УДК 517.977

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛУ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Н.М. Махмудов

ESTIMATION OF SPEED OF CONVERGENCE DIFFERENCE APPROXIMATIONS ON FUNCTIONAL IN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR LINEAR SCHRODINGER EQUATION

N.M. Mahtmudov

В этой работе устанавливается оценка погрешности аппроксимации и скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу в задаче оптимального управления для линейного уравнения Шредингера с критерием качества Лионса.

Ключевые слова: разностный метод, уравнение Шредингера, критерии качества Лионса, сходимость по функционалу

In this work the estimation of an error of approximation and speed of convergence of difference approximations on functional in an optimal control problem for a linear Schrodinger equation with Lions' criterion of quality is established.

Keywords: a difference method, a Schrodinger equations, Lions' criterion of quality, a convergence on functional

1. Постановка задачи

В этой работе рассматривается задача оптимального управления для линейного уравнения Шредингера с критерием качества Лионса, и к этой задаче применяется разностный метод. При этом устанавливается оценка скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу в рассматриваемой задаче оптимального управления. Подобные исследования ранее проведены в работах [1 – 5] для задач оптимального управления для уравнения Шредингера в другой постановке. Отметим, что ранее в работе [6], изучен вопрос сходимости разностного метода решения задачи оптимального управления для нелинейного уравнения Шредингера, где множество допустимых уравнений состоит из квадратично суммируемых функций. При этом, в отличие от настоящей работы, установлена оценка сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

Рассмотрим задачу о минимизации функционала:

$$J(v) = \int\limits_{\Omega} |\psi_1(x,\, t) - \psi_2(x,\, t)|^2\, dxdt \qquad (1)$$

на множестве $V \equiv \left\{ v = v(x) : v \in W_2^1(0, l), |v(x)| \le b_0, \left|\frac{dv(x)}{dx}\right| \le b_1, \overset{0}{\forall} x \in (0, l) \right\}$ при условиях

$$i\frac{\partial\psi_p}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2} - a(x)\psi_p - v(x)\psi_p = f_p(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\psi_p(x, 0) = \varphi_p(x), \quad p = 1, 2, \quad x \in (0, l), \tag{3}$$

$$\psi_1(0, t) = \psi_1(l, t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi_2(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial\psi_2(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, T), \tag{5}$$

где $i^2 = -1$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $b_1 > 0$ – заданные числа, $\Omega = (0, l) \times (0, T)$, $a(x)$ – ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \mu_0 \le a(x) \le \mu_1, \quad \left|\frac{da(x)}{dx}\right| \le \mu_2, \quad \overset{0}{\forall} x \in (0, l), \tag{6}$$

а функции $\varphi_k(x)$, $f_k(x, t)$, $k = 1, 2$ удовлетворяют условиям:

$$\varphi_1 \in W_2^3(0, l), \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_1''(0) = \varphi_1''(l) = 0,$$

$$\varphi_2 \in W_2^3(0, l), \quad \frac{d\varphi_2(0)}{dx} = \frac{d\varphi_2(l)}{dx} = 0, \tag{7}$$

$$f_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1.1}(\Omega), \quad f_2 \in W_2^{1.1}(\Omega), \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial t} \in L_2(\Omega), \quad p = 1, 2, \tag{8}$$

$\mu_i > 0$, $i = \overline{0, 2}$ – заданные числа.

Задачу об определении функций $\psi_k = \psi_k(x, t) \equiv \psi_k(x, t; v)$ из условий (2) – (5) при $v \in V$ назовем редуцированной задачей. Под решением этой задачи будем понимать функции $\psi_1 = \psi_1(x, t)$ и $\psi_2 = \psi_2(x, t)$, принадлежащие $B_1 \equiv C^0\left([0, T], W_2^2(0, l)\right) \cap C^1([0, T], L_2(0, l))$ и $B_2 \equiv C^0\left([0, T], W_2^2(0, l)\right) \cap C^1([0, T], L_2(0, l))$ соответственно и удовлетворяющие условиям (2) – (5) почти всюду. Из (2) – (5) ясно, что для функции $\psi_1 = \psi_1(x, t)$ задача (2) – (5) является первой краевой задачей, а для $\psi_2 = \psi_2(x, t)$ второй краевой задачей для уравнения Шредингера (2).

Исходя из результатов работ [2, 3] можем установить справедливость утверждения:

Теорема 1. *Редуцированная задача* (2) – (5) *имеет единственное решение* $\psi_1 \in B_1$, $\psi_2 \in B_2$, *и верны оценки:*

$$\|\psi_1(\cdot, t)\|_{\overset{0}{W}{}^2_{2(0,l)}} + \left\|\frac{\partial\psi_2(\cdot, t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} \le M_1\left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}^2_{2(0,l)}} + \|f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \tag{9}$$

$$\|\psi_2(\cdot, t)\|_{W_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi_2(\cdot, t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} \le M_2\left(\|\varphi_2\|_{\overset{0}{W}{}^2_{2(0,l)}} + \|f_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{10}$$

для $\forall t \in [0, T]$, *где* $M_1 > 0$ *и* $M_2 > 0$ *– постоянные не зависят от* φ_k, f_k, $k = 1, 2$.

Из условий (6) – (9) ясно, что функции $a(x)$, $\varphi_k(x)$, $f_k(x, t)$, $k = 1, 2$ являются более гладкими. Поэтому при $v \in V$ с помощью результатов работы [3] можем установить справедливость и следующих оценок:

$$\|\psi_1(\cdot, t)\|_{\overset{0}{W}{}^2_{2(0,l)}} + \left\|\frac{\partial\psi_1(\cdot, t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|\frac{\partial^2\psi_1(\cdot, t)}{\partial x\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} \le$$

$$\le M_3\left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}^2_{2(0,l)}} + \|f_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^2 f_1(\cdot, t)}{\partial x\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\right), \tag{11}$$

$$\|\psi_2(\cdot,\,t)\|_{W_2^3(0,\,l)}+\left\|\frac{\partial\psi_2(\cdot,\,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,\,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi_2(\cdot,\,t)}{\partial x\partial t}\right\|_{L_2(0,\,l)}\leq$$
$$\leq M_4\left(\|\varphi_2\|_{W_2^3(0,\,l)}+\|f_2\|_{W_2^{1,\,1}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 f_2(\cdot,\,t)}{\partial x\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{12}$$

для $\forall t\in[0,\,T]$, $\overset{0}{W}{}_2^3(0,\,l)\equiv W_2^3(0,\,l)\bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(0,\,l)$, где $M_3>0$ и $M_4>0$ — постоянные не зависят от φ_k, f_k, $k=1,\,2$.

С использованием результатов работы [2] можем утверждать, что имеет место:

Теорема 2. *Задача оптимального управления* (1) – (5) *имеет хотя бы одно решение.*

Произведя дискретизацию при каждом натуральном $n\geq 1$ рассмотрим задачу о минимизации функции:

$$I_n\left([v]_n\right)=\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}^1-\Phi_{jk}^2\right|^2 \tag{13}$$

на множестве $V_n\equiv\left\{[v]_n:\,[v]_n=(v_1,\,v_2,\,\ldots,v_{M-1})\,,\,v_j\leq b_0,\,j=\overline{1,\,M-1},\,|\delta_{\bar{x}}v_j|\leq b_1,\, j=\overline{2,\,M-1}\right\}$ при условиях:

$$i\delta_{\bar t}\Phi_{jk}^p+a_0\delta_{x\bar x}\Phi_{jk}^p-a^j\Phi_{jk}^p-v_j\Phi_{jk}^p=f_{jk}^p,\quad j=\overline{1,\,M-1},\quad k=\overline{1,\,N}, \tag{14}$$
$$\Phi_{j0}^p=\varphi_j^p,\quad j=\overline{0,\,M},\quad p=1,\,2, \tag{15}$$
$$\Phi_{0k}^1=\Phi_{Mk}^1=0,\quad k=\overline{1,\,N}, \tag{16}$$
$$\delta_{\bar x}\Phi_{1k}^2=\delta_{\bar x}\Phi_{Mk}^2=0,\quad k=\overline{1,\,N}, \tag{17}$$

где сеточные функции a^j, φ_j^p, f_{jk}^p, $p=1,\,2$ определены следующими формулами.

$$a_i^j=\frac{1}{h}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)dx,\quad j=\overline{1,\,M-1}, \tag{18}$$

$$\varphi_j^p=\frac{1}{h}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\varphi_p(x)dx,\quad j=\overline{1,\,M-1},\quad p=1,\,2,\quad \varphi_0^1=\varphi_M^1=0,\quad \delta_{\bar x}\varphi_1^2=\delta_{\bar x}\varphi_M^2=0, \tag{19}$$

$$f_{jk}^p=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}f_p(x,\,t)dxdt,\quad j=\overline{1,\,M-1},\quad k=\overline{1,\,N},\quad p=1,\,2. \tag{20}$$

Эти функции определены на сетке

$$\left\{(x_j,\,t_k)_n\right\},\quad n=0,\,1,\,2,\ldots,\quad x_j=jh-\frac{h}{2},\quad t_k=k\tau,j=\overline{1,\,M_n-1},\quad k=\overline{1,\,N_n},$$
$$h=h_n=\frac{l}{M_n-1},\quad \tau=\tau_n=\frac{T}{N_n},\quad \delta_{\bar t}\Phi_{jk}^p=\frac{\Phi_{jk}^p-\Phi_{j\,k-1}^p}{\tau},\quad \delta_{\bar x}\Phi_{jk}^p=\frac{\Phi_{jk}^p-\Phi_{j-1\,k}^p}{h},$$
$$\delta_x\Phi_{jk}^p=\frac{\Phi_{j+1\,k}^p-\Phi_{j\,k}^p}{h},\quad \delta_{x\bar x}\Phi_{jk}^p=\frac{\Phi_{j+1\,k}^p-2\Phi_{jk}^p+\Phi_{j-1\,k}^p}{h^2},\quad p=1,\,2.$$

Здесь верхний индекс не является степенью. Обозначим $M=M_n$, $N=N_n$.

Следует отметить, что задача об определении сеточной функции $\Phi^p_{jk} = \Phi^p_{jk}([v]_n)$ при каждом $[v_n] \in V_n$ из условий (14) – (17) является разностной схемой. Подобная разностная схема для нелинейного уравнения Шредингера изучена в работе [2]. Из этой работы в частном случае следует:

Теорема 3. *Для решения разностной схемы* (14) – (17) *при* $[v]_n \in V_n$ *верна оценка:*

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi^p_{jm}\right|^2 \le M_5\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi^p_j\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi^p_{jk}\right|^2\right), \quad p = 1,\,2 \tag{21}$$

для любого $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

2. Оценка погрешности разностной схемы

Основной целью настоящей работы является установление оценки о скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу в рассматриваемой задаче. Поэтому сначала оценим погрешность аппроксимации разностной схемы (14) – (17). С этой целью рассмотрим следующие усреднения решения редуцированной задачи (2) – (5), при $v \in V$:

$$\begin{gathered}
[\psi_p(x,t;v)]_n = \left\{\psi^p_{jk}\right\}, \quad \psi^p_{jk} = \frac{1}{h}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi_p(x,t_k)\,dx, \quad j=\overline{1,\,M-1}, \quad k=\overline{1,\,N},\\
\psi^p_{j0} = \varphi^p_j, \quad j=\overline{0,\,M}, \quad p=1,\,2,\\
\psi^1_{0k} = \psi^1_{Mk} = 0, \quad \psi^2_{0k} = \psi^2_{1k}, \quad \psi^2_{Mk} = \psi^2_{M-1k}, \quad k=\overline{1,\,N}.
\end{gathered} \tag{22}$$

Определим оператор Q_n на множестве V формулой:

$$Q_n(v) = \{w_j\}, \quad w_j = \frac{1}{h}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} v(x)dx, \quad j=\overline{1,\,M-1}. \tag{23}$$

Обозначим $[z^p]_n = \left\{z^p_{jk}\right\} = \left\{\Phi^p_{jk}\right\} - \left\{\psi^p_{jk}\right\}$. Ясно, что $\left\{z^p_{jk}\right\}$ будет решением следующей системы:

$$i\delta_{\bar t} z^p_{jk} + a_0\delta_{x\bar x} z^p_{jk} - a_j z^p_{jk} - v_j z^p_{jk} = F^p_{jk}, \quad j=\overline{1,\,M-1}, \quad k=\overline{1,\,N}, \tag{24}$$

$$z^p_{j0} = 0, \quad j=\overline{0,\,M}, \quad p=1,\,2, \tag{25}$$

$$z^1_{0k} = z^1_{Mk} = 0, \quad k=\overline{1,\,N}, \tag{26}$$

$$\delta_{\bar x} z_{1k} = \delta_{\bar x} z_{Mk} = 0, \quad k=\overline{1,\,N}, \tag{27}$$

где

$$F^p_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(a_0\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2} - a(x)\psi_p - v(x)\psi_p\right)dxdt + v_j\psi^p_{jk} - a_0\delta_{x\bar x}\psi^p_{jk} + a^j\psi^p_{jk},$$

$$j=\overline{1,\,M-1}, \quad k=\overline{1,\,N}, \quad p=1,\,2. \tag{28}$$

Теорема 4. *Пусть выполнено условие согласования:* $c_0 \le \frac{\tau}{h^2} \le c_1$, *где* c_0, $c_1 > 0$ *– постоянные, независящие от* h *и* τ. *Тогда верны оценки:*

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left| z_{jm}^{p} \right|^2 \le M_6 \left(\tau + h + \| Q_n(v) - [v]_n \|^2 \right), \quad p = 1,\, 2, \tag{29}$$

для $\forall m \in \{1,\, 2, \dots, N\}$, *где*

$$\| Q_n(v) - [v]_n \| = \left(h \sum_{j=1}^{M-1} |w_j - v_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Доказательство. Аналогично получению оценки (21) можно доказать справедливость оценки:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left| z_{jm}^{p} \right|^2 \le M_7 \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{p} \right|, \quad p = 1,\, 2, \tag{31}$$

$\forall m \in \{1,\, 2, \dots, N\}$.

Используя формулу (28), сеточную функцию F_{jk}^{p} можем представить в виде

$$F_{jk}^{p} = F_{jk}^{p1} + F_{jk}^{p2} + F_{jk}^{p3}, \quad p = 1,\, 2, \tag{32}$$

где F_{jk}^{p1}, F_{jk}^{p3} определены формулами,

$$F_{jk}^{p1} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \frac{a_0 \partial^2 \psi_p}{\partial x^2} dx dt - a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk}^{p}, \tag{33}$$

$$F_{jk}^{p3} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} a(x) \psi_p(x,\, t)\, dx dt - a_j \psi_{jk}^{p}, \quad j = \overline{1,\, M-1}, \quad k = \overline{1,\, N}, \quad p = 1,\, 2, \tag{34}$$

а F_{jk}^{p2} определяется формулой

$$F_{jk}^{p2} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} v(t) \psi_p(x,\, t)\, dx dt - v_k \psi_{jk}^{p}, \quad j = \overline{1,\, M-1}, \quad k = \overline{1,\, N}, \quad p = 1,\, 2. \tag{35}$$

Используя формулу (34) и (18), можем установить справедливость неравенств:

$$\left| F_{jk}^{p3} \right|^2 \le \frac{2\mu_1^2 \tau}{h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi_p(x,\, t)}{\partial t} \right|^2 dx dt + \frac{2\mu_1^2 h}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi_p(x,\, t)}{\partial x} \right|^2 dx dt,$$

$$j = \overline{1,\, M-1}, \quad k = \overline{1,\, N}, \quad p = 1,\, 2. \tag{36}$$

С помощью леммы Брэмбла – Гильберта [7] можем получить следующие неравенства:

$$\left|F_{jk}^{11}\right| \le M_8 a_0 h^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ a_0 \tau^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{j+1}-\frac{h}{2}}^{x_{j+1}+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^2 \psi_1 (x,\, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi_1 (x-h,\, t)}{\partial x \partial t} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^2 \psi_1 (x,\, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi_1 (x-h,\, t)}{\partial x \partial t} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (37)$$

$$\left|F_{jk}^{21}\right| \le M_9 a_0 h^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^3} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ a_0 \tau^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{j+1}-\frac{h}{(}2)}^{x_{j+1}+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^2 \psi_2 (x,\, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi_2 (x-h,\, t)}{\partial x \partial t} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^2 \psi_2 (x,\, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi_2 (x-h,\, t)}{\partial x \partial t} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad j = \overline{2,\, M-1}, \quad k = \overline{1,\, N}. \quad (38)$$

Далее с помощью формулы для сеточной функции F_{jk}^{p1}, $j = 1,\, M-1$, $k = \overline{1,\, N}$, $p = 1,\, 2$ имеем:

$$\left|F_{1k}^{11}\right| \le 2 a_0 \tau^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{3}{2}} \left[\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^2 \psi_1 (x,\, t)}{\partial x \partial t} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^2 \psi_1 (x,\, t)}{\partial x \partial t} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+ M_{19} \tau^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\left\| \frac{\partial^2 \psi_1 (\cdot,\, t)}{\partial x^2} \right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\| \frac{\partial^3 \psi_1 (\cdot,\, t)}{\partial x^3} \right\|^2_{L_2(0,l)} \right] dt \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ M_{11} \tau^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial^3 \psi_1 (x,\, t)}{\partial x^3} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,\, N}, \quad (39)$$

$$\left|F^{11}_{M-1k}\right| \leq 2a_0\tau^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{M-1}-\frac{h}{2}}^{x_{M-1}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi_1(x,\,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{M-2}-\frac{h}{2}}^{x_{M-2}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi_1(x,\,t)}{\partial x\partial t}\right|^2_{L_2(0,\,l)} dxdt\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+M_{12}\tau^{-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\left\|\frac{\partial^2\psi_1(\cdot,\,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,\,l)} + \left\|\frac{\partial^3\psi_1(\cdot,\,t)}{\partial x^3}\right\|^2_{L_2(0,\,l)}\right]dt\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+M_{13}\tau^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{M-2}-\frac{h}{2}}^{x_{M-2}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^3\psi_1(x,\,t)}{\partial x^3}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,\,N},\quad (40)$$

$$\left|F^{21}_{1k}\right| \leq 2a_0\tau^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{3}{2}}\left[\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_2-\frac{h}{2}}^{x_2+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi_2(x,\,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi_2(x,\,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+M_{14}\tau^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^3\psi_2(x,\,t)}{\partial x^3}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,\,N},\quad (41)$$

$$\left|F^{21}_{M-1k}\right| \leq 2a_0\tau^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{3}{2}}\left[\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{M-1}-\frac{h}{2}}^{x_{M-1}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi_2(x,\,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{M-2}-\frac{h}{2}}^{x_{M-2}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi_2(x,\,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+M_{15}\tau^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{M-1}-\frac{h}{2}}^{x_{M-1}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^3\psi_1(x,\,t)}{\partial x^3}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,\,N}.\quad (42)$$

С помощью формулы (35) для F_{jk}^{p2}, $j=\overline{1,\,M-1}$, $k=\overline{1,\,N}$, $p=1,\,2$ получим:

$$F_{jk}^{p2}=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(v(t)\psi_p(x,\,t)-v_k\psi_{jk}^p\right)dxdt=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi_{jk}^p\left(v(t)-v_k\right)dxdt+$$
$$+\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}v(t)\left(\psi_p(x,\,t)-\psi_{jk}^p\right)dxdt. \quad (43)$$

Учитывая, что $[v]_n\in V_n$, $v\in V$, имеем:

$$\left|F_{jk}^{p2}\right|\le\left|\psi_{jk}^p\right|\left|w_k-v_k\right|+\frac{b_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi_p(x,\,t)-\psi_{jk}^p\right|dxdt,$$
$$j=\overline{1,\,M-1},\quad k=\overline{1,\,N},\quad p=1,2. \quad (44)$$

Теперь рассмотрим разность $\psi_p\left(x,\,t\right)-\psi_{jk}^p$, $p=1,\,2$. С помощью формулы (22), (23) можем написать следующие равенства:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\psi_p(x,\,t)-\psi_p\left(\xi,\,t_k\right)\right)d\xi=\frac{1}{h}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\int\limits_t^{t_k}\frac{\partial\psi_p\left(\xi,\vartheta\right)}{\partial\vartheta}d\vartheta+\int\limits_x^{\xi}\frac{\partial\psi_p\left(\eta,\,t\right)}{\partial\eta}d\eta\right]d\xi,\ p=1,2.$$

Тогда из (44) получим

$$\left|F_{jk}^{p2}\right|\le\left|\psi_{jk}^p\right|\left|w_k-v_k\right|+\frac{b_0}{\tau h^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\int\limits_t^{t_k}\left|\frac{\partial\psi_p\left(\xi,\vartheta\right)}{\partial\vartheta}\right|d\vartheta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_x^{\xi}\left|\frac{\partial\psi_p\left(\eta,\vartheta\right)}{\partial\eta}\right|d\eta\right]d\xi dxdt\le\left|\psi_{jk}^p\right|\left|w_k-v_k\right|+\frac{b_0\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_{t_{k+1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{b_0\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_{t_{k+1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\,t)}{\partial x}\right|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (45)$$

В силу формулы для ψ_{jk}^p имеем:

$$\left|\psi_{jk}^p\right|\le\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi_p(x,\,t)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},\quad p=1,2,\quad j=\overline{1,\,M-1}. \quad (46)$$

Используя эти неравенства, имеем:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\psi_{jk}^{p}\right|^{2}\leq 2\left(\left\|\frac{\partial\psi_p}{\partial t}\right\|^{2}_{L_\infty(0,T;L_2(0,l))}+\|\psi_p\|^{2}_{L_\infty(0,T;L_2(0,l))}\right),\quad p=1,2,\quad k=\overline{1,N}.\tag{47}$$

Отсюда в силу оценки (9), (10) имеем:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\psi_{jk}^{p}\right|^{2}\leq M_{16},\quad p=1,2,\quad k=\overline{1,N}.\tag{48}$$

Учитывая (48) в (45) и в силу оценок (11), (12) получим

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p2}\right|^{2}\leq 3M_{17}\tau\sum_{k=1}^{N}|w_k-v_k|^2+3b_0^2\left(\tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^{2}_{L_2(\Omega)}+h^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|^{2}_{L_2(\Omega)}\right)\leq$$

$$\leq M_{18}\left(\tau^2-h^2+\|Q_n(v)-[v]_n\|^2\right),\quad p=1,2.\tag{49}$$

С помощью условия согласования шагов сетки и оценок (11), (12) из неравенств (36) – (42) получим справедливость неравенств:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^{2}\leq M_{19}\left(\tau+h\right),\quad p=1,2,\tag{50}$$

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p3}\right|^{2}\leq M_{20}\left(\tau^2+h^2\right),\quad p=1,2.\tag{51}$$

Таким образом, используя неравенства (49) – (51) и формулы (32), получим справедливость неравенства:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p}\right|^{2}\leq M_{21}\left(\tau-h+\|Q_n(v)-[v]\|^2\right),\quad p=1,2.\tag{52}$$

Учитывая (52) в неравенстве (32) получим справедливость утверждения теоремы. □

3. Оценка скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу

Теперь установим оценку о скорости разностных аппроксимаций по функционалу. С этой целью сначала оценим разность исходного функционала и дискретной функции.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для любого $v\in V$ и $[v]_n\in V$ имеет место оценка*

$$|J(v)-I_n([v]_n)|\leq M_{22}\left(\sqrt{\tau}+\sqrt{h}+\|Q_n(v)-[v]_n\|\right),\quad n=1,2,\ldots,\tag{53}$$

Доказательство. Используя формулу (1) и (13), имеем:

$$|J(v) - I_n([v]_n)| \leq M_{23} \left[\left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left|\psi_1(x,\,t) - \Phi_{jk}^1\right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left|\psi_2(x,\,t) - \Phi_{jk}^2\right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \right] = M_{24}\left(J_1 + J_2\right). \quad (54)$$

С помощью формулы для J_1 имеем

$$(J_1)^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left|\psi_1(x,\,t) - \psi_{jk}^1\right|^2 dxdt + 2\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\psi_{jk}^1 - \Phi_{jk}^1\right|^2 = J_{11} + J_{12}. \quad (55)$$

В силу утверждения теоремы 4 имеем:

$$J_{12} \leq M_{25}\left(\tau + h + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2\right). \quad (56)$$

Рассмотрим разность $\psi_{jk}^1 - \psi_1(x,\,t)$. Тогда с учетом формулы (25) имеем

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \psi_1(\xi,\,t_k)\,d\xi - \psi_1(x,\,t) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left(\psi_1(\xi,\,t_k) - \psi_1(x,\,t)\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left[\int\limits_{t}^{t_k} \frac{\partial \psi_1(\xi,\,\theta)}{\partial\,\theta} d\theta + \int\limits_{x}^{\xi} \frac{\partial \psi_1(\eta,\,t)}{\partial\,\eta} d\eta \right] d\xi. \quad (57)$$

Если это учесть в формуле для слагаемого J_{11}, то имеем

$$J_{11} \leq 2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{h} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{\partial \psi_1(\xi,\,\theta)}{\partial\,\theta} \right| d\theta d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int\limits_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial \psi_1(\eta,\,t)}{\partial\,\eta} \right| d\eta d\xi \right)^2 dxdt \leq 4h^2 \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial\,x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + 4\tau^2 \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial\,t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (58)$$

В силу оценки (11) отсюда получим

$$J_{11} \leq M_{26}\left(\tau^2 + h^2\right). \quad (59)$$

Тогда, складывая (56) и (57), получим

$$(J_1)^2 \leq M_{27}\left(\tau^2 + h^2 + \tau + h + \|Q_n(v) - [v]\|^2\right). \quad (60)$$

Аналогично получим следующее:

$$(J_2)^2 \le M_{28}\left(\tau^2 + h^2 + \tau + h + \|Q_n(v) - [v]\|^2\right). \tag{61}$$

Отсюда и из (54) получим утверждение теоремы. □

Теперь приведем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Пусть, кроме того, оператор Q_n определяется формулой (23). Тогда $Q_n(v) \in V_n$ и имеет место оценка*

$$|J(v) - I_n(Q_n(v))| \le M_{29}\left(\sqrt{\tau} + \sqrt{h}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{62}$$

Доказательство этой леммы проводится с использованием утверждением теоремы 5. Пусть оператор P_n определяется формулой

$$P_n([v]_n) = \tilde{v}(x), \tag{63}$$

где

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v_j + \delta_{\bar{x}} v_j \left(x - x_j - \dfrac{h}{2}\right), & x_j - \dfrac{h}{2} \le x \le x_j + \dfrac{h}{2}, j = \overline{2, M-1} \\ v_1, x_1 - h\dfrac{h}{2} \le x \le x_1 + \dfrac{h}{2}. \end{cases} \tag{64}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Пусть, кроме того, оператор P_n определяется формулами* (63), (64). *Тогда $P_n([v]_n) \in V$, и имеет место оценка*

$$|J(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n)| \le M_{30}\left(\sqrt{\tau} + \sqrt{h}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{65}$$

Доказательство. С помощью формул (63), (64) и структуры множества V нетрудно установить справедливость соотношения:

$$P_n([v]_n) \in V.$$

Поэтому в теореме 6, вместо v выбирая $\tilde{v}(x) = P_n([v]_n)$ и проведя доказательство, получим справедливость оценки

$$|J(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n)| \le M_{31}\left(\sqrt{\tau} + \sqrt{h} + \|Q_n(\tilde{v}) - [v]_n\|\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{66}$$

Ясно, что

$$\|Q_n(\tilde{v}) - [v]_n\|^2 = h\sum_{j=1}^{M-1} |\tilde{w}_j - v_j|^2 = h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \tilde{v}(x)dx - v_j\right|^2 =$$

$$= h\sum_{j=2}^{M-1}\left|\frac{\delta_{\bar{x}} v_j}{h}\int\limits_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}}\left(x - x_j - \frac{h}{2}\right)dx\right|^2 = h\sum_{j=2}^{M-1}\left|\frac{\delta_{\bar{x}} v_j}{2h}\left(x - x_j - \frac{h}{2}\right)^2\Big|_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}}\right|^2 \le \frac{lb_1^2 h^2}{4}.$$

Отсюда получим

$$\|Q_n(\tilde{v}) - [v]_n\| \le \frac{\sqrt{l}b_1}{2}h.$$

Учитывая данную оценку в (66), получим утверждение леммы. □

Теперь приведем теорему о скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия леммы 1 и 2. Пусть, кроме того,* $v^* \in V$ *и* $[v]_n^* \in V_n$ *являются решениями задач (1)–(5) и (13)–(17) соответственно, то есть*

$$J_* = \inf_{v \in V} J(v) = J(v^*), \quad I_{n*} = \inf_{[v]_n \in V_n} I_n([v]_n) = I_n([v]_n^*).$$

Тогда последовательность разностных задач (13)–(17) аппроксимирует задачу (1)–(5), то есть

$$\lim_{n \to \infty} I_{n*} = J_* \tag{67}$$

и справедлива оценка о скорости сходимости:

$$|I_{n*} - J_*| \le M_{32}\left(\sqrt{\tau} + \sqrt{h}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{68}$$

Доказательство этой теоремы проводится с использованием леммы 1 и 2 и методики работы [8].

Литература

1. Потапов, М.М. Аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления типа Шредингера / М.М. Потапов, А.В. Разгулин, Т.Ю. Шамеева // Вестн. Московск. ун-та. Вычислительная математика и кибернетика. – 1987. – Сер. 15, №1. – С. 8 – 13.
2. Искендеров, А.Д. Оптимальное управление кванто-механической системой с критерием качества Лионса / А.Д. Искендеров, Н.М. Махмудов // Изв. АНА, Сер. физ.-тех. матем. наук. – 1995. – Т. XVI, №5 – 6. – С. 30 – 35.
3. Ягубов, Г.Я. Оптимальное управление коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера: дис...д-ра...наук / Г.Я. Ягубов. – Киев, 1994. – 318 с.
4. Ягубов, Г.Я. Разностный метод решения задачи оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по границе области / Г.Я. Ягубов // Проблемы математического моделирования и оптимального управления. – Баку, 2001. – С. 37 – 48.
5. Ягубов, Г.Я. Сходимость разностного метода решения задачи оптимального управления для нелинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества / Г.Я. Ягубов // Вестн. Сумгаит. гос. ун-та. – 2001. – №1. – С. 37 – 42.
6. Махмудов, Н.М. Разностный метод решения задачи оптимального управления для уравнения Шредингера с критерием качества Лионса / Н.М. Махмудов // Изв. Челяб. науч. центра. – 2009. – №3(45). – С. 1 – 6.
7. Самарский, А.А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / А.А. Самарский, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров. – М.: Высш. шк., 1987. – 296 с.
8. Васильев, В.П. Методы решения экстремальных задач / В.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

Махмудов Нурмали Мехрали оглы, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Информатики», Нахичеванский государственный университет (Азербайджан), nuralimaxmudov@rambler.ru.

Поступила в редакцию 24 июня 2009 г.