УДК 517.948

ОПТИМАЛЬНАЯ ПО ПОРЯДКУ ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А.С. Кутузов

OPTIMUM ESTIMATION UNDER THE ORDER OF THE APPROACHED DECISION OF ONE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY WITH VARIABLE FACTOR

A.S. Kutuzov

В статье доказывается оптимальность по порядку метода проекционной регуляризации применительно к решению одной граничной обратной задачи тепловой диагностики для уравнения с переменным коэффициентом. Получена оценка погрешности построенного приближенного решения, зависящая от точки, в которой производится промежуточный замер температуры.

Ключевые слова: граничные обратные задачи, некорректно поставленные задачи, метод проекционной регуляризации, оптимальные по порядку оценки.

In this article the optimality under the order of a method of projection regularization with reference to the decision of one boundary inverse problem of thermal diagnostics for the equation with variable factor is proved. The estimation of an error of the constructed approached decision, dependent on a point in which intermediate gauging temperature is made is received.

Keywords: boundary inverse problems, ill-posed problems, the method of projection regularization, optimum estimations under the order.

Введение

Уравнение теплопроводности с учетом затрат тепла на термохимическое разложение теплозащитных покрытий гиперзвуковых летательных аппаратов, для конструкций которых во многих случаях применима одномерная модель, в приближении постоянства теплопроводности λ (хотя при точных расчетах необходимо учитывать изменения теплофизических характеристик при термохимическом разложении [1, 2]), записывается в виде $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{I}{C_p\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, где $a = \dfrac{\lambda}{\rho C_p}$ – температуропроводность, ρ, C_p – плотность и теплоемкость материала, I – тепловой эффект реакций термохимического разложения.

Актуальным является восстанавливать затраты тепла на термохимическое разложение во внутренних слоях, например, по результатам измерений температуры в неразлагающейся части теплозащитного покрытия в период до начала уноса материала с поверхности. С этой целью можно принять модель: скорость изменения плотности во втором слагаемом в правой части уравнения теплопроводности пропорциональна температуре.

Новизна данной работы, по сравнению с [3], состоит в том, что граничные условия предполагаются оба ненулевыми, и снимается условие неположительности переменного коэффициента в уравнении теплопроводности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a(x)u(x,t), \tag{1}$$

в котором $x \in [0,1]$, $t \geq 0$ и $a(x) \in C^2[0,1]$. Пусть известны следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(0,t) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$u(x_0,t) = g(t); \quad 0 < x_0 < \frac{1}{2}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

а граничное значение $u(1,t)$ функции $u(x,t)$ подлежит определению.

Задача (1) – (4) является некорректно поставленной, поскольку, как будет показано далее, изометричное интегральное преобразование сводит ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора.

Предположим, что при исходных данных $f(t) = f_0(t) \in L_2[0,\infty)$ и $g(t) = g_0(t) \in L_2[0,\infty)$ существует точное решение $u_0(1,t) \not\equiv 0$ поставленной задачи, которое принадлежит пространству $W_2^1[0,\infty)$, причем для этого решения $u_0(1,0) = 0$ и существует положительное число T такое, что при $t \geq T$

$$u_0(1,t) = 0. \tag{5}$$

Соотношение (5) является естественным, ибо всякий процесс имеет начало и когда-то прекращается. В данном случае, процесс изменения температуры прекращается в момент времени T.

Кроме того, $u_0(1,t) \in M_r$, где

$$M_r = \left\{ u_0 \in W_2^1[0,\infty) : \ \|u_0\|_{W_2^1} \leq r \right\}. \tag{6}$$

Однако точные значения $f_0(t)$ и $g_0(t)$ нам неизвестны, а вместо них даны некоторые приближения $f_\delta(t), g_\delta(t) \in L_2[0,\infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta, \quad \|g_0 - g_\delta\|_{L_2} \leq \delta. \tag{7}$$

Требуется, используя исходные данные f_δ, g_δ, δ, и M_r задачи (1) – (4), построить приближенное решение $u_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|u_0 - u_\delta\|_{L_2}$ от точного решения $u_0(t) = u_0(1,t)$.

Согласно [3], наложенные на решение задачи (1) – (4) естественные условия и соотношение (5), позволяют использовать для нахождения ее решения интегральное преобразование Фурье по $t \in (-\infty, +\infty)$ в предположении, что

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{8}$$

2. Сведение к задаче Коши

Учитывая (8), в качестве рабочего пространства $\overline{H}$ возьмем гильбертово пространство, представляющее собой комплексный вариант $L_2(-\infty,+\infty)$ над полем действительных чисел, его элементы и норма в нем стандартны, а преобразование Фурье на нем определим формулой

$$F[u(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\tau t} dt, \quad \tau \in \mathrm{R}.$$

В силу теоремы Планшереля, сформулированной, например, в [4] введенное преобразование изометрично.

Применяя к уравнению (1), с учетом условия (8), преобразование F, получаем

$$\frac{d^2\widehat{u}(x,\tau)}{dx^2} + a(x)\widehat{u}(x,\tau) = i\tau\widehat{u}(x,\tau); \quad \tau \in \mathrm{R}, \quad 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

где $\widehat{u}(x,\tau) = F[u(x,t)]$.

Для уравнения (9) поставим задачу, добавив условия

$$\widehat{u}(0,\tau) = \widehat{f}(\tau), \quad \tau \in \mathrm{R}, \tag{10}$$

$$\widehat{u}(x_0,\tau) = \widehat{g}(\tau), \quad \tau \in \mathrm{R}, \tag{11}$$

где $\widehat{f}(\tau) = F[f(t)]$, $\widehat{g}(\tau) = F[g(t)]$.

Из (9)–(11) требуется определить $\widehat{u}(1,\tau) = \widehat{u}(\tau), \quad \tau \in \mathrm{R}$.

Общее решение уравнения (9) запишем в виде:

$$\widehat{u}(x,\tau) = c_1(\tau)e_1(x,\tau) + c_2(\tau)e_2(x,\tau), \tag{12}$$

где $e_1(x,\tau)$ и $e_2(x,\tau)$ – линейно независимые непрерывные частные решения (9).

Используя (10) – (12), получаем:

$$\begin{pmatrix} c_1(\tau) \\ c_2(\tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{E(\tau)} \begin{pmatrix} e_2(x_0,\tau)\widehat{f}(\tau) - e_2(0,\tau)\widehat{g}(\tau) \\ -e_1(x_0,\tau)\widehat{f}(\tau) + e_1(0,\tau)\widehat{g}(\tau) \end{pmatrix},$$

где $E(\tau) = \begin{vmatrix} e_1(0,\tau) & e_2(0,\tau) \\ e_1(x_0,\tau) & e_2(x_0,\tau) \end{vmatrix}$. При этом определитель $E(\tau)$ считаем отличным от нуля для всех $\tau \in \mathrm{R}$ в силу линейной независимости рассматриваемых частных решений.

Тогда решение поставленной задачи можно записать в виде:

$$\widehat{u}(1,\tau) = \frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}\widehat{f}(\tau) + \frac{E_2(\tau)}{E(\tau)}\widehat{g}(\tau), \tag{13}$$

где $E_1(\tau) = \begin{vmatrix} e_1(1,\tau) & e_1(x_0,\tau) \\ e_2(1,\tau) & e_2(x_0,\tau) \end{vmatrix}$ и $E_2(\tau) = \begin{vmatrix} e_1(0,\tau) & e_1(1,\tau) \\ e_2(0,\tau) & e_2(1,\tau) \end{vmatrix}$.

3. Первое частное решение

Рассмотрим интегральное уравнение

$$e_1(x,\tau) = e^{\mu_0\sqrt{\tau}x} - \int\limits_0^x \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\tau}} a(\xi)e_1(\xi,\tau)d\xi, \tag{14}$$

где $\mu_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad x,\xi \in [0,1], \quad \tau \in \mathrm{R}.$

Нетрудно убедиться, что если уравнение (14) имеет решение, то оно также будет являться решением уравнения (9).

Теорема 1. *Существуют числа $\tau_0 > 0, c_1 > 0,\ c_2 > 0$, такие, что для всех $|\tau| \geq \tau_0$ выполняется двусторонняя оценка*

$$c_1 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} \leq |e_1(x,\tau)| \leq c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}. \tag{15}$$

Кроме того, при $|\tau| \geq \tau_0, \quad |\tau| \to \infty$ справедливо равенство

$$|e_1'(x,\tau)| = \sqrt{|\tau|} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} (1+o(1)). \tag{16}$$

Доказательство. Выполним замену $\varepsilon_1(x,\tau) = \dfrac{1}{e^{\mu_0\sqrt{\tau}x}} e_1(x,\tau)$, тогда уравнение (14) придет к виду

$$\varepsilon_1(x,\tau) = 1 - \int\limits_0^x \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(x-\xi)e^{\mu_0\sqrt{\tau}\xi}}{\mu_0\sqrt{\tau}e^{\mu_0\sqrt{\tau}x}} a(\xi)\varepsilon_1(\xi,\tau)d\xi. \tag{17}$$

Обозначим $c = \max\limits_{x\in[0,1]} |a(x)|$.

Далее, для любого $\alpha_1 > 0$ найдется $\tau_0 > 0$ такое, что для всех $|\tau| \geq \tau_0 \quad \left| \dfrac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(x-\xi)e^{\mu_0\sqrt{\tau}\xi}}{\mu_0\sqrt{\tau}e^{\mu_0\sqrt{\tau}x}} \right| < \alpha_1.$

Обозначим $q_1 = \displaystyle\int\limits_0^x \left| \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(x-\xi)e^{\mu_0\sqrt{\tau}\xi}}{\mu_0\sqrt{\tau}e^{\mu_0\sqrt{\tau}x}} \right| |a(\xi)|d\xi$. Тогда в силу полученных оценок будем иметь: $q_1 < \alpha_1 c$. Поскольку α_1 – любое, то, в частности, можно взять $\alpha_1 = \dfrac{1}{2c}$, тогда $q_1 < \frac{1}{2}$, а соответствующее значение τ_0 нетрудно подобрать, зная α_1.

Покажем, что при $|\tau| \geq \tau_0$ решение уравнения (17) можно искать в виде

$$\varepsilon_1(x,\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{1\nu}(x,\tau),$$

где $\varepsilon_{10}(x,\tau) = 1$, $\varepsilon_{1(\nu+1)}(x,\tau) = -\displaystyle\int\limits_0^x \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(x-\xi)e^{\mu_0\sqrt{\tau}\xi}}{\mu_0\sqrt{\tau}e^{\mu_0\sqrt{\tau}x}} a(\xi)\varepsilon_{1\nu}(\xi,\tau)d\xi.$

Применяя индукцию по ν, можно показать, что $|\varepsilon_{1\nu}(x,\tau)| \leq q_1^\nu$, где $\nu = 0,1,2,...$

Поскольку $q < 1$, то ряд $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{1\nu}(x,\tau)$ равномерно и абсолютно сходится при $x \in [0,1]$, $|\tau| \geq \tau_0$ и его сумма $\varepsilon_1(x,\tau)$ равномерно ограничена при $|\tau| \to \infty$. Тогда имеем оценку:

$$1 - \frac{q_1}{1-q_1} \leq |\varepsilon_1(x,\tau)| \leq \frac{1}{1-q_1}. \tag{18}$$

Выполняя обратную замену и используя (18), находим:

$$c_1 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} \leq |e_1(x,\tau)| \leq c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}},$$

где $c_1 = \dfrac{1-2q_1}{2(1-q_1)}$, $c_2 = \dfrac{1}{2(1-q_1)}$.

Продифференцируем (14) по переменной x:

$$e_1'(x,\tau) = \mu_0\sqrt{\tau}e^{\mu_0\sqrt{\tau}x} - \int\limits_0^x ch\mu_0\sqrt{\tau}(x-\xi)a(\xi)e_1(\xi,\tau)d\xi.$$

Тогда, используя доказанное выше, получаем, что $|e_1'(x,\tau)| \le \sqrt{|\tau|}e^{\frac{\sqrt{|\tau|}}{\sqrt{2}}x}\left(1+\dfrac{cc_2}{\sqrt{|\tau|}}\right)$ и, следовательно, $|e_1'(x,\tau)| \le \sqrt{|\tau|}e^{\frac{\sqrt{|\tau|}}{\sqrt{2}}x}(1+o(1))$ при $|\tau| \to \infty$.

С другой стороны:

$$|e_1'(x,\tau)| \ge \left|\left|\mu_0\sqrt{\tau}e^{\mu_0\sqrt{\tau}x}\right| - \left|\int\limits_0^x ch\mu_0\sqrt{\tau}(x-\xi)a(\xi)e_1(\xi,\tau)d\xi\right|\right| \ge$$

$$\ge \sqrt{|\tau|}e^{\frac{\sqrt{|\tau|}}{\sqrt{2}}x}\left|1-\frac{cc_2}{\sqrt{|\tau|}}\right| = \sqrt{|\tau|}e^{\frac{\sqrt{|\tau|}}{\sqrt{2}}x}(1+o(1)), \quad |\tau|\to\infty.$$

Таким образом при $|\tau| \to \infty$ справедливо равенство (16). □

4. Второе частное решение

Рассмотрим интегральное уравнение

$$e_2(x,\tau) = e^{-\mu_0\sqrt{\tau}x} - \int\limits_x^{\sqrt{2}} \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(\xi-x)}{\mu_0\sqrt{\tau}}a(\xi)e_2(\xi,\tau)d\xi, \tag{19}$$

где $\mu_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\quad x\in[0,1]$, $\quad \tau \in \mathrm{R}$, $\quad \xi \in \left[x,\sqrt{2}\right]$. Кроме того, будем считать, что при $x \in \left[1,\sqrt{2}\right]$ $\quad a(x) = a(1)$, т.е. $a(x)$ непрерывна на отрезке $\left[0,\sqrt{2}\right]$. Тогда для всех $x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$ будет по-прежнему справедлива оценка $|a(x)| \le c$.

Снова нетрудно убедиться, что если уравнение (19) имеет решение, то оно также будет являться решением уравнения (9).

Теорема 2. *Существуют числа $\tau_0 > 0, c_3 > 0$, $c_4 > 0$, такие, что для всех $|\tau| \ge \tau_0$ выполняется двусторонняя оценка*

$$c_3 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} \le |e_2(x,\tau)| \le c_4 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}. \tag{20}$$

Кроме того, при $|\tau| \ge \tau_0$, $\quad |\tau| \to \infty$ справедливо равенство

$$|e_2'(x,\tau)| = \sqrt{|\tau|}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}(1+o(1)). \tag{21}$$

Доказательство. Аналогично теореме 1. □

5. Следствия

Далее будем принимать за $\tau_0 > 0$ то значение $|\tau|$, начиная с которого выполняются оценки из обеих теорем.

Следствие 1. *При $c_2 \neq 2, c_4 \neq 2$ и $|\tau| \geq \tau_0$ найдутся постоянные c_5, c_6, c_7, c_8 такие, что справедливы двусторонние оценки*

$$\begin{gathered} c_5\sqrt{|\tau|}e^{\dfrac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} \leq |e_1'(x,\tau)| \leq c_6\sqrt{|\tau|}e^{\dfrac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}, \\ c_7\sqrt{|\tau|}e^{-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} \leq |e_2'(x,\tau)| \leq c_8\sqrt{|\tau|}e^{-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}. \end{gathered} \tag{22}$$

Следствие 2. *При $|\tau| \geq \tau_0$ и $c_1c_7 \neq c_4c_6$ функции $e_1(x,\tau)$ и $e_2(x,\tau)$ линейно независимы, а значит образуют фундаментальную систему решений уравнения (9).*

Заметим, что выполнения условия $c_1c_7 \neq c_4c_6$ всегда можно добиться в силу произвольности выбора констант q_1 и q_2 в теоремах 1 и 2.

Следствие 3. *При $|\tau| \geq \tau_0$ и $c_1c_3 \neq c_2c_4$ справедлива оценка*

$$c_9 e^{\dfrac{1-2x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} \leq \left|\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}\right| \leq c_{10} e^{\dfrac{1-2x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}. \tag{23}$$

Доказательство. Из равенств для $E_1(\tau)$ и $E(\tau)$, используя известные неравенства для модуля суммы и разности, находим:

$$\frac{||e_1(1,\tau)||e_2(x_0,\tau)| - |e_1(x_0,\tau)||e_2(1,\tau)||}{|e_1(0,\tau)||e_2(x_0,\tau)| + |e_1(x_0,\tau)||e_2(0,\tau)|} \leq \left|\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}\right| \leq \frac{|e_1(1,\tau)||e_2(x_0,\tau)| + |e_1(x_0,\tau)||e_2(1,\tau)|}{||e_1(0,\tau)||e_2(x_0,\tau)| - |e_1(x_0,\tau)||e_2(0,\tau)||}.$$

Используя результаты теорем 1 и 2, сосчитаем отдельно верхнюю и нижнюю оценки:

$$\frac{|e_1(1,\tau)||e_2(x_0,\tau)| + |e_1(x_0,\tau)||e_2(1,\tau)|}{||e_1(0,\tau)||e_2(x_0,\tau)| - |e_1(x_0,\tau)||e_2(0,\tau)||} \leq \frac{e^{\dfrac{1-x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}\left(c_2c_4 + c_2 e^{\dfrac{2x_0-2}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}c_4\right)}{e^{\dfrac{x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}\left|c_1c_3e^{-x_0\sqrt{2}\sqrt{|\tau|}} - c_2c_4\right|}.$$

$$\frac{||e_1(1,\tau)||e_2(x_0,\tau)| - |e_1(x_0,\tau)||e_2(1,\tau)||}{|e_1(0,\tau)||e_2(x_0,\tau)| + |e_1(x_0,\tau)||e_2(0,\tau)|} \geq \frac{e^{\dfrac{1-x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}\left|c_1c_3 - c_2 e^{\dfrac{2x_0-2}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}c_4\right|}{e^{\dfrac{x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}\left(c_2c_4e^{-\sqrt{2}x_0\sqrt{|\tau|}} + c_2c_4\right)}.$$

Таким образом, поскольку $|\tau| \geq \tau_0 \geq 0$, то справедлива оценка

$$c_9 e^{\dfrac{1-2x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} \leq \left|\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}\right| \leq c_{10} e^{\dfrac{1-2x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}},$$

где $c_9 = \dfrac{|c_1c_3 - c_2c_4|}{2c_2c_4}$, $c_{10} = \dfrac{2c_2c_4}{|c_2c_4 - c_1c_3|}$. □

Следствие 4. *При $|\tau| \geq \tau_0$ и $c_1c_3 \neq c_2c_4$ справедлива оценка*

$$c_9 e^{\dfrac{1-x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}} \leq \left|\frac{E_2(\tau)}{E(\tau)}\right| \leq c_{10} e^{\dfrac{1-x_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|\tau|}}. \tag{24}$$

Доказательство. Аналогично предыдущему следствию. □

6. Метод проекционной регуляризации

В силу изометричности рассматриваемого преобразования Фурье и в силу (7) получаем, что $\|\widehat{f}_0 - \widehat{f}_\delta\|_{L_2} \leq \delta, \quad \|\widehat{g}_0 - \widehat{g}_\delta\|_{L_2} \leq \delta.$

Обозначим $\widehat{u}_1(\tau) = \dfrac{E_1(\tau)}{E(\tau)}\widehat{f}(\tau)$ и $\widehat{u}_2(\tau) = \dfrac{E_2(\tau)}{E(\tau)}\widehat{g}(\tau)$, тогда задача (12) примет вид:

$$\widehat{u}(1,\tau) = \widehat{u}(\tau) = \widehat{u}_1(\tau) + \widehat{u}_2(\tau).$$

При $|\tau| \leq \tau_0$ получаем, что $\|\widehat{u}_\delta(\tau) - \widehat{u}_0(\tau)\| \leq \delta\sqrt{c_{11}+c_{12}}$, где $c_{11} = \max\limits_{\tau\in[-\tau_0,\tau_0]}\left|\dfrac{E_1(\tau)}{E(\tau)}\right|^2$, $c_{12} = \max\limits_{\tau\in[-\tau_0,\tau_0]}\left|\dfrac{E_2(\tau)}{E(\tau)}\right|^2$.

При $|\tau| \geq \tau_0$ запишем задачи для функций $\widehat{u}_1$ и $\widehat{u}_2$ в операторной форме:

$$A_1\widehat{u}_1(\tau) = \frac{E(\tau)}{E_1(\tau)}\widehat{u}_1(\tau) = \widehat{f}_\delta(\tau), \;\; A_2\widehat{u}_2(\tau) = \frac{E(\tau)}{E_2(\tau)}\widehat{u}_2(\tau) = \widehat{g}_\delta(\tau), \tag{25}$$

где $A_1, A_2 : \overline{H} \to \overline{H}$.

Следствие 5. *Операторы A_1^{-1} и A_2^{-1}, определяемые формулами (25), неограничены.*

Пусть $\widehat{u}_{10}(\tau), \widehat{u}_{20}(\tau) \in W_2^1(-\infty,+\infty)$ – точные решения задач (25), соответствующие правым частям $\widehat{f}_0(\tau)$ и $\widehat{g}_0(\tau)$ соответственно. Тогда, в силу принадлежности точного решения $\widehat{u}_0(1,t)$ классу корректности (6) и соотношения (8), найдутся постоянные $r_1, r_2 > 0$ такие, что $\|\widehat{u}_{10}\|^2_{L_2} + \|\widehat{u}'_{10}\|^2_{L_2} \leq r_1^2$, $\|\widehat{u}_{20}\|^2_{L_2} + \|\widehat{u}'_{20}\|^2_{L_2} \leq r_2^2$ и $r_1 + r_2 = r$.

Определим $\widehat{u}_{10}(\tau) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{10}(t)e^{-i\tau t}dt$. Тогда $\widehat{u}'_{10}(\tau) = i\tau\widehat{u}_{10}(\tau)$.

Значит, для точных решений $\widehat{u}_{10}$ и $\widehat{u}_{20}$ справедливы неравенства:

$$\left(1+|\tau|^2\right)\|\widehat{u}_{10}\|^2_{L_2} \leq r_1^2, \quad \left(1+|\tau|^2\right)\|\widehat{u}_{20}\|^2_{L_2} \leq r_2^2. \tag{26}$$

Из следствий 3 и 4 вытекает инъективность операторов A_1, A_1^*, A_2 и A_2^*, поэтому в силу леммы 6, сформулированной в работе [5], существуют изометрические операторы $Q_1, Q_2 : \overline{H} \to \overline{H}$ такие, что $A_1\widehat{u}_1(\tau) = Q_1C_1\widehat{u}_1(\tau)$ и $A_2\widehat{u}_2(\tau) = Q_2C_2\widehat{u}_2(\tau)$, где

$$C_1\widehat{u}_1(\tau) = \left|\frac{E(\tau)}{E_1(\tau)}\right|\widehat{u}_1(\tau), \;\; C_2\widehat{u}_2(\tau) = \left|\frac{E(\tau)}{E_2(\tau)}\right|\widehat{u}_2(\tau), \tag{27}$$

то есть операторы C_1 и C_2 положительно определены и самосопряжены.

Таким образом, уравнения (25) могут быть приведены к виду

$$C_1\widehat{u}_1(\tau) = \overline{\widehat{f}}_\delta(\tau), \;\; C_2\widehat{u}_2(\tau) = \overline{\widehat{g}}_\delta(\tau), \tag{28}$$

в котором $\overline{\widehat{f}}_\delta(\tau) = Q_1^* \widehat{f}_\delta(\tau)$, $\overline{\widehat{g}}_\delta(\tau) = Q_2^* \widehat{g}_\delta(\tau)$, а Q_1^* и Q_2^* – операторы, сопряженные соответственно с $Q_1 \cong \dfrac{E(\tau)}{E_1(\tau)} \dfrac{|E_1(\tau)|}{|E(\tau)|}$ и $Q_2 \cong \dfrac{E(\tau)}{E_2(\tau)} \dfrac{|E_2(\tau)|}{|E(\tau)|}$.

Из (26) и (27) следует, что, при $\overline{\widehat{f}}_0(\tau) = Q_1^* \widehat{f}_0(\tau)$ и $\overline{\widehat{g}}_0(\tau) = Q_2^* \widehat{g}_0(\tau)$ уравнения (28) имеют точные решения $\widehat{u}_{10}(\tau) \in B\overline{S}_{r_1}$ и $\widehat{u}_{20}(\tau) \in B\overline{S}_{r_2}$, где $\overline{S}_{r_1} = \left\{\widehat{v} : \widehat{v} \in \overline{H}, \|\widehat{v}\| \le r_1\right\}$, $\overline{S}_{r_2} = \left\{\widehat{v} : \widehat{v} \in \overline{H}, \|\widehat{v}\| \le r_2\right\}$, $|\tau| \ge \tau_0$, а

$$B\widehat{v}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+|\tau|^2}} \widehat{v}(\tau), \quad |\tau| \ge \tau_0, \ \widehat{v}(\tau) \in \overline{H}. \tag{29}$$

Из формул (27) – (29) следует, что $B = G_1(C_1)$ и $B = G_2(C_2)$, где функции $G_1(\sigma)$ и $G_2(\sigma)$ являются строго возрастающими, непрерывными, удовлетворяющими условиям $G_1(0) = 0$ и $G_2(0) = 0$ (см. [5]).

Используя следствия 3, 4 и формулы (27), (29), нетрудно показать, что имеют место эквивалентности:

$$G_1(\sigma) \sim \frac{(1-2x_0)^2}{2} \ln^{-2}\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad G_2(\sigma) \sim \frac{(1-x_0)^2}{2} \ln^{-2}\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad \sigma \to 0. \tag{30}$$

Используя метод проекционной регуляризации, предложенный в [5], регуляризуем исходные данные задач (28) $(\overline{\widehat{f}}_\delta(\tau), \delta)$ и $(\overline{\widehat{g}}_\delta(\tau), \delta)$, то есть определим функции $\overline{\widehat{f}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_1(\delta)]$ и $\overline{\widehat{g}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_2(\delta)]$ следующим образом:

– при условии $\|\overline{\widehat{f}}_\delta\| > 3\delta$ определим $\overline{\widehat{f}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_1(\delta)] = \begin{cases} \overline{\widehat{f}}_\delta(\tau) & \text{при} \quad |\tau| \le \widehat{\alpha}_1(\delta) \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| > \widehat{\alpha}_1(\delta) \end{cases}$, где $\widehat{\alpha}_1(\delta)$ удовлетворяет уравнению невязки $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-\widehat{\alpha}_1(\delta)} |\overline{\widehat{f}}_\delta(\tau)|^2 d\tau + \int\limits_{\widehat{\alpha}_1(\delta)}^{+\infty} |\overline{\widehat{f}}_\delta(\tau)|^2 d\tau = 9\delta^2.$

– при условии $\|\overline{\widehat{f}}_\delta\| \le 3\delta$ определим $\overline{\widehat{f}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_1(\delta)] \equiv 0$.

– при условии $\|\overline{\widehat{g}}_\delta\| > 3\delta$ определим $\overline{\widehat{g}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_2(\delta)] = \begin{cases} \overline{\widehat{g}}_\delta(\tau) & \text{при} \quad |\tau| \le \widehat{\alpha}_2(\delta) \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| > \widehat{\alpha}_2(\delta) \end{cases}$, где $\widehat{\alpha}_2(\delta)$ удовлетворяет уравнению невязки $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-\widehat{\alpha}_2(\delta)} |\overline{\widehat{g}}_\delta(\tau)|^2 d\tau + \int\limits_{\widehat{\alpha}_2(\delta)}^{+\infty} |\overline{\widehat{g}}_\delta(\tau)|^2 d\tau = 9\delta^2.$

– при условии $\|\overline{\widehat{g}}_\delta\| \le 3\delta$ определим $\overline{\widehat{g}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_2(\delta)] \equiv 0$.

При выполнении этих условий функции $\overline{\widehat{f}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_1(\delta)]$ и $\overline{\widehat{g}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_2(\delta)]$ определяются однозначно даже в случае неединственности решения уравнений невязки.

Согласно методу проекционной регуляризации операторы C_1^{-1} и C_2^{-1}, определенные формулами (27), применительно к функциям $\overline{\widehat{f}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_1(\delta)]$ и $\overline{\widehat{g}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_2(\delta)]$ уже являются ограниченными, а потому приближенные решения $\widehat{u}_{1\delta}(\tau)$ и $\widehat{u}_{2\delta}(\tau)$ уравнений (28) можно находить по формулам:

$$\widehat{u}_{1\delta}(\tau) = C_1^{-1} \overline{\widehat{f}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_1(\delta)], \ \ \widehat{u}_{2\delta}(\tau) = C_2^{-1} \overline{\widehat{g}}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}_2(\delta)]. \tag{31}$$

В силу оценки из работы [5] и доказанных выше эквивалентностей (30), найдутся постоянные c_{13} и c_{14} такие, что при $\tau \ge \tau_0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{u}_{1\delta} - \widehat{u}_{10}\| \le c_{13} \ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right), \ \ \|\widehat{u}_{2\delta} - \widehat{u}_{20}\| \le c_{14} \ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{32}$$

Постоянные c_{13} и c_{14} определяются оценкой из работы [5] и соотношениями (30) следующим образом: $c_{13} = 12b_1\dfrac{(1-2x_0)^2}{2} = 6b_1(1-2x_0)^2$, $c_{14} = 12b_2\dfrac{(1-x_0)^2}{2} = 6b_2(1-x_0)^2$ где $b_1 \geq r_1\|B\| \geq 1$ и $b_2 \geq r_2\|B\| \geq 1$.

Находим $\|B\| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau_0^2}}$, тогда выбираем $b_1 \geq \dfrac{r_1}{\sqrt{1+\tau_0^2}} \geq 1$ и $b_2 \geq \dfrac{r_2}{\sqrt{1+\tau_0^2}} \geq 1$.

Из теоремы, сформулированной в работе [5] следует, что оценки (31) являются оптимальными по порядку на классах $B\overline{S}_{r_1}$ и $B\overline{S}_{r_2}$ соответственно, а соответствующие методы проекционной регуляризации оптимальны по порядку на этих классах решений.

Очевидно, что при $|\tau| \geq \tau_0$ справедлива оптимальная по порядку на классе $B\overline{S}_r$ оценка

$$\|\widehat{u}_\delta - \widehat{u}_0\| \leq (c_{13}+c_{14})\ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right), \tag{33}$$

где $\overline{S}_r = \left\{\widehat{v} : \widehat{v} \in \overline{H}, \|\widehat{v}\| \leq r\right\}$.

При $\tau \in \mathrm{R}$ получаем, что $\|\widehat{u}_\delta - \widehat{u}_0\|^2 \leq \delta^2(c_{11}+c_{12}) + (c_{13}+c_{14})^2\ln^{-4}\left(\dfrac{1}{\delta}\right)$.

Чтобы окончательно получить приближенное решение $u_\delta(t)$ исходной задачи (1)–(4), применим обратное к F преобразование $F^{-1}[\widehat{u}(\tau)] = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(\tau)e^{i\tau t}d\tau, \quad t \in \mathrm{R}$ и получим $u_\delta(t) = Re\left\{F^{-1}[\widehat{u}_\delta(\tau)]\right\}$. Поскольку преобразование F изометрично, то для приближенного решения $u_\delta(t)$ для любого $t \in \mathrm{R}$ справедлива оценка:

$$\|u_\delta - u_0\|^2 \leq \delta^2(c_{11}+c_{12}) + (c_{13}+c_{14})^2\ln^{-4}\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Далее остается отбросить все значения при $t < 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Метод проекционной регуляризации для решения граничной обратной задачи (1) – (4) оптимален по порядку на классе $B\overline{S}_r$.*

7. Выводы

Полученная оценка погрешности построенного приближенного решения напрямую зависит от точки x_0, в которой производится промежуточный замер температуры. С практической точки зрения это вполне объяснимо, ибо чем дальше от расчетной области производится промежуточный замер, тем менее точные результаты восстановления искомого температурного поля следует ожидать.

Также отметим, что реализация на практике описанного алгоритма может быть затруднительной, так как при численном моделировании необходимо решать интегральные уравнения (14) и (19) при всех значениях параметров, что может наложить дополнительные погрешности. Основная ценность полученной теоретической оценки состоит в том, что про нее известна оптимальность по порядку, потому, сравнивая с ней оценки других, более легко реализуемых численных методов (например, метода квазиобращения, рассмотренного в [6]), можно будет делать выводы об оптимальности по порядку именно их и реализовывать конкретно эти методы.

Работа проводилась при финансовой поддержке гранта р_урал_а (проект № 10-01-96000).

Литература

1. Панкратов, Б.М. Взаимодействие материалов с высокотемпературными газовыми потоками/ Б.М. Панкратов, Ю.В. Полежаев, А.К. Рудько. – М.: Машиностроение, 1976.
2. Полежаев, Ю.В. Тепловая защита/ Ю.В. Полежаев, Ф.Б. Юревич. – М.: Энергия, 1976.
3. Танана, В.П. Об оценке погрешности метода решения одной обратной задачи для параболического уравнения/ В.П. Танана // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2010. – Т. 13, № 4. – С. 451 – 465.
4. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972.
5. Танана, В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач/ В.П. Танана // Сиб. журнал вычисл. матем. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 117 – 132.
6. Кутузов, А.С. Оценка приближенного решения одной двумерной граничной обратной задачи тепловой диагностики методом квазиобращения/ А.С. Кутузов // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2009. – Вып. 12, № 10. – С. 14 – 21.

Кутузов Антон Сергеевич, преподаватель, кафедра «Математика и информатика», Троицкий филиал Челябинского государственного университета, thething84@mail.ru.

Поступила в редакцию 16 марта 2011 г.