УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Н.П. Семенова

THE INITIAL-FINITE PROBLEM FOR HOFF'S EQUATIONS ON GEOMETRICAL GRAPH

N.P. Semenova

Статья посвящена исследованию однозначной разрешимости начально-конечной задачи для уравнения Хоффа на конечном связном ориентированном графе.

Ключевые слова: уравнение Хоффа, начально-конечная задача, относительно p-ограниченные операторы, конечный связный ориентированный граф

The article is devoted to the study of unique solvability of initial-finite problem for Hoff's equations on a finite connected oriented grarh.

Keywords: Hoff's equation, initial-finite problem, relatively p-bounded operators, finite connected oriented graph

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен замкнут и плотно определен). Введем в рассмотрение *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^l(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M [1].

Теорема 1. *[1] Пусть оператор M (L,p)-ограничен. Тогда существуют проекторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ такие, что $L \in \mathcal{L}(\ker P;\ker Q) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im}P;\mathrm{im}Q)$ и $M \in \mathcal{C}l(\ker P;\ker Q) \cap \mathcal{C}l(\mathrm{im}P;\mathrm{im}Q)$.*

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}\, P$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}\, Q$. Тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$. Через $L_0(M_0)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^0$, ($\mathrm{dom}\, M_0 = \mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^0$.)

Теорема 2. *[2] Пусть $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{ex}(M)$, причем $\sigma^L_{in}(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$. Тогда существуют проекторы $P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ такие, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in};\ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im}P_{in};\mathrm{im}Q_{in})$ и $M \in \mathcal{C}l(\ker P_{in};\ker Q_{in}) \cap \mathcal{C}l(\mathrm{im}P_{in};\mathrm{im}Q_{in})$.*

Проекторы P_{in} и Q_{in} имеют вид $P_{in} = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu$, $Q_{in} = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu$, где контур $\gamma = \partial\Omega$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теорем (1) и (2). Тогда $P_{in}P = PP_{in} = P_{in}$ и $Q_{in}Q = QQ_{in} = Q_{in}$.*

Положим $P_{ex} = P - P_{in}$, в силу следствия (1) $P_{ex} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор. Возьмем $T \in \mathbb{R}_+$, u_0, $u_T \in \mathfrak{U}$ и рассмотрим задачу

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0 \tag{1}$$

для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{2}$$

Вектор-функцию $u \in C^1((0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2), назовем его *решением*; решение $u = u(t)$ уравнения (2) назовем *решением задачи* (1), (2), если $\lim\limits_{t\to 0+} P_{ex}(u(t) - u_0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to T-} P_{in}(u(t) - u_T) = 0$.

Положим $\operatorname{im} P_{in(ex)} = \mathfrak{U}^1_{in(ex)}$, $\operatorname{im} Q_{in(ex)} = \mathfrak{F}^1_{in(ex)}$. По построению $\mathfrak{U}_{in} \oplus \mathfrak{U}_{ex} = \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}_{in} \oplus \mathfrak{F}_{ex} = \mathfrak{F}^1$.

Теорема 3. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен и выполнены условия теоремы 2. Тогда для любых $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$ и вектор-функции $f = f(t), t \in [0,T]$, такой, что $f^0 \in C^p([0,T];\mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0,T);\mathfrak{F}^0)$, $f^{in} \in C([0,T];\mathfrak{F}^1_{in})$, $f^{ex} \in C([0,T];\mathfrak{F}^1_{ex})$ существует единственное решение задачи (1)-(2), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} G^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t) + U_{in}^{t-T} u_T - \int\limits_t^T R_{in}^{t-s} f^{in}(s)ds + U_{ex}^t u_0 + \int\limits_0^t R_{ex}^{t-s} f^{ex}(s)ds.$$

Здесь $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f$, $f^{in(ex)} = Q_{in(ex)}f$, $G = M_0^{-1}L_0$, $U_{in}^t = (2\pi i)^{-1} \int\limits_\gamma R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu$, $R_{in}^t = (2\pi i)^{-1} \int\limits_\gamma (\mu l - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$

История задачи (1) начинается с одной стороны в [3], где она названа задачей Веригина, а с другой стороны и независимо – в [4], где она названа задачей сопряжения. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов P_{in} и P_{ex} рассматриваются спектральные проекторы оператора L, причем L вдобавок предполагается самосопряженным. Наш подход основан на концепции относительного спектра, предложенной Г.А. Свиридюком. Первые результаты в этом направлении изложены в [5], где рассмотрен частный случай задачи (1), причем с более жесткими, чем здесь, условиями на L-спектр оператора M. В [6] рассмотрена задача (1), но для тех же условий на L-спектр оператора M, что и в [5], однако для (L,p)-ограниченного оператора M отмечена возможность большего произвола в относительно спектральных условиях. В [7] результаты [6] распространены на случай (L,p)-радиального оператора M. Нам кажется, что наиболее удобным будет эту задачу называть *начально-конечной.*

Пусть теперь $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество ребер, – конечный связный ориентированный граф, причем каждому его ребру E_j сопоставлены два положительных числа l_j, d_j, которые удобно трактовать как длину и площадь поперечного сечения соответственно. Такой граф $\mathbf{G}$ предложено называть *геометрическим* [8]. Пусть на каждом ребре E_j заданы линеаризованные уравнения Хоффа, которые моделируют динамику выпучивания конструкции из двутавровых балок

$$\lambda u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + f_j. \tag{3}$$

Здесь параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$ характеризует свойства материала балки, а параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ – вертикальную нагрузку. Нас интересуют решения уравнения (3) удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \tag{4}$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$; $(E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ – множество ребер с началом (концом) в вершине $V_i)$, а также

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{5}$$

Условия (4) требуют непрерывности решений в вершинах графа, причем при этих условиях термин «отсутсвовать» не значит «быть равным нулю». Например, если в вершину V_i все ребра «входят», то первые два равенства в (4) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Условие (5) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю.

Впервые уравнения в частных производных на геометрических графах начали изучаться в конце прошлого века в связи с моделированием процессов «реакции-диффузии» в трубчатых реакторах, а также динамики давления и влагопереноса в «тонких» областях. Первая монография [8] по классическим дифференциальным уравнениям на геометрических графах вышла в 2004 г. Первая статья [9], в которой рассмотрены уравнения соболевского типа на графах, появилась в 2002 г. Первая диссертация [10], в которой описаны фазовые пространства некоторых уравнений соболевского типа, заданных на графах, защищена в 2005 г. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа на графе была рассмотрена в [11].

Чтобы редуцировать задачу (3) – (5) к задаче (1) – (2), ведем в рассмотрение банаховы пространства $\mathfrak{F} = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ и $\mathfrak{V} = \{v = (v_1, v_2, ..., v_j, ...) : v_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено (4)$\}$. Пространство $\mathfrak{F}$— гильбертово со скалярным умножением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

а пространство $\mathfrak{V}$— банахово с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{jx}^2 + v_j^2) dx.$$

В силу теорем вложения Соболева функции из W_2^1 абсолютно непрерывны, поэтому пространство $\mathfrak{V}$ определено корректно.

Обозначим через $\mathfrak{V}^*$ сопряженное к $\mathfrak{V}$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство и формулой

$$\langle Au, v \rangle = - \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx} v_{jx}, \quad u, v \in \mathfrak{V}$$

зададим оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}^*)$. Спектр оператора A неположителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$. Занумеруем собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора A по невозростанию с учетом кратности.

Введем в рассмотрение еще одно банахово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^2(0, l_j)$ и выполняются (4), (5)$\}$ с нормой

$$\|u\|_u^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2) dx$$

Формулой $B : u \to (u_{1xx}, u_{2xx}, ..., u_{jxx}, ...)$, зададим оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. При всех $u \in \mathfrak{U}$ $Bu = Au$. Выберем $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и построим оператор $L = \lambda + B$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а его спектр $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$. Оператор M зададим формулой $Mu = \alpha u$, для всех $u \in \mathfrak{U}$.

Лемма 1. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

Таким образом редукция задачи (3) – (5) к задаче (1) – (2) закончена. Итак, все условия теоремы 3 выполнены, и поэтому справедлива

Теорема 4. *При любых* $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$, $f \in \mathfrak{F}$ *существует единственное решение* $u \in C([0,T];\mathfrak{U}) \cap C^1((0,T);\mathfrak{U})$ *задачи (4), (5) для уравнения (3).*

Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators/ Fedorov, V.E. – Utrecht: VSP, 2003. – 228 p.
2. Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 1997.
3. Панков, А.А. Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной / А.А. Панков, Т.Е. Панкова // Докл. Акад. наук Украины. – 1993. – № 9. – С. 18 – 20.
4. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
5. Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т.38, № 12. – С. 1646 – 1652.
6. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
7. Загребина, С.А. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)-радиальным оператором / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева // Вестн. МаГУ. Сер. «Математика». – 2006. – Вып. 9. – С. 17 – 27.
8. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В.Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. – М.: Физматлит, 2004.
9. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах/ Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
10. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.В. Шеметова – Магнитогорск, 2005.
11. Загребина, С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова для уравнения соболевского типа на графе / С.А. Загребина // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск, 2006. – 1 (12). – С. 42 – 49.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
npsemenova@rambler.ru

Поступила в редакцию 17 марта 2010 г.