УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

А.А. Замышляева, А.В. Юзеева

THE INITIAL-FINISH VALUE PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ – LÖVE EQUATION

A.A. Zamyshlyaeva, A.V. Yuzeeva

Рассматривается начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява, моделирующего продольные колебания балки. Проводится редукция к абстрактной начально-конечной задаче для уравнения соболевского типа второго порядка. Получены теоремы об однозначной разрешимости исходной и абстрактной задач.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, фазовое пространство, M,N-функции, дифференциальные уравнения на графах, начально-конечная задача

We investigate the initial-finish value problem for the Boussinesq – Löve equation by reducing it to the initial-finish value problem for the Sobolev type equation of the second order. We obtain theorems about the unique solvability of such problems.

Keywords: the Sobolev type equations, the phase space, the M,N-functions, the differential equations defined on graphs,the initial-finish value problem

Введение

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ (т.е. оба линейны и непрерывны). Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \tag{1}$$

Вектор-функцию $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ назовем *решением* уравнения (1), если при подстановке в уравнение она обращает его в тождество. Решение $u = u(t)$ уравнения (1) назовем *решением задачи Коши*, если оно вдобавок удовлетворяет условию

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

где $u_0 \in \mathfrak{U}$ – некоторый, вообще говоря, произвольный вектор.

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$, то уравнение (1) тривиально редуцируется к уравнению

$$\dot{u} = Su, \tag{3}$$

где оператор $S = L^{-1}M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ по построению. Как нетрудно показать, единственное решение задачи (3), (2) существует при любом векторе $u_0 \in \mathfrak{U}$ и имеет следующий вид

$$u(t) = U^t u_0, \tag{4}$$

где оператор-функция $U^{\bullet} \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ задается рядом Тейлора

$$U^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k t^k}{k!}. \tag{5}$$

Поскольку оператор $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, то его спектр $\sigma(S)$ ограничен. Значит, существует контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$, ограничевающий круг, содержащий спектр. Нетрудно видеть, что оператор-функция (5) может быть представлена следующим образом:

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_{\mu}(S) e^{\mu t} d\mu, \tag{6}$$

где $R_{\mu}(S) = (\mu\mathbb{I} - S)^{-1}$ – резольвента оператора S. Данный подход к решению задачи (1), (2) может быть распространен и на случай необратимого оператора L. Мы будем использовать теорию и методы, разработанные в [1], хорошо проявившие себя в работах [2 – 5]. Следуя [1], введем в рассмотрение *L-резольвентное множество*

$$\rho^L(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\right\}$$

и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \backslash \rho^L(M)$ оператора M. Оператор M называется *(L, σ)-ограниченным*, если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \; \forall \mu \in \mathbb{C} \; (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Понятие (L, σ)-ограниченного оператора оказалось слишком широким для однозначной разрешимости задачи (1), (2); обычно вместо него используется понятие *(L, p)-ограниченного оператора*, где число $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ равно порядку полюса *L-резольвенты* $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M в точке ∞ (при $p = 0$ в точке ∞ – устранимая особая точка).

Итак, пусть оператор M (L, p)-ограничен. Тогда существует контур $\gamma \subset \mathbb{C}$, ограничивающий область, содержащую L-спектр оператора M. Аналогично (6) построим оператор-функцию

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R^L_M(S) e^{\mu t} d\mu, \tag{7}$$

где $R^L_{\mu}(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ – *правая L-резольвента* оператора M. В случае необратимости оператора L, но при условии (L, p)-ограниченности оператора M, существует единственное решение задачи (1), (2), но не для всех $u_0 \in \mathfrak{U}$, а только для тех, которые лежат в подпространстве $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} U^0$.

В [1] исследование задачи (1), (2) удалось распространить на неполное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = Bv, \tag{8}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{G})$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, причем оператор B (A, p)-ограничен. Единственное решение $v \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$ задачи Коши

$$\dot{v}(0) = v_1, v(0) = v_0 \tag{9}$$

для уравнения (8) представимо в виде

$$v(t) = V_1^t v_1 + V_0^t v_0, \tag{10}$$

где *пропагаторы* $V_k^t, k = 0, 1$, имеют следующий вид:

$$V_k^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \mu^{1-k} \left(\mu^2 A - B\right)^{-1} A e^{\mu t} d\mu, k = 0, 1. \tag{11}$$

Здесь контур $\gamma \in \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую A-спектр оператора B; а начальные значения $v_k \in \operatorname{im} V_1^0 = \operatorname{im} V_0^0, k = 0,1$, где $\operatorname{im} \dot{V}_1^0 = \operatorname{im} V_0^0$ – подпространство в $\mathfrak{V}$. Абстрактный результат иллюстрирован начально-краевой задачей для неполного уравнения Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha^2 \Delta v,$$

моделирующего продольные волны в упругой балке без учета поперечной инерции.

Нашей целью является изучение начально-конечной задачи для полного уравнения Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha^2 \Delta v_t + \beta^2 \Delta v, \tag{12}$$

моделирующего продольные волны в упругой балке с учетом поперечной инерции. Термин «начально-конечная задача» появился совсем недавно, и отражает он тот факт, что при постановке такой задачи для уравнения (1) часть данных задается в начале временно́го промежутка [0,T], а другая часть – в конце. Первоначально такая задача называлась «задачей сопряжения» или «задачей Веригина» и рассматривалась как обобщение задачи с данными на свободной поверхности. Именно в таком контексте была построена теория таких задач для линейных уравнений соболевского типа первого порядка и разработаны приложения этой теории [4].

В статье кроме Введения и Списка литературы содержится три параграфа. В п.1 приведены основные результаты теории операторных вырожденных M, N-функций [5]. В п.2, следуя [4], изучается абстрактная начально-конечная задача. П.3 посвящен постановке и исследованию начально-конечной задачи для уравнения (12).

1. Вырожденные M, N-функции

Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов (B_1, B_0).

Определение 1. *Множества* $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{U})\}$ *и* $\sigma^A(\vec{B}) = \mathbb{C} \setminus \rho^A(\vec{B})$ *будем называть A-резольвентным множеством и A-спектром пучка* $\vec{B}$.

Заметим, что множество $\rho^A(\vec{B})$ всегда открыто, поэтому A-спектр $\sigma^A(\vec{B})$ пучка $(\vec{B})$ всегда замкнут.

Определение 2. *Оператор-функцию* $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ *с областью определения* $\rho^A(\vec{B})$ *будем называть A-резольвентой пучка* $\vec{B}$.

A-резольвента пучка $\vec{B}$ всегда аналитична в своей области определения.

Определение 3. *Пучок операторов $\vec{B}$ называется полиномиально ограниченным относительно оператора A (или просто полиномиально A-ограниченным), если*

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{V})).$$

Если существует оператор $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{V})$, то пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен. Если $\ker A \bigcap (\bigcap\limits_{k=0}^{1} \ker B_k) \neq \{0\}$, то пучок $\vec{B}$ не будет полиномиально A-ограниченным.

Зафиксируем $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ – контур, ограничивающий круг, содержащий $\sigma^A(\vec{B})$. Введем и обсудим одно важное в дальнейшем условие. Если пучок $\vec{B}$ полиномиально

A-ограничен, то можно потребовать, что

$$\int\limits_{\gamma} R^A_\mu(\vec{B})d\mu = \mathbb{O}. \tag{A}$$

Это условие, впервые введенное в [5], оказалось ключевым при рассмотрении уравнений соболевского типа высокого порядка. Заметим, что если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})$, то условие (A) выполняется; а если оператор $A = \mathbb{O}$ и существует оператор $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})$, то нет.

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено (A). Тогда имеют смысл следующие операторы как интегралы от аналитических оператор-функций:

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mu R^A_\mu(\vec{B})Ad\mu,\ Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mu A R^A_\mu(\vec{B})d\mu.$$

Лемма 1. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A).Тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ — проекторы.*

Положим $\mathfrak{V}^0 = \ker P$, $\mathfrak{G}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{V}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{G}^1 = \operatorname{im} Q$. Из леммы следует, что $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1, \mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \oplus \mathfrak{G}^1$. Через A^k (B_l^k) обозначим сужение оператора A (B_l) на $\mathfrak{V}^k$, $k, l = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие (A).Тогда действия операторов расщепляются:*

(i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k;\mathfrak{G}^k)$, $k = 0, 1$;
(ii) $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k;\mathfrak{G}^k)$, $k, l = 0, 1$;
(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1;\mathfrak{V}^1)$;
(iv) существует оператор $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^0;\mathfrak{V}^0)$;

Теперь рассмотрим полное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v. \tag{13}$$

Вектор-функцию $v \in C^2(\mathbb{R};\mathfrak{V})$ назовем *решением* уравнения (13), если оно обращает (13) в тождество. Решение $v = v(t)$ уравнения (13) называется *решением задачи Коши*

$$\dot{v}(0) = v_1, v(0) = v_0, \tag{14}$$

если оно удовлетворяет (14).

Определение 4. *Оператор-функцию $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{G}))$ будем называть пропагатором уравнения (13), если для любого $v \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v$ будет решением этого уравнения.*

Рассмотрим семейства операторов

$$V_1^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^A_\mu(\vec{B})Ae^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$V_0^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^A_\mu(\vec{B})(\mu A - B_1)e^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Как показано в [5], оба эти семейства являются пропагаторами уравнения (13). Причем если контур $\gamma \subset \rho^A(\vec{B})$ и ограничивает область Γ, такую, что $\sigma^A(B) \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$, то в силу теоремы Коши $V_1^t = V_0^t = \mathbb{O}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и утверждение очевидно.

Определение 5. *Семейства $M^\bullet, N^\bullet : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называются семейством вырожденных M, N-функций уравнения (13), если*

(i) $M^\bullet$ и $N^\bullet$ — пропагаторы уравнения (13);

(ii) $M^0 = \dot{N}^0 = \mathbb{O}; \dot{M}^0 = N^0 = P$.

Лемма 2. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено условие (A). Тогда существует единственное семейство вырожденных M, N-функций уравнения (13), причем $M^t = V_1^t,\ N^t = V_0^t$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда при любых $v_k \in \mathfrak{V}^1, k = 0, 1$, существует единственное решение задачи (13), (14), представимое в виде: $v(t) = M^t v_1 + N^t v_0$.*

2. Абстрактная начально-конечная задача

Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$. Рассмотрим полное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v. \tag{15}$$

Если пучок $\vec{B} = (B_1, B_0)$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A), то, как следует из леммы 2, существует единственное семейство вырожденных M, N-функций уравнения (15), гарантирующих однозначную разрешимость задачи (15), (16). Пусть выполнено следующее условие:

$$\begin{array}{l} A\text{-спектр пучка } \vec{B}\ \sigma^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}) \bigcup \sigma_1^A(\vec{B}), \text{ причем} \\ \sigma_k^A(\vec{B}) \neq \emptyset,\ k = 0, 1; \text{ и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что} \\ \Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}),\ \bar{\Gamma}_0 \bigcap \sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset. \end{array} \tag{B}$$

Тогда существует следующий оператор:

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B}) A d\mu \in \mathfrak{L}(\mathfrak{V}).$$

Потребуем выполнение еще одного условия

$$\int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B}) d\mu = \mathbb{O}. \tag{A_0}$$

Аналогично лемме 1 можно получить следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(A), (B), (A_0)$. Тогда P_0 – проектор, причем $P_0 P = P P_0 = P_0$.*

Построим оператор $P_1 = P - P_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$. В силу леммы 2.1 оператор P_1 – проектор, причем $P_0 P_1 = P_1 P_0 = \mathbb{O}$. Возьмем произвольные векторы $v_0^0,\ v_1^0,\ v_0^T,\ v_1^T \in \mathfrak{V}$. Решение

$v = v(t)$ уравнения (15) назовем *решением начально-конечной задачи* для уравнения (15), если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} P_0(\dot{v}(0) - v_1^0) = 0,\ P_0(v(0) - v_0^0) = 0; \\ P_1(\dot{v}(T) - v_1^T) = 0,\ P_1(v(T) - v_0^T) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что если $\sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset$, то $P_1 = \mathbb{O}$ и $P_0 = P$. Тогда задача (16) для уравнения (15) превращается в задачу (13), (14).

Введем в рассмотрение следующие семейства операторов:

$$M_0^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})Ae^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$N_0^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1)e^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Оба семейства хоть и не являются семейством вырожденных M, N-функций в смысле определения 5 (так как не удовлетворяют условию (ii)), но тем не менее обладают рядом полезных свойств.

Лемма 4. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(B), (A_0)$. Тогда*

(i) $M_0^\bullet$ и $N_0^\bullet$ – пропагаторы уравнения (15);

(ii)$M_0^0 = \dot{N}_0^0 = \mathbb{O}, \dot{M}_0^0 = N_0^0 = P_0$.

Далее, возьмем произвольное число $T \in \mathbb{R}$ и построим следующие семейства операторов $M_1^t = M^{t-T} - M_0^{t-T},\ N_1^t = N^{t-T} - N_0^{t-T}$.

Лемма 5. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(A), (B), (A_0)$. Тогда*

(i)$M_1^\bullet$ и$N_1^\bullet$ – пропагаторы уравнения (15);

(ii)$M_1^T = \dot{N}_1^T = \mathbb{O}, \dot{M}_1^T = N_1^T = P_1$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда для любых $T \in \mathbb{R}, v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}$, $k = 0, 1$, существует единственное решение $v = v(t)$ задачи (15), (16), которое к тому же имеет следующий вид:*

$$v(t) = M_0^t v_1^0 + M_1^t v_1^T + N_0^t v_0^0 + N_1^t v_0^T. \tag{17}$$

Заметим, что если $T = 0$, то задача (16) превращается в задачу (14).

3. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Введем в рассмотрение пространства $\mathfrak{V} = \left\{v \in W_2^2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\right\}$ и $\mathfrak{G} = L_2(\Omega)$. Простанство $\mathfrak{V}$ — банахово с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V}}^2 = \int\limits_\Omega (\sum_{k,l=1}^n v_{x_k x_l}^2 + \sum_{k=1}^n v_{x_k}^2 + v^2)dx,$$

а пространство $\mathfrak{G}$ — гильбертово со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Формулой

$$\langle Lv, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} v_{x_k x_k} w dx, v, w \in \mathfrak{V},$$

зададим оператор $L : \mathfrak{V} \to \mathfrak{G}$. Справедлива

Теорема 4. *[6]Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$, его спектр $\sigma(L)$ вещественен, отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке $-\infty$.*

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений оператора L, занумерованных по невозрастанию с учетом кратности, а через φ_k – множество соответствующих собственных функций, ортонормированных в смысле $\mathfrak{G}$. Положим $A = \lambda - L, B_1 = \alpha(L - \lambda'), B_2 = \beta(L - \lambda'')$. Имеет место

Теорема 5. *[5] Пусть выполнено одно из следующих условий:*
(i) $\lambda \notin \{\lambda_k\}$;
(ii) $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda \neq \lambda')$;
(iii) $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.
Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ пучок $\vec{B} = (B_1, B_2)$ полиномиально A-ограничен.

Доказательство заключается в изучении A-спектра пучка $\vec{B}$. Во всех случаях A-спектр пучка $\vec{B}$ составляют решения уравнений

$$(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0, \ k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим A-спектр пучка $\vec{B}$ в зависимости от ситуации.

(i) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} = \dfrac{\alpha(\lambda_k - \lambda') \pm \sqrt{\alpha^2(\lambda' - \lambda_k)^2 - 4\beta(\lambda - \lambda_k)(\lambda'' - \lambda_k)}}{2(\lambda - \lambda_k)} \ : k \in \mathbb{N} \right\}.$

(ii) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\} \bigcup \left\{ \mu_l = \dfrac{\beta(\lambda_l - \lambda'')}{\alpha(\lambda' - \lambda_l)} : \lambda = \lambda_l \right\}.$

(iii) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\}.$

Замечание 1. Как нетрудно показать, в случае $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda = \lambda' = \lambda'')$ пучок $\vec{B}$ не будет полиномиально A-ограниченным.

Следствие 1. *[5]Пусть выполнено условие либо (i), либо (iii) теоремы 5. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеет место условие (A).*

Замечание 2. В случае (ii) теоремы 5

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} ((\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k))^{-1} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k d\mu =$$

$$\sum_{\lambda_k = \lambda} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\alpha(\lambda' - \lambda_k)} \neq \mathbb{O},$$

и поэтому условие (A) не выполняется.

Итак, в силу теоремы 5 и следствия 1 в случаях (i), (iii) пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A). Поэтому построим семейства вырожденных M, N-

функций уравнения (12). В случае (i) получим соответственно

$$M^t = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$N^t = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_k^2(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \right) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие членов с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$. Кроме M, N-функций для постановки начально-конечной задачи необходимы проекторы P и P_0. Построим проектор P:

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если выполнено (i);} \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda = \lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \text{ если выполнено (iii).} \end{cases}$$

Для построения проектора P_0 выберем область $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$, содержащую конечное множество точек A-спектра $\sigma_0^A(\vec{B})$ и такую, что $\partial\Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \emptyset$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$ – контур. По рецептам п.3 построим проектор

$$P_0 = \sum_{\lambda_k^i} \langle \cdot, \varphi_k^i \rangle \varphi_k^i$$

Здесь $\left\{\lambda_k^i\right\} = \left\{\lambda_k \in \sigma(L) : \mu_k^{1,2} \in \sigma_0^A(\vec{B}), \ \lambda_k \neq \lambda\right\}$.

Теперь у нас все готово для постановки и изучения начально-конечной задачи для уравнения (12). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^\infty$, $T \in \mathbb{R}_+$. В цилиндре $\Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v. \tag{18}$$

Вектор-функцию $v \in \mathbb{C}^2((0,T); \mathfrak{V})$ будем называть *решением уравнения*(18), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega u(\lambda - \Delta)v_{tt}dx = \int_\Omega u(\alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v)dx$$

при любом векторе $u \in \mathfrak{U}$. Теперь выберем произвольно векторы $v_k^0, \ v_k^T \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$. Решение $v = v(t)$ уравнения (18) назовем *решением начально-конечной задачи*, если

$$\begin{gathered} P_0(\dot{v}(0) - v_1^0) = 0, \ P_0(v(0) - v_0^0) = 0; \\ P_1(\dot{v}(T) - v_1^T) = 0, \ P_1(v(T) - v_0^T) = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь $P_1 = P - P_0$.

По рецептам п.2 построим вырожденные M_0, N_0-функции. Для этого введем в рассмотрение множество индексов $\mathfrak{K}$ элементов множества $\left\{\lambda_k^i\right\}$. Тогда

$$M_0^t = \sum_{k \in \mathfrak{K}} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$N_0^t = \sum_{k \in \mathfrak{K}} \left(\frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_k^2(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^2 t} \right) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Теперь в силу теорем 3, 5 и следствия 1 имеет место

Теорема 6. *При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таком, что выполнено условие либо (i), либо(iii) теоремы 4.2, и любых $T \in \mathbb{R}_+, v_k^0$, $v_k^T \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$, существует единственное решение задачи (18),(19), которое к тому же имеет вид (17).*

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и поддержку в работе.

Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
2. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т.16, вып. 2. – С.345 – 346.
3. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
4. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
5. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С.45 – 54.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
alzama@mail.ru

Поступила в редакцию 5 марта 2010 г.