УДК 519.642.8

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

С. И. Кадченко

METHOD OF REGULARIZED TRACES

S. I. Kadchenko

Разработан новый метод вычисления первых собственных значений дискретных операторов (метод регуляризованных следов (РС)). Проведенная апробация метода РС на задаче гидродинамической теории устойчивости показала его высокую эффективность.

Ключевые слова: регуляризованный след, собственные значения, дискретный самосопряженный оператор, задача Орра – Зоммерфельда

A new method of calculation of first eigenvalues of discrete operators (a method of regularized traces (RT)) is developed. The approbation of RT method on a problem of the hydrodynamic stability theory has shown its high efficiency.

Keywords: regularized trace, eigenvalues, discrete selfadjoint operator, the Orr – Zommerfelds problem

Введение

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным числам. Допустим, что кратность собственного числа μ_n оператора T равна ν_n. Обозначим через n_0 количество всех неравных друг другу собственных чисел μ_n оператора T, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то первые $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T + P$ являются решениями системы нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0), \ p = \overline{1, m_0}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0) = \dfrac{(-1)^k p}{2\pi k i} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1} \Big[P R_\mu(T) \Big]^k d\mu$ – k-е поправки теории возмущений оператора $T + P$ целого порядка p, $R_\mu(T)$ – резольвента оператора T. В дальнейшем будем предполагать, что в круге T_{n_0} находится m_0 собственных чисел оператора T.

Форма записи уравнений (1) по сравнению с первыми работами [1 – 18] видоизменена. Это связано с желанием явно выделить случаи кратности собственных чисел μ_n оператора T. Хотя и в предыдущих работах их кратность предполагалась.

Система алгебраических уравнений (1) позволила разработать новый численный метод нахождения собственных чисел дискретных операторов, идея которого впервые была высказана В. А. Садовничим и В. В. Дубровским в работе [1], которая состоит в следующем. Составим систему нелинейных уравнений (1) относительно m_0 первых собственных чисел $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ и выразим симметрические многочлены $\sum\limits_{k=1}^{m_0}\beta_k^p$, $p=\overline{1,m_0}$ от m_0 переменных через правые части системы уравнений (1). Используя теорему Виета, получим многочлен степени m_0 со старшим коэффициентом, равным единице (остальные коэффициенты могут быть найдены со сколь угодно большой точностью по формулам Ньютона), корнями которого будут первые m_0 собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$. Известно, что комплексные корни многочлена со старшим коэффициентом, равным единице, непрерывно зависят от его коэффициентов. Поэтому, решая приближенно уравнение, можно найти его корни $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ с необходимой точностью.

В работе [2] получена формула для вычисления k-й поправки теории возмущений p-того порядка $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ для любых $k,m_0,p\in N$

$$\alpha_k^{(p)}(m_0)=\frac{p}{k}\sum_{j=1}^{m_0}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=1}^{\infty}\Big(\prod_{r=1}^{k}V_{j_rj_s}\Big)\operatorname*{res}_{\mu_j}\Big(\frac{\mu^{p-1}}{\prod\limits_{r=1}^{k}(\mu-\mu_{j_r})}\Big), \tag{2}$$

где $V_{j_rj_s}=(P\omega_{j_r},\omega_{j_s})$, $s=\begin{cases} r+1, & r<k,\\ 1, & r=k.\end{cases}$

Предельные абсолютные погрешности найденных первых собственных чисел оператора $T+P$ зависят от того, как точно вычислены суммы числовых рядов Релея – Шредингера $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0)$ поправок теории возмущения оператора $T+P$. В статье [3] найдены аналитические формулы вычисления первых четырех поправок $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ для случая однократного спектра оператора $T+P$, а в работе [4] формулы вычисления первых трех поправок для случая кратного спектра оператора $T+P$.

По мере возрастания количества m_0 собственных чисел оператора $T+P$, которые небходимо найти, величины сумм $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0)$ и их необходимая точность вычисления резко возрастают. Поэтому нахождение сумм Релея – Шредингера путем суммирования его членов является бесперпективным способом, так как для вычисления k-й поправки необходимо находить суммы k кратных рядов. В связи этим был разработан новый численный метод приближенного вычисления сумм Релея – Шредингера, позволяющий находить их без почленного суммирования [2].

1. Теоретические положения метода регуляризованных следов

Обоснование метода РС, в основном было сделано в работах Дубровского В. В., Кадченко С. И., Кравченко В. Ф. и Садовничего В. А. [1 – 18]. Приведем основные положения этого обоснования.

Прежде всего отметим, что при выполнении условий теоремы 1 линейный оператор $T+P$ является дискретным, и при этом внутри окружности T_{n_0} находится одинаковое количество собственных чисел операторов T и $T+P$ [19].

Теорема 1. *Пусть T дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если существует натуральное число n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T + P$ являются решениями системы m_0 нелинейных алгебраических уравнений (1).*

Лемма 1. *Если T дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то оператор $\int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1}\Big[PR_\mu(T)\Big]^k d\mu$ не более чем n_0k-мерен.*

Теорема 2. *Пусть T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если существует натуральное число n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то для поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ оператора $T + P$ справедливы оценки*

$$|\alpha_k^{(p)}(m_0)| \leq n_0 p \rho_{n_0}^p q^k, \quad q = \min_{n \geq n_0} |\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|, \quad \forall k, p \in N.$$

Теорема 3. *Пусть T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если существует натуральное число n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ поправок теории возмущений оператора $T + P$ абсолютно сходятся.*

Теорема 4. *Пусть T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если оператор $T+P$ положительно определен в H, и система координатных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом H, тогда метод Бубнова – Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных чисел спектральной задачи*

$$(T + P)\varphi = \beta\varphi, \tag{3}$$

построенный на этой системе функций, сходится.

Доказательство. Запишем уравнение (2) в виде

$$(T + P - \lambda E)\varphi = (\beta - \lambda)\varphi. \tag{4}$$

Для дискретного оператора $T + P$ существует резольвентный оператор $R_\lambda(T + P) = (T + P - \lambda E)^{-1}$, который вполне непрерывен в H [19]. Действуя слева на обе части уравнения (4) оператором $R_\lambda(T + P)$, получим

$$\varphi = (\beta - \lambda)R_\lambda(T + P)\varphi. \tag{5}$$

На основании [20], метод Бубнова – Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных чисел уравнения (5), а, следовательно, и уравнения (3), сходится. □

Допустим, что система собственных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является базисом H. Приближенное решение спектральной задачи (3), следуя методу Бубнова – Галеркина, будем искать в виде [20]

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \omega_k. \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнение (3), получим

$$\sum_{k=1}^{m} a_k (T+P)\omega_k = \widetilde{\beta}(m) \sum_{k=1}^{m} a_k \omega_k.$$

Здесь $\widetilde{\beta}(m)$ – m-е приближения по Бубнову – Галеркину к соответствующим собственным числам β оператора $T+P$. Так как $T\omega_k = \mu_k \omega_k$, то

$$\sum_{k=1}^{m} a_k (\mu_k + P)\omega_k = \widetilde{\beta}(m) \sum_{k=1}^{m} a_k \omega_k.$$

Коэффициенты $\{a_k\}_{k=1}^m$ определяются из требования, чтобы левая часть последнего уравнения была ортогональна к функциям $\{\omega_k\}_{k=1}^m$. В результате получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^m$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \Big\{ [\widetilde{\beta}(m) - \mu_k]\delta_{kn} - (P\omega_k, \omega_n) \Big\} = 0, \ n = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Приравняв определитель системы (7) к нулю, приходим к уравнению

$$\det \|\widetilde{\beta}(m)\mathbf{E} - \mathbf{A}\| = 0,$$

определяющему приближенные значения первых m собственных чисел $\{\widetilde{\beta_k}(m)\}_{k=1}^m$ оператора $T+P$. Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица размера $m \times m$, $\mathbf{A} = \|a_{kn}\|_{k,n=1}^m$, $a_{kn} = \mu_k \delta_{kn} + (P\omega_k, \omega_n)$, δ_{kn} – символ Кронекера. Известно [21], что для собственных чисел $\{\widetilde{\beta}_k(m)\}_{k=1}^m$ матрицы $\mathbf{A}$ справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{m} \widetilde{\beta}_k^p(m) - Sp\ \mathbf{A}^p = 0, \quad p = \overline{1, m}, \tag{8}$$

где $Sp\ \mathbf{A}^p$ – след p-й степени матрицы $\mathbf{A}$. Обозначим

$$\begin{gathered} \widetilde{\Delta}_{kp}(m) = \beta_k^p - \widetilde{\beta}_k^p(m), \ k, p = \overline{1, m}, \\ \Delta_p(m) = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{\Delta}_{kp}(m). \end{gathered} \tag{9}$$

Очевидно, что если операторы T и P удовлетворяют требованиям теоремы 1, то

$$\lim_{m\to\infty} |\widetilde{\Delta}_{kp}(m)| = \lim_{m\to\infty} |\beta_k^p - \widetilde{\beta}_k^p(m)| = 0, \quad \forall k, p \in N,$$

$$\lim_{m\to\infty} |\Delta_p(m)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |\widetilde{\Delta}_{kp}(m)| = 0.$$

Теорема 5. *Пусть T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, а P – линейный ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом* *пространстве H. Допустим, что система собственных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является базисом H. Если существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{m=0}^{p-1} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} + \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} + \Delta_p(m_0),$$

$$|\Delta_1(m_0)| \leq \Big| \sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0) \Big| + n_0 \rho_{n_0} \frac{q^{t_1+1}}{1-q}, \ q = \min_{n \geq n_0} |\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|, \ t_1 \in N, \tag{10}$$

$$|\Delta_p(m_0)| \leq \Big| \sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \Big(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} +$$

$$+ \sum_{\substack{j_2,\ldots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} \Big) \Big| + p n_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t_p+1}}{1-q}, \ p = \overline{2, m_0}, \ t_p \in N.$$

Здесь $\{\mu_k\}_{k=1}^{m_0}$ – собственные числа оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{\omega_k\}_{k=1}^{m_0}$ – его ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным числам, $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$, ν_n – кратность собственного числа μ_n оператора T, $\Delta_p(m_0) = \sum\limits_{k=1}^{m_0} \widetilde{\Delta}_{kp}(m_0)$, $\widetilde{\Delta}_{kp}(m_0) = \beta_k^p - \widetilde{\beta}_k^p(m_0)$, $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ – собственные числа оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности, $\{\widetilde{\beta}_k(m_0)\}_{k=1}^{m_0}$ – приближенные значения по Бубнову – Галеркину соответствующих собственных чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ оператора $T+P$, $a_{km} = \mu_k \delta_{km} + V_{km}$, $V_{km} = (P\omega_k, \omega_m)$, $\rho_{n_0} = \dfrac{|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|}{2}$, $r = \begin{cases} s+1, \ s \neq p, \\ 1, \ s = p. \end{cases}$

Доказательство. Если выполнены условия теоремы, то для первых m_0 собственных чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ справедливы уравнения (1)

$$\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0). \tag{11}$$

Тогда из (11), (8) и (9) при $m = m_0$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = Sp\mathbf{A}^p - \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \Delta_p(m_0), \ p = \overline{1, m_0}. \tag{12}$$

Вычисляя следы матриц $\mathbf{A}^p$, $p = \overline{1, m_0}$,

$$Sp\ \mathbf{A}^p = \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} = \sum_{k=1}^{m_0} a_{kk}^p + \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_0} (\mu_k + V_{kk})^p + \sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_0} \Big(\mu_k^p + \sum_{m=0}^{p-1} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} \Big) + \sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r},$$

равенства (11) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{m=0}^{p-1} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} + \sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} + \Delta_p(m_0), \tag{13}$$

где $C_p^m = \dfrac{p!}{m!(p-m)!}$ — число сочетаний из p различных элементов по m. Воспользовавшись (12), найдем

$$\alpha_1^{(1)}(m_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0} V_{kk} + \Delta_1(m_0),$$

$$\alpha_1^{(p)}(m_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = p \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^{p-1} V_{kk} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} + \sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} + \Delta_p(m_0), \ p = \overline{2, m_0}.$$

Используя явную запись первой поправки теории возмущений $\alpha_1^{(1)}(m_0)$, получим

$$\Delta_1(m_0) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(m_0),$$

$$\Delta_p(m_0) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \Big(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} +$$

$$+ \sum_{\substack{j_2,\dots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} \Big), \ p = \overline{2, m_0}.$$

Тогда

$$|\Delta_1(m_0)| \le \Big| \sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0) \Big| + \sum_{k=t_1+1}^{\infty} \Big| \alpha_k^{(1)}(m_0) \Big|,$$

$$|\Delta_p(m_0)| \le \Big| \sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \Big(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} + \tag{14}$$

$$+\sum_{\substack{j_2,\ldots,j_p=1\\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0}\prod_{s=1}^{p}a_{j_sj_r}\Big)\Big|+\sum_{k=t_p+1}^{\infty}\left|\alpha_k^{(p)}(m_0)\right|,\ p=\overline{2,m_0},\ t_p\in N.$$

Применяя оценки поправок теории возмущений, имеем

$$\sum_{k=t_p+1}^{\infty}\left|\alpha_k^{(p)}(m_0)\right|\leq pn_0\rho_{n_0}^p\frac{q^{t_p+1}}{1-q},\ p,t_p\in N. \tag{15}$$

Окончательно из (14) и (15) имеем

$$|\Delta_1(m_0)|\leq\Big|\sum_{k=2}^{t_1}\alpha_k^{(1)}(m_0)\Big|+n_0\rho_{n_0}\frac{q^{t_1+1}}{1-q},\ t_1\in N,$$

$$|\Delta_p(m_0)|\leq\Big|\sum_{k=2}^{t_p}\alpha_k^{(p)}(m_0)-\sum_{j_1=1}^{m_0}\Big(\sum_{m=0}^{p-2}C_p^m\mu_{j_1}^mV_{j_1j_1}^{p-m}+$$

$$+\sum_{\substack{j_2,\ldots,j_p=1\\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0}\prod_{s=1}^{p}a_{j_sj_r}\Big)\Big|+pn_0\rho_{n_0}^p\frac{q^{t_p+1}}{1-q},\ p=\overline{2,n_0},\ t_p\in N.$$

□

Замечание 1. Если поправки $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ в оценках (10) не вычислять, то их необходимо ослабить, положив $t_p=1$. В этом случае

$$|\Delta_1(m_0)|\leq m_0\rho_{n_0}\frac{q^2}{1-q},$$

$$|\Delta_p(m_0)|\leq\Big|\sum_{j_1=1}^{m_0}\Big(\sum_{m=0}^{p-2}C_p^m\mu_{j_1}^mV_{j_1j_1}^{p-m}+$$

$$+\sum_{\substack{j_2,\ldots,j_p=1\\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0}\prod_{s=1}^{p}a_{j_sj_r}\Big)\Big|+pn_0\rho_{n_0}^p\frac{q^2}{1-q},\ p=\overline{2,m_0}.$$

Известно, что сложности, возникающие в линейной теории устойчивости течения вязкой жидкости, в значительной мере связаны с математической проблемой нахождения собственных чисел несамосопряженных операторов. Кроме того, нахождение приближенных значений первых собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда является трудной задачей вычислительной математики, поэтому проверку нового метода РС приближенного вычисления первых собственных чисел дискретных операторов мы провели на этой задаче.

2. Спектральная задача Орра – Зоммерфельда

Рассмотрим плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными плоскостями, которые могут двигаться параллельно друг другу с постоянными скоростями, а могут быть неподвижными. В последнем случае течение жидкости осуществляется за счет градиента гидродинамического давления. Возьмем декартову систему координат с осью Oy, направленной перпендикулярно плоскостям, уравнения которых есть $y = 0$ и $y = 2b$. Предположим, что наблюдатель движется вместе с нижней плоскостью. Обозначим через U_s скорость верхней плоскости относительно нижней, а через U_c – скорость в середине промежутка между плоскостями ($y = b$), когда последние неподвижны. Введем характерные величины

$$U_* = \frac{1}{2}U_s + U_c,\ \ L_* = 2b.$$

Тогда скорость $\overline{u}(y)$ основного течения вязкой жидкости в безразмерной форме можно записать в виде [22]

$$U(y) = 4\frac{U_c}{U_*}y(1-y) + \frac{U_s}{U_*}y, \quad 0 \le y \le 1.$$

В случае двумерного возмущения получаем спектральную задачу Орра – Зоммерфельда [22]

$$(T_o^2 + U_o - \beta T_o)\varphi = 0, \tag{16}$$

$$\varphi(y)\Big|_{y=0,1} = \frac{d\varphi(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0, \tag{17}$$

где $T_o = -\dfrac{d^2}{dy^2}+\alpha^2$; $U_o = i\alpha R\Big(UT_o+\dfrac{d^2U}{dy^2}\Big)$; $\beta = i\alpha Rc$ – комплексный спектральный параметр; $\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны возмущения.

Введем оператор G_o:

$$G_o = T_o^2 + U_o - \beta T_o, \tag{18}$$

заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$. К области определения D_{G_o} оператора G_o отнесем все функции φ класса $C^4(0,1)\bigcap C^1[0,1]$, $\dfrac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0,1]$, удовлетворяющие граничным условиям (18):

$$D_{G_o} = \Big\{\varphi \mid \varphi \in C^4(0,1)\bigcap C^1[0,1], \frac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0,1],$$

$$\varphi(y)\Big|_{y=0,1} = \frac{d\varphi(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0\Big\}.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор T_{o_1}, положив

$$T_{o_1}\varphi = \Big(-\frac{d^2}{dy^2} + \alpha^2\Big)\varphi$$

с областью определения

$$D_{T_{o_1}} = \Big\{\varphi \mid \varphi \in C^4(0,1)\bigcap C^1[0,1], \frac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0,1],\ \varphi(y)\Big|_{y=0,1} = 0\Big\}$$

и неоднородную краевую задачу

$$\begin{gathered} T_{o_1}\varphi = f(y),\ 0 < y < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Теорема 6. *Решение задачи (19) в области $D_{T_{o_1}}$ единственно и выражается формулой*

$$\varphi(y) = \frac{1}{\alpha}\Big\{\frac{\operatorname{sh}(\alpha y)}{\operatorname{sh}(\alpha)}\int\limits_0^1 \operatorname{sh}[\alpha(1-\xi)]f(\xi)d\xi - \int\limits_0^y \operatorname{sh}[\alpha(y-\xi)]f(\xi)d\xi\Big\}.$$

Замечание 2. Так как задача (19) имеет единственное решение в области $D_{T_{o_1}}$, то оператор T_{o_1}, обратим и его обратный оператор $T_{o_1}^{-1}$ имеет вид:

$$\begin{gathered} T_{o_1}^{-1} f = \frac{1}{\alpha}\Big\{\frac{\operatorname{sh}(\alpha y)}{\operatorname{sh}(\alpha)}\int\limits_0^1 \operatorname{sh}[\alpha(1-\xi)]f(\xi)d\xi - \\ - \int\limits_0^y \operatorname{sh}[\alpha(y-\xi)]f(\xi)d\xi\Big\}. \end{gathered} \tag{20}$$

Непосредственно применять наш метод к нахождению первых собственных чисел спектральной задачи (16), (17) нельзя, так как оператор $U_o = i\alpha R\Big(UT_o + \dfrac{d^2U}{dy^2}\Big)$ не является ограниченным на $L_2[0,1]$. Но можно построить вспомогательную задачу, у которой множество собственных чисел совпадает с множеством собственных чисел спектральной задачи (16), (17) и к которой применим разработанный метод. Для этого сделаем замену $\varphi = T_{o_1}^{-1} f$, тогда

$$G_o\varphi = (T_o^2 + U_o - \beta T_o)T_{o_1}^{-1} f.$$

Лемма 2. *На множестве функций D_{T_o}*

$$D_{T_o} = \Big\{f \mid f \in C^2(0,1), \frac{d^2 f}{dy^2} \in L_2[0,1] : \frac{dT_{o_1}^{-1} f(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0\Big\}$$

выполняются равенства

$$T_o T_{o_1}^{-1} f = f, \tag{21}$$

$$T_{o_1}^{-1} T_o f(y) = f(y) - \frac{\operatorname{sh}(\alpha y)}{\operatorname{sh}\alpha} f(1) - \Big[\operatorname{ch}(\alpha y) - \operatorname{cth}\alpha \operatorname{sh}(\alpha y)\Big] f(0). \tag{22}$$

Лемма 3. *Так как $T_o T_{o_1}^{-1} f = f$ и $T_{o_1}^{-1} T_o f \neq f$, то на множестве D_{T_o} оператор $T_{o_1}^{-1}$ является «правым» обратным оператором для оператора T_o.*

Используя лемму 2, имеем

$$G_o\varphi = \Big(T_o^2 + U_o - \beta T_o\Big)T_{o_1}^{-1} f = \Big(T_o + U_o T_{o_1}^{-1} - \beta\Big) f.$$

Следовательно уравнение (16) можно записать в виде

$$\Big(T_o + P_o\Big) f = \beta f.$$

Здесь $f = T_{o_1}\varphi$, $P_o = i\alpha R(U + \dfrac{d^2U}{dy^2} T_{o_1}^{-1})$, $\beta = i\alpha Rc$. При этом граничные условия $\varphi(y)\Big|_{y=0,1} = 0$ удовлетворяются тождественно, а граничные условия $\dfrac{d\varphi(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0$ примут вид $\dfrac{dT_{o_1}^{-1} f(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0$. Очевидно, что множества собственных чисел спектральной задачи

$$\Big(T_o + P_o\Big) f = \beta f,\ f \in D_{T_o}, \tag{23}$$

где $D_{T_o} = \Big\{ f \mid f \in C^2(0,1), \dfrac{d^2 f}{dy^2} \in L_2[0,1], \dfrac{dT_{o1}^{-1} f(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0 \Big\}$ и задачи (16), (17) совпадают, а их собственные функции связаны соотношениями $\varphi = T_{o1}^{-1} f$, и $f = T_{o1}\varphi$.

Теорема 7. *Для нормы оператора P_o, заданного в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, справедлива оценка*

$$\|P_o\| \le \alpha R \Big[\max_{0\le y\le 1} |U(y)| + \frac{1}{\alpha^2} \max_{0\le y\le 1} \Big| \frac{d^2 U(y)}{dy^2} \Big| \Big]. \tag{24}$$

Замечание 3. Из оценки (23) следует, что оператор P_o является ограниченным в $L_2[0,1]$.

Найдем собственные числа и собственные функции следующей краевой задачи:

$$T_o \omega = \mu \omega,\ 0 < y < 1, \tag{25}$$

$$\frac{dT_{o1}^{-1}\omega(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0. \tag{26}$$

Теорема 8. *Спектральная задача* (25), (26) имеет множество собственных чисел:

$$\{\alpha^2 + q_n^2\}_{n=1}^{\infty} \tag{27}$$

и множество собственных функций:

$$\Big\{ C_{2n} \Big[\frac{\alpha(\cos q_n - \operatorname{ch}\alpha)}{q_n \operatorname{sh}\alpha - \alpha \sin q_n} \sin(q_n y) + \cos(q_n y) \Big] \Big\}_{n=1}^{\infty}, \tag{28}$$

где числа q_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$4\alpha e^{-\alpha} q - 2\alpha \Big(1 + e^{-2\alpha}\Big) q \cos q + \Big(1 - e^{-2\alpha}\Big)\Big(\alpha^2 - q^2\Big) \sin q = 0. \tag{29}$$

Замечание 4. Множество собственных чисел $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (25), (26) *не имеет конечных предельных точек. При этом все собственные числа вещественные, неотрицательные и простые.*

Замечание 5. Собственные функции задачи (25), (26) всегда можно выбрать вещественными.

Теорема 9. *Собственные функции (28) оператора T_o, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.*

Доказательство. Пусть μ_n и μ_k $(n \ne k)$ собственные числа, а $\omega_n(y)$ и $\omega_k(y)$ соответствующие им собственные функции задачи (25), (26). Запишем уравнение (25) в виде

$$\frac{d^2\omega(y)}{dy^2} + q^2 \omega(y) = 0,$$

где $q^2 = \mu - \alpha^2$, $\mu > \alpha^2$, q – корень трансцендентного уравнения (29). Тогда функции $\omega_n(y)$ и $\omega_k(y)$ являются решениями соответствующих уравнений

$$\frac{d^2\omega_n(y)}{dy^2} + q_n^2 \omega_n(y) = 0,$$

$$\frac{d^2\omega_k(y)}{dy^2} + q_k^2\omega_k(y) = 0.$$

Первое из этих уравнений умножим на $\omega_k(y)$, а второе – на $\omega_n(y)$, затем вычтем почленно одно из другого и проинтегрируем на отрезке $[0,1]$. В результате получим

$$\int\limits_0^1 \Big[\omega_k(y)\frac{d^2\omega_n(y)}{dy^2} - \omega_n(y)\frac{d^2\omega_k(y)}{dy^2} + (q_n^2 - q_k^2)\omega_n(y)\omega_k(y)\Big]dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big\{\frac{d}{dy}\Big[\omega_k(y)\frac{d\omega_n(y)}{dy} - \omega_n(y)\frac{d\omega_k(y)}{dy}\Big] + (q_n^2 - q_k^2)\omega_n(y)\omega_k(y)\Big\}dy =$$

$$= \Big[\omega_k(y)\frac{d\omega_n(y)}{dy} - \omega_n(y)\frac{d\omega_k(y)}{dy}\Big]\Big|_0^1 + (q_n^2 - q_k^2)\int\limits_0^1 \omega_n(y)\omega_k(y)dy = 0.$$

Используя лемму 2, имеем равенство

$$\omega_n(y) = T_{o_1}^{-1}T_o\omega_n(y) + \frac{\operatorname{sh}(\alpha y)}{\operatorname{sh}\alpha}\omega_n(1) + \Big[\operatorname{ch}(\alpha y) - \operatorname{cth}\alpha\operatorname{sh}(\alpha y)\Big]\omega_n(0).$$

Тогда

$$\Big[\omega_k(y)\frac{d\omega_n(y)}{dy} - \omega_n(y)\frac{d\omega_k(y)}{dy}\Big]\Big|_0^1 = \Big[\omega_k(y)\frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_n(y)}{dy} -$$

$$-\omega_n(y)\frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_k(y)}{dy}\Big]\Big|_0^1 + \alpha\Big\{\omega_k(y)\Big\langle\frac{\operatorname{ch}(\alpha y)}{\operatorname{sh}\alpha}\omega_n(1) + \Big[\operatorname{sh}(\alpha y) -$$

$$- \operatorname{cth}\alpha\operatorname{ch}(\alpha y)\Big]\omega_n(0)\Big\rangle - \omega_n(y)\Big\langle\frac{\operatorname{ch}(\alpha y)}{\operatorname{sh}\alpha}\omega_k(1) + \Big[\operatorname{sh}(\alpha y) -$$

$$- \operatorname{cth}\alpha\operatorname{ch}(\alpha y)\Big]\omega_k(0)\Big\rangle\Big\}\Big|_0^1 = \Big[\omega_k(y)\frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_n(y)}{dy} -$$

$$-\omega_n(y)\frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_k(y)}{dy}\Big]\Big|_0^1.$$

Так как ω_k и ω_n являются решением (25), то

$$\frac{dT_{o_1}^{-1}T_o\omega_n(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = \mu_n\frac{dT_{o_1}^{-1}\omega_n(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0.$$

Поэтому

$$\Big[\omega_k(y)\frac{d\omega_n(y)}{dy} - \omega_n(y)\frac{d\omega_k(y)}{dy}\Big]\Big|_0^1 = 0.$$

Значит,

$$(q_n^2 - q_k^2)\int\limits_0^1 \omega_n(y)\omega_k(y)dy = 0,$$

а так как $q_n \neq q_k$, то

$$\int\limits_0^1 \omega_n(y)\omega_k(y)dy = 0,\ n \neq k.$$

$\square$

Замечание 6. Числа $\{C_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, входящие в (28), *находятся из условий нормировки* $\int\limits_0^1 \omega_n(y)\omega_k(y)dy = \delta_{nk}$ (δ_{nk} - *символ Кронекера*) *собственных функций задачи* (25), (26).

Теорема 10. *Оператор T_o с областью определения D_{T_o} является дискретным в $L_2[0,1]$.*

Обозначим через L_{T_o} подпространство $L_2[0,1]$ элементами которого являются собственные функции спектральной задачи (25), (26).

Замечание 7. Поскольку все собственные числа μ задачи (25), (26) положительные, то для всех $\omega \in L_{T_o}$, $L_{T_o} \subset L_2[0,1]$ имеем

$$(T_o\omega, \omega) = \mu(\omega, \omega) > 0.$$

Следовательно, оператор T_o положительный на L_{T_o}, а значит он полуограниченный снизу.

Разделив уравнение (29) на q^2

$$\frac{4\alpha e^{-\alpha}}{q} - 2\alpha\Big(1 + e^{-2\alpha}\Big)\frac{\cos q}{q} + \Big(1 - e^{-2\alpha}\Big)\Big(\frac{\alpha^2}{q^2} - 1\Big)\sin q = 0$$

и переходя к пределу при $q \to \infty$, имеем

$$\sin q = 0.$$

Следовательно, при $q >> 1$ корни q_n трансцендентного уравнения (29) приближенно равны $n\pi$, то есть

$$q_n \approx n\pi, \ n >> 1.$$

Поэтому собственные числа μ_n спектральной задачи (25), (26) при $n >> 1$ приближенно равны

$$\mu_n \approx \alpha^2 + n^2\pi^2. \tag{30}$$

Так как $\mu_n \approx \alpha^2 + q_n^2$, то

$$\rho_n = \frac{|\mu_{n+1} + \mu_n|}{2} \approx \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2 + \alpha^2}{2}. \tag{31}$$

При $n >> 1$

$$\rho_n \approx \pi^2 n^2 + \alpha^2. \tag{32}$$

Для нахождения приближенных значений первых m_0 собственных чисел $\{\widetilde{\beta}_n(t_p)\}_{n=1}^{m_0}$ задачи (23) воспользуемся приближенным аналогом нелинейной системы m_0 уравнений (1)

$$\sum_{k=1}^{m_0} \Big[\widetilde{\beta}_k(t_p)\Big]^p = \widetilde{s}_p(t_p), \ t_p \in N, \ p = \overline{1, m_0}, \tag{33}$$

где

$$\widetilde{s}_p(t_p) = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0).$$

Предельные абсолютные погрешности $\delta_{\widetilde{s}_p}$, с которыми записаны уравнения в системе (33) оцениваются неравенствами

$$\delta_{\widetilde{s}_1} \le \sum_{k=2}^{t} |\alpha_k^{(1)}(m_0)| + n_0\rho_{n_0}\frac{q^{t+1}}{1-q}, \ t \in N,$$

$$\delta_{\widetilde{s}_p} \le \Big| \sum_{k=2}^{t} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \Big(\sum_{m=1}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} +$$
$$+ \sum_{j_2,\dots,j_p=1}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} V_{j_s j_r} \Big) \Big| + pn_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t+1}}{1-q},\ p = \overline{2, m_0},\ t \in N.$$

Скалярные произведения $V_{km} = (P_o \omega_k, \omega_m)$ для $\forall k, m \in N$ вычисляются по формулам

$$V_{km} = i\alpha R \Big\{ \int_0^1 U(y)\omega_k(y)\omega_m(y)dy + \frac{U''}{\alpha^2 + q_k^2} \Big[\delta_{km} - \frac{1}{\alpha^2 + q_m^2} \times$$
$$\times \Big\langle \omega_k(1) \Big(\alpha \operatorname{cth} \alpha\ \omega_m(1) + q_m(C_{2m} \sin q_m - C_{1m} \cos q_m) \Big) - \tag{34}$$
$$- \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \Big(C_{2m}\omega_m(1) + C_{2k}\omega_m(1) \Big) + q_m C_{1m} C_{2k} + \alpha C_{2m} C_{2k} \operatorname{cth} \alpha \Big\rangle \Big] \Big\}.$$

Здесь $C_{2n} = \dfrac{q_n \operatorname{sh} \alpha - \alpha \sin q_n}{\alpha(\cos q_n - \operatorname{ch} \alpha)} C_{1n}$. Обозначим $W_{km} = \dfrac{V_{km}}{i\alpha R}$. Из формул, по которым вычисляются поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$, имеем

$$\alpha_k^{(p)}(m_0) = \Big(i\alpha R \Big)^k \frac{p}{k} \sum_{n=1}^{m_0} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{\infty} \Big(\prod_{m=1}^{k} W_{j_m j_s} \Big) \times$$
$$\times \operatorname*{res}_{\mu_n} \Big(\frac{\mu^{p-1}}{\prod_{m=1}^{k} (\mu - \mu_{j_m})} \Big)$$

или

$$\alpha_k^{(p)}(m_0) = \Big(i\alpha R \Big)^k \gamma_k^{(p)}(m_0), \tag{35}$$

где

$$\gamma_k^{(p)}(m_0) = \frac{p}{k} \sum_{n=1}^{m_0} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{\infty} \Big(\prod_{m=1}^{k} W_{j_m j_s} \Big) \operatorname*{res}_{\mu_n} \Big(\frac{\mu^{p-1}}{\prod_{m=1}^{k} (\mu - \mu_{j_m})} \Big).$$

Тогда систему уравнений (33) для нахождения приближенных значений первых m_0 собственных чисел $\{\widetilde{c}_n(t_p)\}_{n=1}^{m_0}$ спектральной задачи (23) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{m_0} \widetilde{c}_k^p(t_p) = \frac{1}{(i\alpha R)^p} \Big[\sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{t_p} \Big(i\alpha R \Big)^k \gamma_k^{(p)}(m_0) \Big],\ p = \overline{1, m_0}. \tag{36}$$

Величины $\gamma_k^{(p)}(m_0)$ не зависят от числа Рейнольдса R для $\forall m_0, k, p \in N$, поэтому их значения можно использовать при вычислении собственных чисел $\{\widetilde{c}_n(t_p)\}_{n=1}^{m_0}$ задачи Орра – Зоммерфельда для различных R. При этом должно выполняться неравенство

$$\frac{2\|P_o\|}{\mu_{m_0+1} - \mu_{m_0}} = \frac{2\|P_o\|}{q_{m_0+1}^2 - q_{m_0}^2} < 1.$$

По лемме 3, получим

$$\frac{2\|P_o\|}{q_{m_0+1}^2 - q_{m_0}^2} \le \frac{2\alpha R \Big[\max\limits_{0 \le y \le 1} |\overline{u}(y)| + \dfrac{1}{\alpha^2} \max\limits_{0 \le y \le 1} |\overline{u}''(y)| \Big]}{q_{m_0+1}^2 - q_{m_0}^2} < 1.$$

Отсюда

$$R < \frac{q_{m_0+1}^2 - q_{m_0}^2}{2\alpha\Big[\max\limits_{0\le y\le 1}|\overline{u}(y)| + \dfrac{1}{\alpha^2}\max\limits_{0\le y\le 1}|\overline{u}''(y)|\Big]}.$$

При $m_0 >> 1$, имеем

$$R < \frac{\pi^2(m_0+1)}{\alpha\Big[\max\limits_{0\le y\le 1}|\overline{u}(y)| + \dfrac{1}{\alpha^2}\max\limits_{0\le y\le 1}|\overline{u}''(y)|\Big]}$$

или

$$m_0 > \frac{\alpha R}{\pi^2}\Big[\max_{0\le y\le 1}|\overline{u}(y)| + \frac{1}{\alpha^2}\max_{0\le y\le 1}|\overline{u}''(y)|\Big]. \tag{37}$$

Неравенство (37) позволяет оценить количество первых собственных чисел $\{\widetilde{c}_n(t_p)\}_{n=1}^{m_0}$ задачи Орра – Зоммерфельда, которые необходимо вычислять, чтобы удовлетворялась система уравнений (33).

3. Численные эксперименты

Нами было показано, что множества собственных чисел спектральных задач (16), (17) и (23) совпадают. Проиллюстрируем это, вычислив несколько первых собственных чисел задач (16), (17) и (23) для некоторых значений числа Рейнольдса R и α, используя метод Бубнова – Галеркина. Доказательство сходимости метода Бубнова – Галеркина, построенного на системе функций (38), при нахождении собственных чисел задачи Орра – Зоммерфельда (16), (17) впервые было дано в работе Г. И. Петрова [23] и познее приводилось многими авторами в различных формах [24]. Приближенные значения собственных чисел (16), (17) будем обозначать $\widehat{c}$, а задачи (23) $\widetilde{c}$. Рассмотрим систему функций $\{\varphi_s(y)\}_{s=1}^{\infty}$

$$\varphi_s(y) = b_{1s}\sin(q_s y) + b_{2s}\cos(q_s y) + b_{3s}e^{y} + b_{4s}e^{-y},\ y \in [0,1], \tag{38}$$

которую впервые предложил Г. И. Петров [23]. Здесь

$$b_{1s} = \frac{\alpha(\operatorname{ch}\alpha - \cos q_s)}{\alpha\sin q_s - q_s\sin\alpha}b_{2s},\ b_{3s} = -\frac{\alpha\sin q_s + q_s(e^{-\alpha} - \cos q_s)}{2(\alpha\sin q_s - q_s\sin\alpha)}b_{2s},$$

$$b_{4s} = -\frac{\alpha\sin q_s - q_s(e^{\alpha} - \cos q_s)}{2(\alpha\sin q_s - q_s\sin\alpha)}b_{2s},\ q_s - \text{ корни уравнения (28).}$$

Коэффициенты b_{2s} находятся из условий нормировки. Эти функции являются решениями краевой задачи

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi + \mu(\varphi'' - \alpha^2\varphi) = 0,$$

$$\varphi(y)\Big|_{y=0,1} = \frac{d\varphi(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0.$$

Введем две последовательности конечномерных пространств

$$D_{G_o}^{(n)} \subset D_{G_o},\ D_{T_o}^{(n)} \subset D_{T_o}$$

с базисами $\{\varphi_s\}_{s=1}^{n}$ и $\{\omega_s\}_{s=1}^{n}$, соответственно, где

$$D_{G_o} = \Big\{\varphi \mid \varphi \in C^4(0,1)\bigcap C^1[0,1], \frac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0,1],$$

$$\varphi(y)\Big|_{y=0,1} = \frac{d\varphi(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0\Big\},$$

$$D_{T_o} = \Big\{ f \mid f \in C^2(0,1), \frac{d^2 f}{dy^2} \in L_2[0,1], \frac{dT_{o_1}^{-1} f(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0 \Big\},$$

ω_s – собственные функции (25), (26). Тогда приближения по Бубнову – Галеркину спектральной задачи Орра – Зоммерфельда (16), (17) ищутся в виде

$$\varphi^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} b_s^{(n)} \varphi_s,$$

а (23) в виде

$$f^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} a_s^{(n)} \omega_s.$$

Причем коэффициенты $b_s^{(n)}$ выбираются так, чтобы невязка $G_o\varphi^{(n)}$ была ортогональна всем элементам из $D_{G_o}^{(n)}$, а коэффициенты $a_s^{(n)}$ выбираются так, чтобы невязка $(T_o + P_o - \beta) f^{(n)}$ была ортогональна всем элементам из $D_{T_o}^{(n)}$, то есть

$$(G_o\varphi^{(n)}, \varphi_m) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \int\limits_0^1 \Big\{ T_o^2[\varphi_k(y)] + i\alpha R \Big\langle [U(y) - \widehat{c}\ ] T_o[\varphi_k(y)] +$$

$$+ U''(y)\varphi_k(y) \Big\rangle \Big\} \varphi_m(y) dy = 0,$$

$$\Big((T_o + P_o - \beta) f^{(n)}, \omega_m \Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \int\limits_0^1 \Big\{ T_o[\omega_k(y)] + i\alpha R \Big\langle [U(y) -$$

$$- \widetilde{c}\ ]\omega_k(y) + U''(y) T_{o_1}^{-1}[\omega_k(y)] \Big\rangle \Big\} \omega_m(y) dy = 0, \ m = \overline{1,n}.$$

Отсюда приходим к следующим системам линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \Big\{ \frac{\mu_k}{i\alpha R} \delta_{km} + \int\limits_0^1 \Big[\mu_k U(y) \phi_k(y) + U''(y) \varphi_k(y) \Big] \times$$

$$\times \varphi_m(y) dy - \widehat{c}\ \delta_{km} \Big\} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \Big\{ \frac{\mu_k}{i\alpha R} \delta_{km} + \int\limits_0^1 \Big\langle \mu_k U(y) \omega_k(y) + U''(y) T_{o_1}^{-1}[\omega_k(y)] \Big\rangle \times$$

$$\times \omega_m(y) dy - \widetilde{c}\ \delta_{km} \Big\} = 0,$$

где $\phi_k = \dfrac{1}{\mu_k} T_o(\varphi_k)$, $\int\limits_0^1 \phi_k(y) \varphi_m(y) dy = \dfrac{\delta_{km}}{\mu_k}$, δ_{km} – символ Кронекера, $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные числа спектральной задачи (25), (26), занумерованные в порядке возрастания их величин. Приравняв к нулю определители этих систем, получим уравнения, определяющие приближенные значения собственных чисел задач (16), (17) и (23)

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{A} - \widehat{c}\ \mathbf{E}) = 0, \\ &\det(\mathbf{B} - \widetilde{c}\ \mathbf{E}) = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $\mathbf{A} = ||a_{km}||_{k,m=1}^{n}$, $\mathbf{B} = ||b_{km}||_{k,m=1}^{n}$,

$$a_{km} = \frac{\mu_k}{i\alpha R}\delta_{km} + \int\limits_0^1 \Big[\mu_k U(y)\phi_k(y) + U''(y)\varphi_k(y)\Big]\varphi_m(y)dy,$$

$$b_{km} = \frac{\mu_k}{i\alpha R}\delta_{km} + \int\limits_0^1 \Big\{\mu_k U(y)\omega_k(y) + U''(y)T_{o_1}^{-1}[\omega_k(y)]\Big\}\omega_m(y)dy,$$

$\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ – единичная матрица.

Используя уравнения (39), были вычислены собственные числа задач (16), (17) и (23), при $\alpha = 1$ для плоской задачи Куэтта ($U_s = 0,\ U_c = 1$, табл. 1) и плоской задачи Пуазейля ($U_s = 1,\ U_c = 0$, табл. 2). Через $n_{\widehat{c}}$ обозначена размерность пространства $D_{G_o}^{(n)}$, а через $n_{\widetilde{c}}$ – размерность пространства $D_{T_o}^{(n)}$. Для нахождения приближенных значений $\widehat{c}$ и $\widetilde{c}$ с необходимой точностью, размерность пространств $D_{G_o}^{(n)}$ и $D_{T_o}^{(n)}$ все время увеличивалась. Процесс счета продолжался до тех пор, пока $\max\limits_{1\le j\le n} |\widehat{c}_j^{(n+1)} - \widehat{c}_j^{(n)}|$ и $\max\limits_{1\le j\le n} |\widetilde{c}_j^{(n+1)} - \widetilde{c}_j^{(n)}|$ были больше заданной точности. При помощи переменной среды Digits увеличивалась длина мантисы для операций с плавающей запятой, которая определялась числами $\varepsilon_{\widehat{c}}$, $\varepsilon_{\widetilde{c}}$.

Таблица 1

R	j	$n_{\widehat{c}}$	$\varepsilon_{\widehat{c}}$	$\widehat{c}_j$	$n_{\widetilde{c}}$	$\varepsilon_{\widetilde{c}}$	$\widetilde{c}_j$	$\lvert\widehat{c}_j - \widetilde{c}_j\rvert$
	1			$0,5000 - 3,8607i$			$0,5000 - 3,8613i$	$0,0006$
	2	Г′		$0,5000 - 8,1155i$			$0,5000 - 8,1085i$	$0,0070$
10	3	28	65	$0,5000 - 15,7051i$	27	45	$0,5000 - 15,7048i$	$0,0003$
	4			$0,5000 - 23,9062i$			$0,5000 - 23,9054i$	$0,0008$
	5			$0,5000 - 35,4450i$			$0,5000 - 35,4449i$	$0,0001$
	1			$0,3835 - 0,1216i$			$0,3922 - 0,1251i$	$0,0093$
	2			$0,6166 - 0,1216i$			$0,6078 - 0,1258i$	$0,0098$
1000	3	41	65	$0,3380 - 0,2964i$	41	65	$0,3387 - 0,2941i$	$0,0024$
	4			$0,6520 - 0,2964i$			$0,6510 - 0,2941i$	$0,0025$
	5			$0,5000 - 0,3169i$			$0,5000 - 0,3202i$	$0,0033$
	1			$0,0981 - 0,0324i$			$0,0971 - 0,0326i$	$0,0010$
	2			$0,0487 - 0,0337i$			$0,0491 - 0,0344i$	$0,0008$
40000	3	45	75	$0,1030 - 0,0658i$	45	75	$0,1036 - 0,0652i$	$0,0009$
	4			$0,8960 - 0,0658i$			$0,8964 - 0,0652i$	$0,0007$
	5			$0,8505 - 0,0861i$			$0,8511 - 0,0868i$	$0,0009$

Таблица 2

R	j	$n_{\widehat{c}}$	$\varepsilon_{\widehat{c}}$	$\widehat{c}_j$	$n_{\widetilde{c}}$	$\varepsilon_{\widetilde{c}}$	$\widetilde{c}_j$	$\lvert\widehat{c}_j - \widetilde{c}_j\rvert$
	1			$0,4103 - 0,4219i$			$0,4158 - 0,4294i$	$0,0093$
	2			$0,5768 - 0,8376i$			$0,5790 - 0,8386i$	$0,0022$
	3			$0,6131 - 1,5562i$			$0,6111 - 1,5517i$	$0,0049$
100	4	35	45	$0,6324 - 2,3853i$	35	45	$0,6368 - 2,3821i$	$0,0054$
	5			$0,6467 - 3,5387i$			$0,6408 - 3,5370i$	$0,0061$
	6			$0,6542 - 4,7590i$			$0,6519 - 4,7547i$	$0,0049$
	7			$0,6554 - 6,3047i$			$0,6519 - 6,3041i$	$0,0036$
	1			$0,1516 - 0,0097i$			$0,1517 - 0,0091i$	$0,0006$
	2			$0,8956 - 0,1161i$			$0,8882 - 0,1114i$	$0,0088$
	3			$0,8874 - 0,1105i$			$0,8889 - 0,1133i$	$0,0032$
4000	4	61	75	$0,2481 - 0,1514i$	61	75	$0,2410 - 0,1564i$	$0,0087$
	5			$0,7943 - 0,1957i$			$0,7988 - 0,2003i$	$0,0064$
	6			$0,7988 - 0,2004i$			$0,8005 - 0,2051i$	$0,0050$
	7			$0,4327 - 0,2351i$			$0,4351 - 0,2293i$	$0,0063$

Результаты численных расчетов, приведенные в таблицах 1 и 2, показывают, что в рамках заданной точности первые собственные числа спектральных задач (16), (17) и (23) совпадают.

Формула (2) позволяет вычислять k-е поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ любого порядка $p \in N$. По мере возрастания порядка k *вычислительная эффективность* CE алгоритма нахождения поправок теории возмущения $\alpha_k^{(p)}(m_0)$, которую можно определить по формуле $CE = \dfrac{1}{\varepsilon t}$($\varepsilon$ – ошибка приближенного решения, а t – время исполнения алгоритма), резко уменьшается. Это связано с тем, что формулы (2) содержат k-е числовые ряды. Поэтому для создания эффективных алгоритмов вычисления сумм рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ был разработан новый метод (теорема 5), который прост в численной реализации. Рассмотрим два способа вычисления числовых рядов Релея – Шредингера. Первый способ связан с нахождением соответствующей поправки $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ по формуле (2) и получении k-й частичной суммы. Второй способ основан на теореме 5. Сравним эти методы, на примере задачи Орра – Зоммерфельда. Для этого воспользуемся системой уравнений (36).

Обозначим $S_p(m_0) = \dfrac{1}{\left(i\alpha R\right)^p} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(i\alpha R\right)^k \widetilde{\alpha}_k^{(p)}(m_0)$, $\widetilde{\alpha}_k^{(p)}(m_0) = \dfrac{\alpha_k^{(p)}(m_0)}{i\alpha R}$, а через $\widehat{S}_p(m_0)$ и $\widetilde{S}_p(m_0)$, приближенные значения $S_p(m_0)$, найденые первым методом и вторым соответственно. В таблицах 3 и 4 приведены результаты вычислений $\widehat{S}_p(m_0)$ и $\widetilde{S}_p(m_0)$ для плоского течения Куэтта ($U_s = 1,\ U_c = 0$) и плоского течения Пуазейля ($U_s = 0,\ U_c = 1$) соответственно при $\alpha = 1$. Сравнение результатов вычисления частичных сумм числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ по двум методикам проведено при небольших числах Рейнольдса R. Это связано с тем, что при больших R первая методика мало эффективна.

Таблица 3

R	m_0	p	$\widehat{S}_p(m_0)$	$\widetilde{S}_p(m_0)$	$\lvert\widehat{S}_p(m_0) - \widetilde{S}_p(m_0)\rvert$
50	5	1	$2,5000 - 0,1892i$	$2,5000$	$0,0189$
		2	$1,3982 - 17,4733i$	$1,5725 - 17,4060i$	$0,1868$
		3	$-128,4493 - 14,1255i$	$-128,2074 - 16,4061i$	$2,2935$
		4	$-143,1619 + 992,0460i$	$-158,2618 + 987,1761i$	$15,8658$
		5	$7714,1731 + 1465,3043i$	$7700,5554 + 1492,7429i$	$30,6319$
100	4	1	$2,00000 + 0,0287i$	$2,0000$	$0,0287$
		2	$1,53352 - 5,2584i$	$1,2335 - 5,1584i$	$0,0355$
		3	$-12,73298 - 4,5588i$	$-12,6330 - 4,7588i$	$0,0689$
		4	$-15,44513 + 31,8955i$	$-15,5998 + 31,8971i$	$0,1546$

Расчеты показывают, что в рамках принятой точности результаты вычислений по двум методикам хорошо согласуются.

Сравним результаты вычисления собственных чисел задачи Орра – Зоммерфельда, найденные методом РС, с полученными ранее. При этом необходимо учитывать, что при рассмотрении плоского течения Куэтта, большинство авторов считали, что профиль скорости основного течения $U(y)$ имеет вид $U(y) = y$ $(-1 \le y \le 1)$. В качестве масштаба скорости они брали полуразность скоростей пластин, а в качестве масштаба длины - половину зазора между ними. Поэтому в таких задачах число Рейнольдса R_* в четыре раза меньше, чем число Рейнольдса R в нашей работе.

Таблица 4

R	m_0	p	$\widehat{S}_p(m_0)$	$\widetilde{S}_p(m_0)$	$\lvert\widehat{S}_p(m_0)-\widetilde{S}_p(m_0)\rvert$
50	5	1	$2,8849+0,0198i$	$2,8839$	$0,0198$
		2	$1,9118-21,4958i$	$1,9734-21,5080i$	$0,0628$
		3	$-162,080-21,5336i$	$-162,0070-22,8619i$	$1,3304$
		4	$-215,2717+1256,3154i$	$-229,1901+1253,4464i$	$14,2113$
		5	$9718,7045+2172,2163i$	$9777,6327+2196,4840i$	$63,7296$
100	4	1	$2,2463+0,0093i$	$2,2438$	$0,0097$
		2	$1,4680-6,2158i$	$1,4448-6,1892i$	$0,0354$
		3	$-15,6159-6,2290i$	$-15,6879-6,3538i$	$0,1441$
		4	$-22,2070+39,2121i$	$-22,0645+39,3310i$	$0,1851$

В таблице 5 приведены значения мнимых частей c_1^* и $\widetilde{c}_1$ – первых собственных чисел плоской задачи Куэтта, взятые из работы [25] и вычисленные методом РС соответственно при $\alpha = 1$ и различных числах Рейнольдса R.

Таблица 5

R_*	$-Imc_1^*$	$-Im\widetilde{c}_1$	$\lvert Imc_1^*-Im\widetilde{c}_1\rvert$
1	$9,306$	$9,656$	$0,350$
$9,85$	$0,956$	$1,013$	$0,057$
$49,9$	$0,288$	$0,359$	$0,071$
$60,3$	$0,312$	$0,319$	$0,007$
$66,3$	$0,384$	$0,304$	$0,080$
103	$0,286$	$0,249$	$0,037$
314	$0,184$	$0,149$	$0,035$
900	$0,124$	$0,104$	$0,020$
3140	$0,0786$	$0,0753$	$0,0033$
8950	$0,0542$	$0,0560$	$0,0018$
34000	$0,0340$	$0,0378$	$0,0038$

Из таблицы 5 видно, что в рамках допустимых погрешностей результаты расчетов хорошо согласуются.

Отметим, что первые собственные числа задачи Орра – Зоммерфельда, найденные методом РС, также сравнивались с результатами вычислений методом Бубнова – Галеркина. Во всех случаях результаты хорошо согласуются.

Проведенные численные эксперименты по нахождению первых собственных чисел плоских задач Куэтта и Пуазейля показали высокую эффективность, разработанного нового метода.

Литература

1. Садовничий, В. А. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский // Тр. семинара И. Г. Петровского. – М., 1994. – Вып. 17. – С. 244 – 248.

2. Кадченко, С. И. Вычисление сумм рядов Рэлея – Шредингера возмущенных самосопряженных операторов / С. И. Кадченко // Журн. числит. математики и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1494 – 1505.

3. Кадченко, С. И. Новый метод вычисления первых собственных чисел дискретных несамосопряженных операторов / С. И. Кадченко // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 42 – 59.

4. Кинзина, И. И. Нахождение собственных чисел возмущенных дискретных операторов / И. И. Кинзина // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика, Механика, Информатика. – 2008. – Вып. 10, № 6(107) – С. 34 – 43.
5. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения между параллельными плоскостями при малых числах Рейнольдса / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко // ДАН России. – 1997. – Т. 335, № 5. – С. 600 – 604.
6. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи Орра – Зоммерфельда с помощью теории регуляризованных следов / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // Электромагнит. волны и электрон. системы. – 1997. – Т. 2, № 6. – С. 13 – 19.
7. Вычисление первых собственных чисел дискретного оператора / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // Электромагнит. волны и электрон. системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 6 – 8.
8. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко // Дифференц. уравнения. – 1998. – № 1. – С. 50 – 53.
9. Вычисление собственных чисел задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при небольших числах Рейнольдса / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко // ДАН России. – 1998. – Т. 363, № 6. – С. 748 – 750.
10. Первые собственные числа задачи Орра – Зоммерфельда из теории гидродинамической устойчивости / В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко // УМН. – 1998. – Т. 53, в. 4 (322). – С. 138.
11. Дубровский, В. В. Вычисление первых собственных чисел задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В. В. Дубровский // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 742 – 746.
12. Кадченко, С. И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / С. И. Кадченко // Электромагнит. волны и электрон. системы – 2000.– Т. 5,№ 6, – С. 4 – 10.
13. Кадченко, С. И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / С. И. Кадченко // Электромагнит. волны и электрон. системы. – 2000. – Т. 5, № 6. – С. 4 – 10.
14. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН России. – 2001. – Т. 378, № 4. – С. 443 – 446.
15. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН России. – 2001. – Т. 380, № 2. – С. 160 – 163.
16. Новый метод вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической теории устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН России. – 2001. – Т. 381, № 3. – С. 320 – 324.
17. Новый метод вычисления первых собственных чисел дискретных несамосопряженных операторов / С. И. Кадченко // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 42 – 59.

18. Кадченко, С. И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С. И. Кадченко, И. И. Кинзина // Журн. числит. математики и мат. физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265 – 1272.
19. Садовничий, В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. – М.: Дрофа, 2004.
20. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Гостехтеориздат, 1957.
21. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988.
22. Линь Цая-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости / Линь Цая-цзяо. – М.: ИЛ, 1958.
23. Петров, Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости / И. Г. Петров // ПММ. – 1940. – Т. 4, вып. 3. – С. 3 – 11.
24. Нейман-Заде, М. И. О вычислении собственных значений задачи Орра – Зоммерфельда / М. И. Нейман-Заде, Ф. Ф. Шкаликов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8, № 1. – С. 301 – 305.
25. Штерн, В. Н. Устойчивость плоского течения Куэтта: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Н. Штерн. – Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР, 1970.

Кафедра прикладной математики и вычислительной техники,
Магнитогорский государственный университет
kadchenko@masu.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2009 г.