и  $a$ , причем, как видно из полученного при  $m = 1$  выражения  $\tilde{\varepsilon}_i^* = n(0,75 - a)^{-1}$ , параметр  $a$  может оказать существенное влияние на пограничную величину интенсивности деформации. Это указывает на необходимость как можно более точной аппроксимации зависимости (1). В частности, замена (2) на (3) может оказаться заметной при определении свойств материалов и конструкций.

В работах [8, 9] автором проводится сравнительный анализ понятий ОПУПД и НПТ («flow stress»)  $\sigma^*$ , в другой терминологии – НПН [6], на котором основаны критерии допустимости дефектов, входящие в стандарт В31G (США). В литературе [6, 10, и др.] приводятся более десятка различных формул для вычисления НПТ (НПН), дающие существенно различные оценки  $\sigma^*$ , полученные аппроксимацией экспериментальных данных (табл. 1 и 2). НПТ является характеристикой упрочняемого материала, однако в упомянутых зависимостях не участвуют параметры, характеризующие особенности деформирования материала в пластической зоне. Другой важный недостаток оценок  $\sigma^*$  – предположение, что трубопровод нагружен только внутренним давлением: ( $m_0 = 0,5$ ), в то время как наличие осевых нагрузок заметно сказывается на НПТ. Анализируя приведенные выше результаты, можно предположить, используя чисто степенную аппроксимацию, что НПТ (НПН) характеризует

момент ОПУПД и что, следовательно,

$$\sigma^* = \left( (2/3) \sqrt{m_0^2 - m_0 + 1} \right)^n \sigma_B. \quad (14)$$

При отсутствии осевых нагрузок формула (14) имеет вид:  $\sigma^* = (\sqrt{3})^{-n} \sigma_B$ . Формула (14) учитывает прочностные ( $\sigma_B$ ), деформационные ( $n$ ) характеристики материала и условия нагружения ( $m_0$ ) трубопровода. Из таблиц 1 и 2 видно, что вычисленные по последней формуле значения  $\sigma^*$  хорошо согласуются с экспериментально полученными зависимостями в работах [6, 10].

Таблица 1

Величина  $\sigma^*$  по формулам работы [6] и по формуле (14)

[6], (13.8a)	[6], (13.8б)	[6], (13.8в)	[6], (13.8г)	(14), $n = 0, 10$	(14), $n = 0, 12$	(14), $n = 0, 15$	(14), $n = 0, 20$
444	444	422	422	442	437	430	418

Таблица 2

Величина  $\sigma^*$  по формулам работы [10] и по формуле (14)

[10], (1)	[10], (2)	[10], (3)	[10], (4)	[10], (5)	[10], (6)	(14), $n = 0, 10$	(14), $n = 0, 12$	(14), $n = 0, 15$	(14), $n = 0, 20$
533	558	554	513	527	513	539	534	525	511

## 2. Математические модели НС слоя, расположенного вдоль образующей, из МП, чем ОМ, материала ТЦО

Так как оболочка тонкостенная, можно в качестве модельного изучать НДС растягиваемой неоднородной полосы, содержащей поперечный МП слой, в условиях плоской деформации. Распределение прочности по длине полосы может быть кусочно-постоянным, с постоянным пределом прочности  $\sigma_B^{БП}$  в ОМ, и постоянным пределом прочности  $\sigma_B$  в слое, причем  $\sigma_B < \sigma_B^{БП}$ . Другой модельный вариант распределения прочности по длине полосы – предел прочности постоянен в ОМ и не постоянен внутри слоя. Один из подходов к решению возникающих при этом недоопределенных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа можно применить по схеме: 1) находится решение, определенное в некоторой окрестности поперечной оси симметрии слоя с использованием краевых условий на этой оси и ограничений на класс решений; 2) находится решение в окрестности свободной границы в зоне, где оно однозначно определяется граничными условиями (здесь естественно применять метод характеристик); при исследовании соединений с небольшой степенью механической неоднородности необходимо находить напряженное состояние не только в слое, но и в прилегающих к нему участках, вследствие вовлечения этих участков в пластическое деформирование; 3) эти решения «склеиваются» в некоторой точке; в зависимости от выбора точки «стыковки» определяется последняя неизвестная постоянная в решении, полученном в пункте 1 данной схемы.

Заметим, что многообразие вариантов при деформировании слоя связано с наличием нескольких видов критического состояния слоя при растягивающей внешней нагрузке.

1. Достижение критического состояния слоя (прослойки), при условии, что максимальные нормальные напряжения в слое, действующие в его поперечном направлении, не достигают значений максимальных напряжений в БП ОМ, причем приконтактные БП участки соединения не вовлекаются в пластическое деформирование.

2. То же, но с вовлечением в какой-то момент в пластическое деформирование приконтактных участков БП части соединения (рис. 2, а).

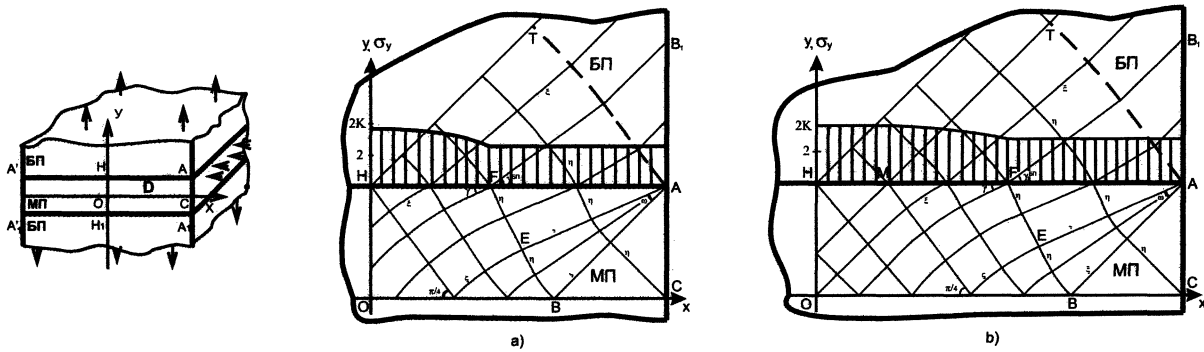


Рис. 2. Фрагмент неоднородной полосы, содержащей МП слой. Поле характеристик в МП слое и прилежащем БП участке и эпюры нормальных напряжений  $\sigma_y$  по контактной поверхности: а) не достигающих, б) достигающих значений максимальных напряжений  $\sigma_y$  в БП ОМ. АСОН – четверть сечения МП слоя

3. Достижение критического состояния слоя (прослойки), при условии, что максимальные нормальные напряжения в слое, действующие в его поперечном направлении, достигают значений максимальных напряжений в БП ОМ, причем приконтактные БП участки соединения не вовлекаются в пластическое деформирование.

4. То же, но с вовлечением в какой-то момент в пластическое деформирование приконтактных участков БП части соединения (рис. 2, б).

НДС пластической среды (МП слоя) при плоской деформации определяется системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (16)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\partial v_x / \partial x - \partial v_y / \partial y}{\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

Здесь  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  – компоненты тензора напряжений,  $v_x$  и  $v_y$  – (условные) скорости перемещения точек среды в направлениях  $OX$  и  $OY$  соответственно, (15) – уравнения равновесия; (16) – условие пластичности Мизеса,  $k$  – постоянная пластичности; (17) – ассоциированный закон течения Леви – Сен-Венана (закон пропорциональности девиаторов скорости деформаций и напряжений); (18) – условие сохранения объема пластического тела в процессе деформирования (условие несжимаемости).

Уравнения (15) – (18) заданы в области координатной плоскости (см. рис. 2, область  $AA_1H_1A'_1A'H$ ), интерпретируемой как сечение слоя из МП материала. Из соображений



симметрии достаточно рассматривать четверть указанной области – область  $D$ . Краевые условия (в силу симметрии относятся к четверти сечения прослойки  $АСОН$  (см. рис. 2)):

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0.$$

Условие на «свободной» границе ( $p$  – давление)  $\sigma_x(1, y) = -p$ . Ограничения на касательные напряжения на контактной границе

$$\max_{x \in [0; 1]} \tau_{xy}(x, \varkappa) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь  $\alpha$  – параметр, зависящий от достигнутых нагрузок. В критическом состоянии слоя его можно найти, исходя из внешних параметров задачи. Моделирование картины полей характеристик в окрестности точки  $A$  выхода контактной границы на свободную границу в случае вовлечения в пластическое деформирование приконтактных участков БП части соединения позволяет записать систему трансцендентных уравнений для нахождения  $\omega = \omega^{**}$  и  $\omega^{БП}$  – углов поворота характеристик при движении по ним между свободной и контактной поверхностями в момент начала течения БП участков, прилегающих к МП слою ( $\omega^{**}$  – угол веерно-центрированного поля в МП части в указанный момент). Приближенное решение этой системы методом разложения по параметру  $\lambda = K - 1$  имеет вид:

$$\omega^{БП} = \frac{K - 1}{2K} \left( 1 + \frac{(K - 1)^2}{4} + \dots \right), \quad \omega^{**} = K\omega^{БП}. \quad (19)$$

Отсюда получено условие, при котором БП часть соединения не вовлекается в пластическую деформацию:  $\varkappa > 4/(K + 1)^2$ . Формулы (19) позволяют вычислить касательные напряжения на контактной поверхности (участок  $FA$ ) в критический момент нагружения:

$$\tau_{xy}(x, \varkappa) = (K - 1) \left( 1 + (K - 1)^2/4 + \dots \right). \quad (20)$$

В работах [12, 13, 14, 15, 16, 9, и др.] применялись различные подходы для нахождения напряжений в МП слое на основании уравнений системы (15) – (18), основанные на «частичном предугадывании» внутреннего состояния МП слоя и всего соединения. Использовались гипотезы:

1. Гипотеза Прандтля о постоянстве касательных напряжений вдоль пластической полосы:

$$\partial\tau/\partial x = 0.$$

При таком допущении система уравнений (15), (16) принципиально упрощается и допускает точное решение, которое легко находится. Поле характеристик образовано двумя ортогональными друг другу семействами циклоид. Решение Прандтля, являясь точным для бесконечной МП полосы, может быть использовано, при значительной механической неоднородности соединения, для моделирования НС тонкой ( $\varkappa < 0,10 \dots 0,15$ ) полосы (прослойки), за исключением участков вблизи ее свободных поверхностей и поперечной оси симметрии. При малой ( $K < 1,5$ ) механической неоднородности картина полей характеристик (линий скольжения) значительно сложнее прандтлевской. В некоторой окрестности свободной поверхности она напоминает «лоскутное одеяло» из участков простого равномерного, веерно-центрированного и приближенно прандтлевского полей. Размеры этой окрестности можно оценить расстоянием от свободной поверхности в 2 – 3 толщины слоя. Еще сложней поля характеристик устроены в окрестности поперечной оси симметрии пластической полосы. При этом эпюры касательных и нормальных напряжений по любому продольному сечению полосы (кроме осевого) не являются монотонными функциями. В инженерных

решениях замену реальных полей характеристик прандтлевскими можно трактовать как «сглаживание» и осреднение этих функций, что объясняет применимость для вычисления критических напряжений подхода на основе решения Прандтля при удачном подборе коэффициентов. В таком ключе гипотезу Прандтля применяли О.А. Бакши, М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев и их соавторы в работах [13, 15, 14, и др.], и другие авторы.

2. Гипотеза о линейной зависимости касательных напряжений от одной из переменных:

$$\tau = xY(y) \quad \text{или} \quad \tau = X(x)y.$$

Вторая из этих гипотез применялась в работах Л.М. Качанова и его соавторов [12, и др.], и в работах автора. Первая гипотеза, позволяющая детально исследовать НДС вблизи поперечной оси симметрии пластической полосы, автору в литературе не встречалась. Она применялась автором в работах [16, 9, и др.].

3. Гипотеза разделения переменных для  $\tau$  (ГРП):

$$\tau = X(x)Y(y).$$

Эта гипотеза как обобщение предыдущих, автору в литературе также не встречалась. Она применялась автором в работах [9, 17] и многих других.

4. Гипотеза плоских поперечных сечений (ГППС):

$$\partial u_y / \partial x = 0 \quad \text{или} \quad \partial v_y / \partial x = 0.$$

Она использовалась в работах Л.М. Качанова и его соавторов [12, и др.], а также применялась автором в работе [19] и ряде других работ.

5. Гипотезы продольных сечений (ГПрС):

$$u_x = f(x)g(y) \quad \text{или} \quad v_x = f(x)g(y).$$

Эта гипотеза автору в литературе не встречалась. Она применялась автором в работах [16, 9, и др.], где предполагалось  $g(y) = -\cos \lambda y$ . Такой вид функции  $b(y)$  не только является правдоподобной, не противоречащей известным экспериментам аппроксимацией, но позволяет свести уравнение для нахождения  $\tau_{xy}$  к разделению переменных и, в конечном счете, к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

В указанных работах автора получены приближенные аналитические выражения для вычисления компонент тензора напряжений и показано, что гипотеза 2 о линейной зависимости  $\tau$  от одной из переменных приводит к результатам, являющимся первым приближением результатов на основе гипотез 4 и 5. Использование различных моделей, основанных на применении гипотез 2, 3, 4 и 5, приводит к близким результатам. Для вычисления напряжений наиболее удобными оказались зависимости, полученные на основе ГППС и формулы (19).

$$\tau_{xy} = 0,5Ax \operatorname{th}(Ay); \quad \sigma_y = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}(A\kappa)}{\operatorname{ch}(Ay)} + \frac{A^2}{4}(x_F^2 - x^2) + \frac{(K-1)(3-K)}{2} + 2 + \frac{p}{2},$$

причем

$$A = \frac{1}{\kappa} \operatorname{athd} \frac{2(K-1)\kappa}{x_F}, \quad \text{где} \quad y = \operatorname{athd} x \Leftrightarrow x = y \operatorname{th} y; \quad x_F = 1 - \frac{4\kappa}{K+1}. \quad (21)$$

Критическая нагрузка (среднее критическое напряжение  $\sigma_{y \text{ ср}}$ ) может быть вычислена по следующим формулам. При условии  $\kappa_0 \leq \kappa \leq \kappa_1 = (K+1)/4$ , где  $\kappa_0 = (K+1)/((K+1)^2 + 4)$ ,

$$\sigma_{y \text{ ср}} = 2 + \sigma_{\text{упр}}, \quad \sigma_{\text{упр}} = \frac{(K-1)(3-K)}{2} + \frac{(K-1)(K+1-4\kappa)(K+1-4\kappa)}{3\kappa(K+1)^2}, \quad (22)$$

а при условии  $0 < \varkappa \leq \varkappa_0$ ,

$$\sigma_{\text{упр}} = (K - 1)(2 - 2\varkappa - (1/6)\sqrt{\varkappa(K + 1)}\sqrt{K + 1 - 4\varkappa}). \quad (23)$$

В работе [16] вычислены скорости смещений точек слоя в продольном и поперечном направлениях

$$v_x = -Cx(\text{ch}(Ay))^{-1}, \quad v_y = (C/A) \text{arctg}(\text{sh}(Ay)),$$

где  $C$  – произвольная постоянная,  $C > 0$ . Там же, на основе анализа формул для вычисления нормальных напряжений при условии достижения всеми точками слоя критического состояния, дается описание возможной картины развития напряжений в слое и поэтапного вовлечения в пластическое деформирование различных участков. Отмечается, что в средней части слоя (т. е. вдали от свободных поверхностей) переход в пластическое состояние и затем в состояние пластической неустойчивости сначала происходит вблизи БП частей соединения, около контактной границы, приводятся ссылки на эксперименты, проводится параллель с известными явлениями, возникающими при растяжении полосы, ослабленной неглубокими вырезами.

В работах [15, 14, 17, 18, и др.] изучалось НС МП прямоугольного слоя, прочность которого переменна по толщине:  $k = k_0 Z(y)$ , где  $k_0 = k|_{y=0}$ . Условие пластичности имело вид  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4Z^2(y)$ , где  $Z(0) = 0$ ;  $Z(\varkappa) = K_{\text{сл}}$ ,  $K_{\text{сл}}$  – параметр слоя, характеризующий его неоднородность. В работах [15, 14, и др.] построение теории основывалось на гипотезе Прандтля. В работе [17] замена условия пластичности на приближенное позволила автору применить гипотезу 3 (ГРП) и свести ее к одной из гипотез вида 2. В случае  $\tau = xY(y)$  предложен обратный метод: функция  $Y(y)$  выбирается как нечетный полином подходящей степени, коэффициенты которого некоторым образом определяются так, чтобы вычисляемая по  $Y(y)$  функция неоднородности удовлетворяла нужным, полученным из эксперимента параметрам. В случае  $\tau = X(x)y$  естественно возникают два подслучая: когда прочность минимальна на продольной оси симметрии слоя,

$$\tau_{xy} = \lambda^{-1} \text{sh}(\lambda y) \cdot X(x), \quad \text{при } Z(y) = 0,5(\text{ch}(\lambda y) + 1), \quad y \in [0; \varkappa],$$

а когда максимальна,

$$\tau_{xy} = \lambda^{-1} \sin(\lambda y) \cdot X(x), \quad \text{при } Z(y) = 0,5(\cos(\lambda y) + 1), \quad y \in [0; \varkappa],$$

где функция  $X(x)$  – решение краевой задачи (24) (плюс во втором подслучае):

$$\begin{aligned} X''(x) - 4X'(x)X(x) \pm \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) = 0, \quad \max_{x \in [0; x_F]} X(x) &= b, \quad b = 0,5\alpha\lambda \text{cth}(0,5\lambda\varkappa), \quad x_F \in (0; 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Для модельных уравнений вида

$$T'' - T'T \pm T = 0 \quad (25)$$

имеют место утверждения.

**Лемма 1.** *Решение задачи Коши для уравнения из (25) (с минусом) и начальных условий  $T(0) = 0$ ,  $T'(0) = a$  возрастает на промежутке  $[0; +\infty)$ . Решение той же задачи, когда в уравнении (25) плюс, возрастает на промежутке  $[0; +\infty)$  при  $a \geq 1$ . Если  $0 < a < 1$ , то это решение возрастает на  $[0; c)$ , где  $c = \sqrt{-2 \ln(1 - a)/a} = \sqrt{2(1 + a/2 + a^2/3 + \dots)}$ .*

На основе разложения решений этих начальных задач в степенные ряды, с учетом монотонности решений и применения аппроксимаций Паде, предложены приближенные решения

этих задач в форме: когда прочность минимальна на продольной оси симметрии слоя,

$$X(x) = \frac{ax}{1 - \left(\frac{2}{3}a + \frac{\lambda^2}{6}\right)x^2}, \quad \text{где } a = b \left(1 - \frac{\lambda^2 x_F^2}{6}\right) \left(1 + \frac{2bx_F}{3}\right)^{-1} x_F^{-1};$$

когда прочность максимальна на продольной оси симметрии слоя,

$$X(x) = \frac{ax}{1 - \left(\frac{2}{3}a - \frac{\lambda^2}{6}\right)x^2}, \quad \text{где } a = b \left(1 + \frac{\lambda^2 x_F^2}{6}\right) \left(1 + \frac{2bx_F}{3}\right)^{-1} x_F^{-1}.$$

Трудность исследования НС неоднородного слоя усугубляется отсутствием теории, аналогичной теоремам Хенки о свойствах характеристик (линий скольжения) при плоской деформации для однородного материала. В работе [18] система уравнений пластического равновесия рассматривается в инвариантной форме; записываются уравнения характеристик; система интегрируется вдоль характеристик.

**Лемма 2.** *На характеристике*

$$\sigma_x + \sqrt{Z^2 - \tau_{xy}^2} \pm Z \arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} - Z(1 + \Delta) = \text{const}$$

(плюс для  $\xi$ -характеристик с положительным к оси  $OX$  углом наклона, минус для  $\eta$ -характеристик с отрицательным углом наклона), где

$$|\Delta| \leq \frac{|K_c - 1|\alpha^2}{2K_c(1 - K_c\alpha)}, \quad \text{если } K_c < 1; \quad |\Delta| \leq \frac{|K_c - 1|\alpha^2}{2K_c(1 - K_c\alpha)}, \quad \text{если } K_c > 1.$$

Лемма 2 позволяет при небольших  $\alpha$  получить простые приближенные инварианты Римана на характеристиках: на  $\eta$ -характеристиках

$$\sigma_x = Z \left( \arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} - \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} + 1 \right), \quad \sigma_y = Z \left( \arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} + \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} + 1 \right);$$

на  $\xi$ -характеристиках

$$\sigma_x = Z \left( -\arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} - \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} + 1 \right), \quad \sigma_y = Z \left( -\arcsin \frac{\tau_{xy}}{Z} + \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{Z}\right)^2} + 1 \right).$$

Эти формулы позволяют вычислить касательные и нормальные напряжения на контактной поверхности (участок  $FA$ ) в критический момент нагружения, обобщающие формулы (20):

$$\tau_{xy}(x, \varkappa) = K_{\text{сл}}(K - 1) \left(1 + (K - 1)^2 / (4K)\right);$$

$$\sigma_y(x, \varkappa) = 2K_{\text{сл}} + \sigma_{\text{упр}}, \quad \sigma_{\text{упр}} = K_{\text{сл}}(K - 1)(3 - K)/2.$$

Эти результаты с точностью, определяемой леммой 2, позволяют получить зависимости между  $\gamma$  – углом наклона  $\xi$ -характеристики к оси  $OX$ , и напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ :

$$\sigma_x = Z \left( \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right) - \sin 2\gamma + 1 \right) + C; \quad \sigma_y = Z \left( \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right) + \sin 2\gamma + 1 \right) + C; \quad (26)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = Z \left( \pm \left( \frac{\pi}{2} - 2\gamma \right) + 1 \right) + C \quad (27)$$

(плюс на  $\eta$ -, минус на  $\xi$ -характеристиках), которые при  $Z \equiv 1$  обращаются в хорошо известные соотношения в теории плоской деформации. Из формул (26), (27) следует теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\nu = \gamma - \frac{\pi}{4}$ , точки  $A, B, C$  и  $D$  образуют (криволинейный) прямоугольник из характеристик:  $AB$  и  $DC$  –  $\xi$ -характеристики,  $DA$  и  $CB$  –  $\eta$ -характеристики. Тогда, с точностью, определяемой леммой 2,

$$Z(A)\nu(A) - Z(B)\nu(B) = Z(D)\nu(D) - Z(C)\nu(C).$$

$$\sigma(A) - Z(A) - (\sigma(B) - Z(B)) = \sigma(D) - Z(D) - (\sigma(C) - Z(C)).$$

При постоянной функции  $Z$  последнее равенство приводит к (первой) теореме Генки [6, с. 80 – 101]. Отсюда следует, что при переходе от одной характеристики к другой одного семейства вдоль характеристики другого семейства изменение величин  $Z \cdot (\gamma - \pi/4)$  и  $\sigma - Z$  не зависит от того, по какой характеристике другого семейства совершается переход. Нормальные напряжения в окрестности оси  $OX$  сечения прослойки (при  $0 \leq x \leq x_F$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \lambda^{-2} (\operatorname{ch}(\lambda\kappa)X'(x_F) - \operatorname{ch}(\lambda y)X'(x)) + \\ & + 2\lambda^{-2} (X^2(x) - X^2(x_F)) + 2K_{\text{сл}} + K_{\text{сл}}(K - 1)(3 - K)/2. \end{aligned}$$

Постоянная интегрирования получена сопряжением решений в точке  $x_F$  (приближенное выражение для  $x_F$  найдено в форме

$$x_F \approx 1 - 4\kappa/(K + K_{\text{сл}});$$

при  $K_{\text{сл}} = 1$  оно совпадает с (21).

### 3. Математическое моделирование НС пластического кольца (ортогонального оси ТЦО МП слоя) при осевом растяжении

Рассматривается система уравнений относительно напряжений и скоростей деформаций для осесимметричного случая:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (28)$$

$$(\sigma_r - \nu_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6; \quad (29)$$

$$\frac{\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}}{\sigma_r - \sigma_\varphi} = \frac{\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r}}{\sigma_z - \sigma_r} = \frac{\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}}{2\tau_{rz}}; \quad (30)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad r \neq 0. \quad (31)$$

Здесь  $\sigma_r$  – радиальное,  $\sigma_\varphi$  – кольцевое,  $\sigma_z$  – осевое нормальные,  $\tau_{rz}$  – радиально-осевое касательное напряжения (безразмерные);  $v_z$ ,  $v_\varphi$  и  $v_r$  – соответствующие (условные) скорости перемещений; (28) – уравнения равновесия (касательные напряжения  $\tau_{\varphi r}$  и  $\tau_{\varphi z}$  тождественно равны нулю, так как изгиб и кручение отсутствуют); (29) – условие пластичности Мизеса, (30) – ассоциированный закон течения Леви – Сен-Венана по теории течения (закон пропорциональности девиаторов скоростей деформаций и напряжений); (31) – условие сохранения

объема пластического тела в процессе деформирования (условие несжимаемости). Граничные условия  $\tau_{rz}(r, 0) = 0$ ,  $\tau_{rz}(0, z) = 0$ . Обозначения:  $t$  – толщина оболочки,  $r_{cp}$  – радиус оболочки,  $r_0$  – радиус срединной поверхности поверхности раздела течения (нормировкой по  $t/2$  эти величины приводятся к безразмерным).

При исследовании НС осесимметричных тел с МП поперечным слоем при осевой нагрузке можно использовать ту же схему из трех этапов, что в плоском случае, но его реализация заметно сложнее по ряду причин. В задачах п. 1 указанной схемы больше уравнений и неизвестных; сложнее уравнения; система уравнений в напряжениях не замкнута. В задачах п. 2 приведенной схемы система уравнений не имеет гиперболического типа. Ситуацию удается улучшить введением гипотезы ГППС, вследствие чего система несколько упрощается и становится гиперболической. НДС кольцевого слоя (за исключением заведомо ошибочных работ) рассматривалось только в работах автора (с соавторами) [19, и др.].

Запишем ГППС в виде  $v_z = W(z)$ , где  $W(z)$  – функция одной переменной  $z$ , требующая определения. Из ГППС и уравнения (31) следует, что

$$v_r = 0,5W'(z)(r_0^2 - r^2)r^{-1}.$$

Эта формула существенно отличает данную задачу от соответствующей задач при плоской деформации и для сплошного стержня. Из этих уравнений и системы (28) – (31) выводятся приближенные формулы для вычисления касательных напряжений. При решении при сделанных предположениях системы (28) – (31) получена, после упрощений и отбрасывания слагаемых, имеющих относительно  $(r - r_0)r_0^{-1}$  порядок выше первого, приближенная формула

$$\tau = -\frac{Z(z)P(r)}{\sqrt{4 + Z^2(z)P^2(r)}}, \quad \text{причем} \quad -\frac{Z''}{Z} + \frac{P''}{P} + 2Z' + \left(\frac{P}{r}\right)' \frac{1}{P} = 0, \quad (32)$$

где  $Z(z) = W''(z)/W'(z)$ . Разделение переменных при решении уравнения из (32) дает  $P = (r^2 - r_0^2)/(2r)$ ,  $Z(z) = -A \operatorname{th}(Az)$ , где постоянная  $A$  вычисляется, как в (21) (с заменой  $x_F$  на  $r_F - r_0$ ). В [19] отмечается, что уравнение (29) можно записать в виде  $(1 + \rho)(\sigma_z - \sigma_r)^2 = 4(1 - \tau^2)$ , где малая величина  $\rho$  имеет порядок  $t^2/r_{cp}^2$  и потому может быть исключена. Тогда система (28), (29) может быть записана в виде (15), (16) с заменой переменных  $x$  на  $r - r_0$  и  $y$  на  $z$ . Поэтому в приближенном варианте применимы результаты п. 3 относительно свойств характеристик и, как следствие, вычисляются как в плоском случае координаты  $r_F$ , значения напряжений в критическом состоянии на участке контактной границы  $AF$  и постоянная  $A$ . Нормальные напряжения

$$\sigma_z = -\frac{2r - r_0}{2r} \ln \operatorname{ch}(Az) - \frac{A^2(r - r_0)^2}{4} + \ln \frac{r}{r_0} + 2 + C, \quad (33)$$

$$C = \frac{(K - 1)(3 - K)}{2} + \frac{\ln \operatorname{ch}(A\kappa)}{2} + \frac{A^2}{4} \left(1 - \frac{4\kappa}{K + 1}\right)^2.$$

Показано, что цилиндрическая поверхность раздела течения в критическом состоянии оболочки расположена ближе к внутренней поверхности трубы. Этот вывод подтверждается экспериментами и согласуется с аналогичным явлением, которое происходит при растяжении однородной трубы, ослабленной кольцевым утонением стенки под действием растягивающей осевой нагрузки. Однако указанное смещение невелико – например, при  $K = 1, 2$ ;  $\kappa = 0, 2$   $r_0 - r_{cp} = 0, 56/r_{cp}$ . При исследовании распределения нормальных напряжений по сечению слоя отмечено, как и в случае плоской задачи, что прилегающие к контактным поверхностям участки МП слоя раньше достигают состояния пластической неустойчивости.

Контактное упрочнение МП поперечного слоя в трубе несколько меньше, чем в полосе (на 1...2% в зависимости от  $r_0$ ,  $K$  и  $\kappa$ ); если этим различием пренебречь, в данном случае оказываются верными формулы для вычисления  $\sigma_{упр}$  (22) и (23). Сохраняются также формулы для вычисления скоростей смещений и скоростей деформаций (при соответствующей замене в обозначениях переменных).

#### 4. Математическое моделирование НС неоднородных соединений, содержащих трещиноподобные дефекты различного расположения, в условиях плоской деформации

Большой цикл работ о влиянии дефектов в МП и БП прослойках на несущую способность неоднородных соединений (см. монографию [20] и литературу в ней) основан на решении Прандтля задачи о напряженном состоянии бесконечной пластической полосы, либо использовании в методе линий скольжения в качестве характеристик (линий скольжения) циклоид, что восходит к решению Прандтля. Однако касательные напряжения в решении Прандтля постоянны по длине слоя, в то время как на практике они могут изменяться по толщине оболочки в широком диапазоне. Другим важным недостатком этих работ и работы [21] является использование непрерывных ММ НС в БП части соединения. В работе [23] показано, что в БП части существует лишь обобщенное решение системы (15), (16). Разрывность решений в БП части возникает в силу того, что в БП части, вследствие ослабляющего влияния примыкающей МП части, поля характеристик, определяемые контактной и свободной границами, накладываются друг на друга. Уравнения равновесия, разумеется, выполняются на линии разрыва, но нормальные напряжения, действующие в направлении этой линии, терпят скачок. Углы наклона характеристик к линии разрыва, расположенные с разных сторон от нее и имеющие эту линию в качестве общей стороны, равны друг другу, что позволяет в каждом конкретном случае находить обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее эту линию.

В работе [23] исследовано НС механически неоднородного соединения, имеющего в сечении форму полосы с распределением прочности по схеме МП – БП, и содержащего трещиноподобный дефект на границе между МП и БП участками либо в БП части, внутри или на свободной поверхности (рис. 3). Расположение вблизи дефекта МП участка снижает

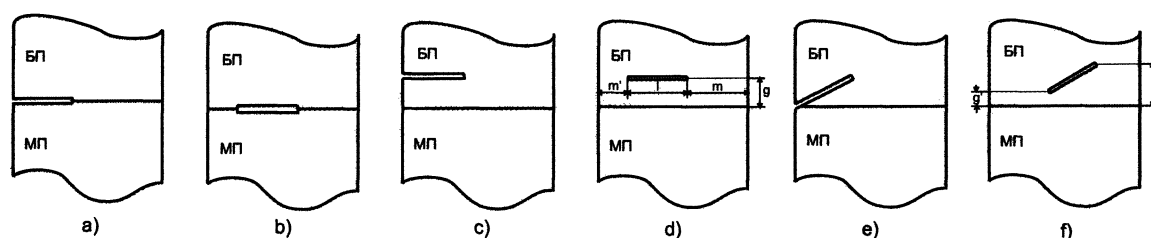


Рис. 3. Варианты расположения трещиноподобного дефекта в окрестности контактной границы между БП и МП частями соединения в БП части

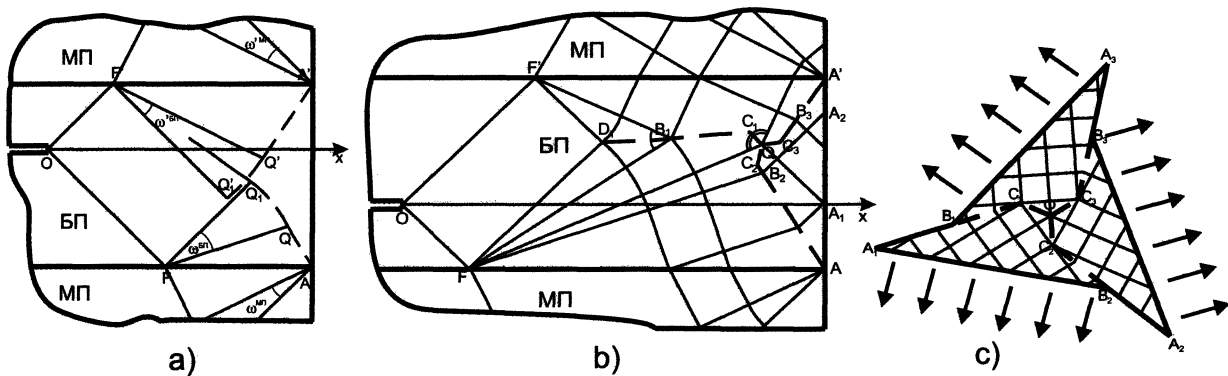
прочность соединения. Например, при наружном дефекте в БП части соединения (см. рис. 3, с) среднее критическое напряжение

$$\sigma_{укр}^{БП} = (K + 1) \left( 1 - \frac{l}{t} + \frac{3(K - 1)g}{2t} \right), \quad 0 \leq \zeta \leq 1/3;$$

$$\sigma_{укр}^{БП} = 2K(1 - l/t), \quad \zeta \geq 1/3,$$

где  $\zeta = g/(t - l)$ . Общая тенденция – при приближении дефекта к контактной или свободной поверхности величина критического напряжения снижается, причем, если дефект расположен достаточно далеко от контактной поверхности, влияние МП части соединения отсутствует.

Более сложные задачи возникают при исследовании НС БП слоев, содержащих дефекты, т. е. при схеме распределения прочности по полосе МП – БП – МП. Наличие второй контактной границы оказывает значительное усложняющее влияние на НС БП участка. Рассматриваемая ситуация распадается на большое количество случаев с существенно различными полями характеристик, приводящих к различным формулам для вычисления  $\sigma_{ср}$ . Эти случаи определяются размерами и расположением относительно друг друга «зон влияния МП участков» (один из простых вариантов показан на рис. 4, а) – области  $FQ_1QA$  и  $F'Q'_1Q'A'$ ), а «зоны влияния» зависят от механических и геометрических параметров. Если нетто-сечение пересекает только одну «зону влияния» (см. рис. 4, а и б), методика вычисления  $\sigma_{ср}$  не отличается от случая схемы МП – БП. Наиболее сложный вид линия



**Рис. 4.** Поле характеристик и линии разрыва напряжений в соединении типа МП – БП – МП с дефектом в БП слое: а) зоны влияния МП участков не пересекаются; б) зоны влияния МП участков накладываются друг на друга; в) поле характеристик и линии разрыва напряжений в области с тремя различными направлениями действия внешней нагрузки

разрыва напряжений имеет в области пересечения трех «зон влияния» – МП участков и свободной поверхности. На рис. 4, в) изображена «модельная» ситуация (внешняя нагрузка действует на образец, как показано на рис.). В любой точке линии разрыва напряжений (пунктирной на рис. 4, в) подходящие к ней характеристики образуют с ней равные углы с разных ее сторон.

Исследование НС МНС, имеющего в сечении форму полосы с распределением прочности вида МП – БП, и содержащего трещиноподобный дефект в МП части, внутри или на свободной поверхности, проводится аналогично. Наличие БП участка вблизи дефекта повышает прочность соединения. Количественные оценки этого повышения в зависимости от механических и геометрических параметров находятся по той же схеме.

Вопросам, связанным с исследованием НС МНС, главным образом СвС, содержащих дефекты в МП прослойке (распределение прочности вида МП – БП – МП), посвящена обширная литература (см. работу [20] и литературу в ней). В основе теоретических рассуждений этих работ явно или неявно лежит идея сведения задачи к изучению НС модельной прослойки, не содержащей дефекта. Ниже будет рассмотрена в качестве примера такая задача в более общей постановке (дефект в спиральном МП слое).



## 5. Математическое моделирование и исследование НДС спиральных МП слоев в ТЦО

### 5.1. ММ НДС спиральных МП слоев прямоугольного сечения

В работах [24, 26, и др.] разрабатывались и изучались ММ НДС МП слоя, расположенного под углом к направлению внешней нагрузки. Несмотря на важность этой проблематики в приложениях к исследованию несущей способности ТЦО со спиральными МП прослойками, в т. ч. спиральношовных ТВД, работы других авторов на эту тему отсутствуют. Рассмотрим сначала НДС наклонного к направлению внешней нагрузки МП слоя в листовом образце. Напряжения в ОМ и на контактных поверхностях между ОМ и МП слоем можно записать в виде (направления координатных осей представлены на рис. 5,  $\nu$  – угол между направлением  $\sigma_1$  и направлением слоя):

$$\sigma_y = B\sigma_2, \tau_{yz} = 0,5C\sigma_2, B = \cos^2 \nu + m \sin^2 \nu, C = (1 - m) \sin 2\nu, m = \sigma_1/\sigma_2. \quad (34)$$

В действительности с увеличением нагрузки и переходе МП слоя в пластическое состояние

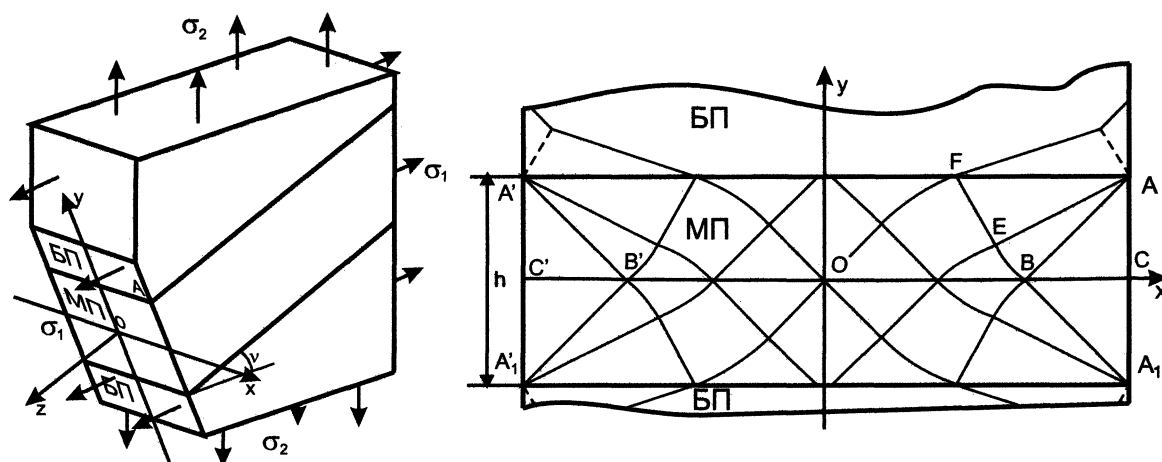


Рис. 5. Наклонный МП слой в плоском листовом образце и его поперечное сечение с сеткой характеристик

напряжения  $\sigma_y$  в МП слое на контактной поверхности становятся переменными по толщине образца. Тогда первое уравнение (34) следует записать в виде  $\sigma_{уср} = B\sigma_2$ , где  $\sigma_{уср}$  – среднеинтегральное значение  $\sigma_y$  по толщине образца. Так как в направлении слоя НДС в нем не изменяется, все компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций не зависят от  $z$ . Поэтому уравнение несжимаемости запишется в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

а из условия пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций следует, что

$$2\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y.$$

Так как толщина слоя (по  $y$ ) мала по сравнению с длиной (измеряемой в направлении оси  $Oz$ ), касательные напряжения  $\tau_{yz}$  можно считать постоянными по толщине слоя, т. е. предполагать, что второе равенство в (34) выполняется для внутренних точек слоя. Однородность

НС в направлении длины слоя влечет равенство нулю касательных напряжений в плоскостях, параллельных плоскости  $Oxz$ :  $\tau_{xz} = 0$ . В силу допущений условие пластичности Мизеса принимает вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 - 4\tau^2,$$

где  $\tau = \tau_{yz}$  одинакова для всех точек слоя,  $\tau = 0,5C\sigma_2$ ,  $k$  – пластическая постоянная,  $k = \sigma_i/\sqrt{3}$ . В момент ОПУПД  $k = k^* = \sigma_i^*/\sqrt{3}$ ,  $\sigma_i^*$  – интенсивность напряжений при ОПУПД.

Несущая способность листового образца определяется критической величиной напряжений  $\sigma_1^*$  и  $\sigma_2^*$ , а при их фиксированном отношении  $m$ , предельной величиной  $\sigma_2^*$ . Пусть  $g^*$  – значение  $g$  при  $\alpha = \alpha^*$ . Из соотношений (34) и формулы

$$\sigma_{усп} = (2 + \sigma_{усп}(\alpha, \kappa)) \sqrt{k^2 - \tau^2} = 2g\sqrt{k^2 - \tau^2}, \text{ где } g = 1 + 0,5\sigma_{усп}(\alpha, \kappa), \quad (35)$$

получим для критических значений  $\sigma_2$  и  $\tau$  выражения:

$$\sigma_2^* = \frac{2g^*k^*}{\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}; \quad \tau^* = \frac{Cg^*k^*}{\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}, \quad (36)$$

причем функция  $\sigma_{усп}(\alpha, \kappa)$  из (35) определена по одной из формул (22) или (23) в зависимости от  $\kappa$ .

При наклонном, по отношению к направлению наибольшего главного напряжения, направлении слоя, наличие касательных напряжений  $\tau$ , действующих вдоль слоя, уменьшает несущую способность соединения. В этом случае аналогом коэффициента механической неоднородности является величина

$$K_{\text{нак}} = \sqrt{\frac{(k^{\text{БП}})^2 - \tau^2}{k^2 - \tau^2}} = K\sqrt{1 + \frac{K^2 - 1}{K^2} \frac{g^2 C^2}{B^2}}.$$

Всегда при  $\nu \neq 0$   $K^{\text{нак}} > K$ , поэтому можно сказать, что переход к наклонному слою равносильно увеличению механической неоднородности соединения, т. е. уменьшению прочности слоя. Зависимость величины  $K^{\text{нак}}$  от  $\nu$  на отрезке  $\nu \in [0; \pi/2]$  при  $m \neq 1$  имеет единственный экстремум в точке

$$\nu^* = 0,5 \arccos[(m - 1)/(1 + m)]. \quad (37)$$

Рассмотрим ММ НДС ТЦО со спиральным МП слоем. Можно показать, что зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций в слое имеет вид

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{B^2 + g^2 C^2}}{g} \frac{pR_0}{t_0} \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2} B}{\sqrt{B^2 + g^2 C^2}} \varepsilon_i\right). \quad (38)$$

Используя КСМ, можно вычислить критические деформации в МП слое, соответствующие моменту ОПУПД, при задании упрочнения зависимостями (3) или (4) при  $b = 0$  (соответственно):

$$\varepsilon_i^* = \frac{2n\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}{\sqrt{3}\sqrt{1 - \alpha^{*2}B}} \quad \text{или} \quad \varepsilon_i^* = \frac{2n\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}{\sqrt{3}\sqrt{1 - \alpha^{*2}B - 2a\sqrt{B^2 + g^{*2}C^2}}}.$$

На этой основе вычисляется критическое давление. Сначала, с использованием последних формул, можно найти критические напряжения в МП слое. Для случая (3)

$$\sigma_i^* = \beta\sigma_B, \quad \beta = \left(\frac{2e}{\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{B^2 + C^2(g^*)^2}}{B\sqrt{1 - (\alpha^*)^2}}\right)^n. \quad (39)$$

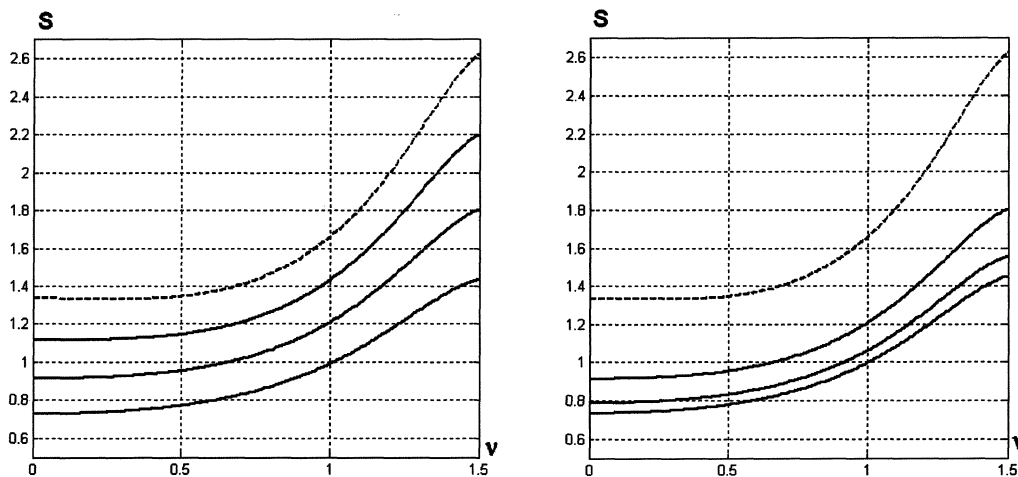
Если  $\nu = 0$  (слой направлен по образующей),  $\beta = (2e/\sqrt{3(1-\alpha^{*2})})^n$ . Эта формула не зависит от  $m$ , т. к. здесь ОМ, по предположению, не достигает состояния неустойчивого пластического деформирования. Подстановкой формулы (39) в формулу (38) определяются критическое давление  $p^*$  и условное расчетное кольцевое напряжение  $\sigma_\varphi^{ysl}$ :

$$p^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{\sigma_B t_0}{R_0} S, \quad \sigma_\varphi^{ysl} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} S \sigma_B, \quad S = \frac{g^* \left(\sqrt{B^2 + C^2(g^*)^2}\right)^{n-1}}{B^n \left(\sqrt{1 - (\alpha^*)^2}\right)^n}. \quad (40)$$

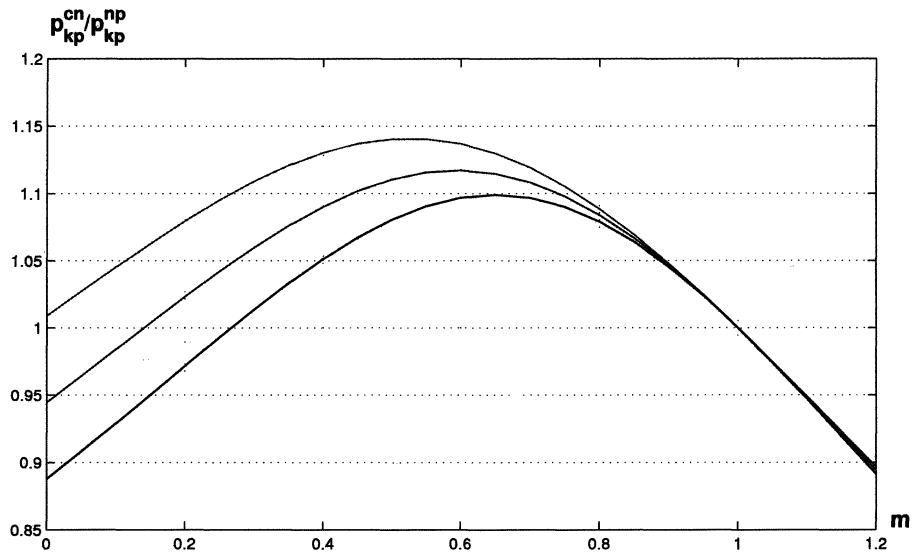
График зависимости коэффициента  $S$  от угла  $\nu$  представлен на рис. 6. Видно, что на отрезке  $[0; 0,5]$  коэффициента  $S$ , а с ним критическое давление  $p^*$  не возрастают. Следовательно, наклонное расположение МП слоя выгодно лишь при углах наклона больше  $30^\circ$ .

График зависимости отношения критических давлений в спиральношовной ( $\nu = \pi/4$ ) и прямошовной трубах  $p_{сп}/p_{пр}$  от  $m$  построен на рис. 7 для  $g = 1, 0; 1, 1; 1, 2$ ,  $n = 0, 15$ . Видно, что при отсутствии внешних осевых нагрузок ( $m = 0, 5$ ) в спиральношовных трубах допустимо более высокое давление (на 5% ... 15%). С ростом контактного упрочнения (фактически – параметра механической неоднородности  $K$ ) преимущество спиральношовных труб уменьшается. Более высокий показатель упрочнения металла прослойки свидетельствует в пользу спиральношовных труб. Прямошовные трубы имеют преимущество при существенных осевых нагрузках, особенно при сжимающих нагрузках.

Если относительная толщина продольного слоя велика,  $\kappa \approx 1$  или больше (но мала по сравнению с диаметром), то контактное упрочнение в прослойке отсутствует, и формулу (40) можно записать в виде:  $p^* = (2/\sqrt{3})^{n+1} \sigma_B t_0 / R_0$ . Сравнение ее с формулой (8) свидетельствует о наличии упрочнения ТЦО, содержащей МП слой, отличного от деформационного и контактного. Назовем его *конструкционным упрочнением*, так как его появление связано с особенностями работы всей конструкции (трубы в данном случае). Коэффициент этого



**Рис. 6.** Зависимость коэффициента  $S$  в формуле критического давления при  $m = 0, 5$  от угла наклона  $\nu$  МП слоя с поверхностным дефектом и без, когда: а)  $\kappa = 0, 2; l/t = 0$  – формула (40), пунктирная линия;  $l/t = 0, 1; 0, 2; 0, 3$  – формула (43), сплошные линии, сверху вниз соответственно; б)  $\kappa = 0, 2; l/t = 0$  – формула (40), пунктирная линия;  $\kappa = 0, 2; 0, 3; 0, 4; l/t = 0, 2$  – формула (43), сплошные линии, сверху вниз соответственно



**Рис. 7.** Зависимость отношения критических давлений в спиральношовной и прямошовной трубах от коэффициента двухосности нагружения  $m$

упрочнения при упругом деформировании основного металла, отсутствии осевых напряжений и упрочнении МП материала по степенному закону  $\sigma_i = A\epsilon_i^n$  равен числу  $2^n$ . Например, при  $n = 0,10$  это 1,072.

### 5.2. ММ НДС спиральных МП слоев с поверхностными дефектами

В работах [25, и др.] разрабатывались и изучались ММ НДС МП слоя, расположенного под углом к направлению внешней нагрузки и содержащего поверхностные дефекты. В этих работах были вычислены критические напряжения в слое и критическое давление в ТЦО в зависимости от соотношений между внешними нагрузками, механическими и геометрическими параметрами ТЦО, МП слоя и дефекта. Моделирование НДС МП слоя, содержащего на своей срединной поверхности наружный дефект, основано на сведении задачи к исследованию НДС некоторого бездефектного слоя с условной относительной толщиной  $\kappa_D$ , и применении к этому изложенной выше методики.

Тонкостенность оболочки позволяет рассматривать, в качестве модельного, плоский листовый образец, содержащий слой из МП, чем основной, металла, вдоль которого с одной стороны образца, посередине слоя, имеется протяженный надрез прямоугольной формы, моделирующий наружный дефект (рис. 8). Ширина дефекта постоянна, но может быть произвольной – от нуля и до толщины слоя, глубина – произвольной, но тоже постоянной. Предполагается, что на образец в двух ортогональных направлениях действуют равномерно распределенные нагрузки  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (см. рис. 8). Для определения НДС материала слоя необходимо знать координаты точки раздела пластического течения (точки  $O$  на рис. 8), которая находится в центре поперечного сечения слоя при неглубоких дефектах, и сдвигается при глубоких. Положив  $d = \Delta/2 + l - h/2$  (см. рис. 8),  $\kappa_D = h/(2t_1)$ , получим два варианта решения. Отсюда

$$\sigma_{cp}^* = 2g_D^* \sqrt{k^2 - \tau^2},$$

$$g_D^* = 1 - l/t + 0,5 (\kappa/\kappa_D) \sigma_{упр}^D \quad \text{при } d \geq 0, \quad (41)$$

$$g_D^* = 1 - l/t + 0,5 \sigma_{упр}^D \quad \text{при } d \leq 0. \quad (42)$$

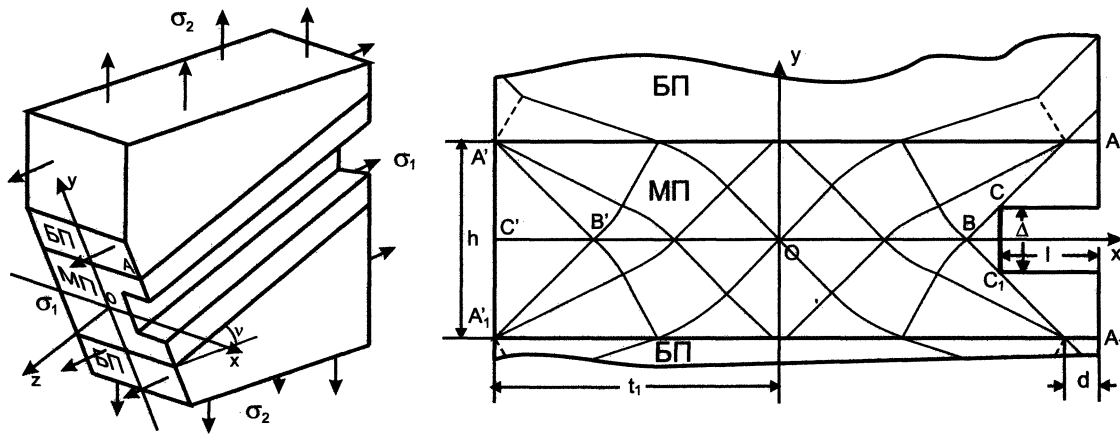


Рис. 8. Наклонный МП слой с поверхностным дефектом в плоском листовом образце и его поперечное сечение с сеткой характеристик. Координатные оси – линии раздела течения

Положительная величина  $\sigma_{\text{упр}}^D$  зависит от  $\alpha$  и  $\kappa_D$  и характеризует контактное упрочнение слоя, содержащего дефект, и может быть вычислена по одной из формул (22) или (23) с заменой в них  $\kappa$  на  $\kappa_D$ .  $\sigma_2^*$  и  $\tau^*$  вычисляются по формулам (36). При наличии дефекта формула для вычисления критической интенсивности деформаций имеет такую же структуру, как и без дефекта; надо лишь в формуле для вычисления  $\beta$  (39) заменить  $g^*$  на  $g_D^*$ . Отсюда следует, что на величину пластической постоянной МП слоя  $k^* = \beta\sigma_B/\sqrt{3}$  при наличии контактного упрочнения влияют:

- 1) механические свойства материала слоя, характеризующиеся пределом прочности  $\sigma_B$  и показателем упрочнения  $n$ ;
- 2) коэффициент механической неоднородности соединения  $K$ ;
- 3) относительная толщина слоя  $\kappa$ ;
- 4) угол наклона слоя  $\nu$ ;
- 5) коэффициент двухосности нагружения стенки трубы  $m$ ;
- 6) относительные размеры дефекта  $l/t$  и  $\Delta/t$  при его наличии.

Коэффициент механической неоднородности  $K$  многие авторы [15, 20, 14, и др.] оценивают величиной

$$K = K_B = \sigma_B^{\text{БП}}/\sigma_B.$$

В действительности  $K$  зависит от многих величин, прежде всего от параметров упрочнения МП и БП материалов ТЦО, однако можно показать, что приведенная оценка для сварных соединений дает ошибку всего в 1%...4%.

Формула для вычисления критического давления  $p^*$  в трубопроводе с МП спиральным слоем, содержащем поверхностный дефект, аналогична формуле (40):

$$p^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{S(t_0 - l)}{R_0} \sigma_B;$$

$$S = g_D^* B^{-n} ((B/g_D^*)^2 + C^2)^{0,5(n-1)} ((1 - (\alpha^*)^2)^{-0,5n}), \quad (43)$$

где  $g_D^*$  вычисляется, в зависимости от знака  $d$ , по (41) или (42).

Параметр  $S$  в формуле (43) определяет, в какой степени коэффициент двухосности нагружения, наклон МП слоя, его относительная толщина, а также размеры содержащегося в нем поверхностного дефекта влияют на критическое давление. График зависимости коэффициента  $S$  от  $\nu$  для различной глубины дефекта и толщины прослойки приведен на

рис. 6. Наибольшей величины  $p^*$  при  $\nu = \pi/4$  достигает при  $m$ , близком к числу 0,5, но не совпадающем, как правило, с ним.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ – проекты 01-01-96427-р2001урал, 05-08-18179-а.*

## Литература

1. Дильман, В.Л. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистральных газонефтепроводов / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 179 – 185.
2. Дильман, В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 165 – 175.
3. Swift, H. Plastic instability under plane stress / H. Swift // J. Mech. and Phys. Solids. – 1952. – № 1. – Р. 1 – 18.
4. Ковальчук, Г.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11 – 16.
5. СНиП 2.05.06-85\*. Магистральные трубопроводы. – М.: Госстрой России, 2003. – 59 с.
6. Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению: сб.: пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 439 с.
7. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – Киев: Наук. думка, 1976. – 416 с.
8. Дильман, В.Л. Об одной новой формуле для вычисления напряжения пластического течения при оценке допустимости коррозионных дефектов / В.Л. Дильман // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11, вып. 2. – С. 327 – 328.
9. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 38 – 48.
10. Денис, Р.М. Оценка допустимости коррозионных дефектов / Р.М. Денис // Трубопроводный транспорт нефти. – 1997. – № 4. – С. 28 – 34.
11. Дильман, В.Л. Анализ пластической устойчивости осевых и спиральных мягких прослоек в цилиндрической тонкостенной оболочке / В.Л. Дильман // Обзорные приклад. и пром. математики. – 2007. – Т. 14, вып. 4. – С. 704 – 705.
12. Качанов, Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 63 – 67.
13. О влиянии степени механической неоднородности на статическую прочность сварных соединений / О.А. Бакши, В.В. Ерофеев, М.В. Шахматов и др. // Сварочное производство. – 1983. – № 4. – С. 1 – 4.
14. Шахматов, М.В. Инженерные расчеты сварных оболочковых конструкций / М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Челябинск: ЧГТУ, 1995. – 229 с.
15. Когут, Н.С. Несущая способность сварных соединений / Н.С. Когут, М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Львов.: Свит, 1991. – 184 с.
16. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв.РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 115 – 124.

17. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв.РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 141 – 148.
18. Дильман, В.Л. Исследование системы уравнений напряженного состояния неоднородного пластического слоя / В.Л. Дильман // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Ильи Нестеровича Векуа (Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г.): тез. докл. – Новосибирск, 2007. – С. 136 – 137.
19. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии пластического кольца при растяжении / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 2. – С. 109 – 120.
20. Шахматов, М.В. Работоспособность и неразрушающий контроль сварных соединений с дефектами / М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев, В.В. Коваленко. – Челябинск: ЦНТИ, 2000. – 227 с.
21. Дильман, В.Л. Влияние дефекта более прочного участка сварного соединения на несущую способность прямошовной трубы большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2003. – № 6. – С. 107 – 115.
22. Дильман, В.Л. Анализ напряженного состояния неоднородной полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Обзорение приклад. и пром. математики. – 2008. – Т. 15, вып. 3. – С. 463 – 464.
23. Дильман, В.Л. Разрывные решения краевой задачи системы уравнений пластического равновесия для неоднородной полосы с дефектами / В.Л. Дильман // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: тр. междунар. конф. (г. Стерлитамак, 24 – 28 июня 2008 г.): – Уфа, 2008. – Т. III. – С. 197 – 200.
24. Дильман, В.Л. Несущая способность спиральношовных труб большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2002. – № 6. – С. 11 – 15.
25. Дильман, В.Л. Влияние поверхностных дефектов на статическую прочность сварных швов спиральношовных труб / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2004. – № 2. – С. 16 – 19.
26. Дильман, В.Л. Анализ пластической устойчивости осевых и спиральных мягких прослоек в цилиндрической тонкостенной оболочке / В.Л. Дильман // Обзорение приклад. и пром. математики. – 2007. – Т. 14, вып. 4. – С. 704 – 705.

Кафедра общей математики,  
Южно-Уральский государственный университет  
dilman49@mail.ru

*Поступила в редакцию 24 февраля 2009 г.*