УДК 517.929.4

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ И ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

М.А. Скворцова

ESTIMATES FOR SOLUTIONS AND ATTRACTION DOMAINS OF THE ZERO SOLUTION TO SYSTEMS OF QUASI-LINEAR EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE

M.A. Skvortsova

Настоящая работа посвящена изучению одного класса систем дифференциальных уравнений нейтрального типа. Указаны области притяжения нулевого решения и установлены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности. В частности, из этих оценок вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения рассматриваемых систем. Результаты получены с использованием модифицированного функционала Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: системы квазилинейных уравнений нейтрального типа, асимптотическая устойчивость, области притяжения, равномерные оценки решений, модифицированный функционал Ляпунова – Красовского.

The present paper is devoted to study a class of systems of differential equations of neutral type. We obtain attraction domains of the zero solution and establish estimates of exponential decay at infinity for solutions. In particular, asymptotic stability of the zero solution follows from these estimates. These results were derived by the use of a modified Lyapunov – Krasovskii functional.

Keywords: systems of quasi-linear equations of neutral type, asymptotic stability, attraction domains, uniform estimates for solutions, modified Lyapunov–Krasovskii functional.

Введение

В настоящей работе рассматриваются системы квазилинейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\frac{d}{dt}\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \tag{0.1}$$

где A, B, D — вещественные постоянные матрицы размера $n \times n$, $\tau > 0$ — постоянный параметр запаздывания, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$\|F(t,u_1,v) - F(t,u_2,v)\| \le L\|u_1 - u_2\|, \quad L \ge 0,$$

и оценке
$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2 > 0, \quad \omega_1, \omega_2 > 0. \tag{0.2}$$
Если матрица D ненулевая, то такие системы принято называть системами уравнений *нейтрального типа* (см., например, [1–5]).

Отметим, что для систем дифференциальных уравнений (0.1) в литературе хорошо известны теоремы об асимптотической устойчивости, которые формулируются в терминах расположения корней квазимногочленов и функционалов Ляпунова – Красовского (см., например, [1–5]).

В последние годы появились модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского, позволяющие получать оценки экспоненциального убывания решений линейных систем

$$\frac{d}{dt}\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > \tau,$$

без нахождения корней квазимногочленов (см., например, [6–13]). С использованием таких функционалов также были получены некоторые оценки областей притяжения нулевого решения и оценки скоростей убывания решений на бесконечности систем квазилинейных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau,$$

(см., например, [11, 12, 14]). В частности, в работе [11] авторами был предложен следующий модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$v(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

с матрицами $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) > 0$, $s \in [0,\tau]$. Мы используем обобщение этого функционала (см. также [13, 15]):

$$v(t,y) = \big\langle H\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big), \big(y(t) + Dy(t-\tau)\big)\big\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds. \tag{0.3}$$

Целью настоящей работы является изучение асимптотической устойчивости нулевого решения системы (0.1), установление оценок решений, характеризующих скорость убывания на бесконечности, а также получение областей притяжения нулевого решения. Работа является продолжением исследований [15]. Результаты, полученные в работе, были представлены на конференциях [16, 17].

1. Формулировка основных результатов

Рассмотрим начальную задачу для системы (0.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\[2ex] y(t) = \varphi(t), \quad t \in [0,\tau], \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\varphi(t) \in C^1[0,\tau]$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Будем предполагать, что $y(\tau + 0) = \varphi(\tau)$.

Сформулируем основные результаты работы. Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие I. Пусть существуют матрицы $H = H^* > 0$ и $K(s) \in C^1[0,\tau]$ такие, что

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

и составная матрица

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

положительно определена.

Условие II. Пусть

$$\widetilde{c_1} = c_1 - \|H\|\big(\|D\| + \sqrt{1 + \|D\|^2}\big)\big(q_1\|D\|(1 + \|D\|)^{\omega_1} + q_2\big) > 0, \tag{1.3}$$

где c_1 — минимальное собственное значение матрицы C.

Введем следующие обозначения. Пусть $k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{1.4}$$

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\widetilde{c_1}}{1 + \|D\|^2},\ k\|H\|\right\}, \quad p = \exp\left(\frac{\varepsilon\tau}{2\|H\|}\right). \tag{1.5}$$

Будем рассматривать три случая: $\|D\| < p^{-1}$, $\|D\| = p^{-1}$ и $p^{-1} < \|D\| < 1$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (I), (II) и $\|D\| < p^{-1}$. Тогда множество вещественнозначных вектор-функций*

$$\Omega_1 = \left\{\varphi(t) \in C^1[0,\tau] :\ v(\tau,\varphi) < \left(\frac{\varepsilon}{2q_1\|H\|^2\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1 + \|D\|)^{\omega_1}}\right)^{2/\omega_1},\right.$$

$$\left.\|\varphi\|_\infty \le \Big(M\Upsilon(1 - p\|D\|)^{-1} + \|D\|\Big)^{-1}\right\}$$

является множеством притяжения нулевого решения системы (0.1), где

$$\Upsilon = \left(1 - \frac{2q_1\|H\|^2\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1 + \|D\|)^{\omega_1}}{\varepsilon}v^{\omega_1/2}(\tau,\varphi)\right)^{-1/\omega_1} > 1, \tag{1.6}$$

$$M = \sqrt{\|H^{-1}\|\big(\|H\|(1 + \|D\|)^2 + \tau\|K\|_\infty\big)}, \tag{1.7}$$

$$\|K\|_\infty = \max_{s\in[0,\tau]}\|K(s)\|, \quad \|\varphi\|_\infty = \max_{s\in[0,\tau]}\|\varphi(s)\|. \tag{1.8}$$

При этом для решения $y(t)$ начальной задачи (1.1) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\left(M\Upsilon(1 - p\|D\|)^{-1} + \exp\left(\frac{(t-\tau)}{\tau}\ln(p\|D\|)\right)\right)\|\varphi\|_\infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (I), (II) и $\|D\| = p^{-1}$. Тогда множество вещественнозначных вектор-функций*

$$\Omega_2 = \left\{\varphi(t) \in C^1[0,\tau] :\ v(\tau,\varphi) < \left(\frac{\varepsilon}{2q_1\|H\|^2\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1 + \|D\|)^{\omega_1}}\right)^{2/\omega_1},\right.$$

$$\|\varphi\|_\infty \le \left[\exp\left(-\left(1-\frac{\ln p}{M\Upsilon p}\right)\right)\frac{M\Upsilon p}{\ln p}\right]^{-1}\Bigg\}$$

является множеством притяжения нулевого решения системы (0.1). При этом для решения $y(t)$ начальной задачи (1.1) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\left(M\Upsilon\frac{t}{\tau}+1\right)\|\varphi\|_\infty.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (I), (II) и $p^{-1} < \|D\| < 1$. Тогда множество вещественнозначных вектор-функций*

$$\Omega_3 = \Bigg\{\varphi(t)\in C^1[0,\tau]:\ v(\tau,\varphi) < \left(\frac{\varepsilon}{2q_1\|H\|^2\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1+\|D\|)^{\omega_1}}\right)^{2/\omega_1}, \tag{1.9}$$

$$\|\varphi\|_\infty \le \Big(M\Upsilon p\|D\|(p\|D\|-1)^{-1}+\|D\|\Big)^{-1}\Bigg\} \tag{1.10}$$

является множеством притяжения нулевого решения системы (0.1). При этом для решения $y(t)$ начальной задачи (1.1) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \exp\left(\frac{(t-\tau)}{\tau}\ln\|D\|\right)\Big(M\Upsilon p\|D\|(p\|D\|-1)^{-1}+1\Big)\|\varphi\|_\infty. \tag{1.11}$$

Следствие. *Пусть выполнены условия (I), (II) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (0.1) асимптотически устойчиво.*

2. Доказательство основных утверждений

Доказательства теорем 1–3 проводятся по схеме, изложенной в [15, § 3]. Приведем доказательство теоремы 3. Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия (I) и (II). Тогда для решения $y(t)$ начальной задачи (1.1) справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}v(t,y)+\frac{\varepsilon}{\|H\|}v(t,y)-2q_1\|H\|\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1+\|D\|)^{\omega_1}v^{1+\omega_1/2}(t,y)\le\\ \le -2q_1\|H\|\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}\Big)-\\ -2q_2\|H\|\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big),\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $v(t,y)$ — модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, определенный равенством (0.3), $\varepsilon > 0$ определено в (1.5).

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1). Рассмотрим положительно определенный функционал $v(t,y)$, определенный в (0.3). Дифференцируя его вдоль решений уравнения (0.1), как и в работе [15] (см. доказательство теоремы 1, с. 20–21) получим тождество

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}v(t,y)+\left\langle C\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle-\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds\equiv\\ \equiv 2\left\langle H\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big),F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle,\end{gathered} \tag{2.2}$$

где матрица C определена в (1.2).

Оценим величину, стоящую в правой части. В силу условия (0.2) имеем

$$2\left\langle H\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big), F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle \le$$

$$\le 2\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|\|F(t,y(t),y(t-\tau))\| \le$$

$$\le 2\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|\Big(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1}+q_2\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2}\Big) \le$$

$$\le 2\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|\left(q_1\Big(\|y(t)+Dy(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|\Big)^{1+\omega_1}+q_2\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2}\right).$$

Учитывая неравенство

$$(\alpha+\delta\beta)^{1+\omega} \le (1+\delta)^{\omega}\left(\alpha^{1+\omega}+\delta\beta^{1+\omega}\right), \quad \alpha,\beta,\delta,\omega \ge 0,$$

получим

$$2\left\langle H\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big), F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle \le 2\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|\times$$

$$\times\left(q_1(1+\|D\|)^{\omega_1}\Big(\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{1+\omega_1}+\|D\|\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_1}\Big)+q_2\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2}\right)=$$

$$=2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}+$$

$$+2\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|\Big(q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_1}+q_2\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2}\Big).$$

Далее, очевидно, что

$$2\left\langle H\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big), F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle \le 2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}+$$

$$+2\|H\|\Big(\|y(t)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|\Big)\Big(q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_1}+q_2\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2}\Big)=$$

$$=2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}+$$

$$+2q_1\|H\|\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}+$$

$$+2q_2\|H\|\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}.$$

Преобразуем полученное неравенство. Имеем

$$2\left\langle H\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big), F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle \le 2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}+$$

$$+2\|H\|\Big(q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}+q_2\Big)\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)-$$

$$-2q_1\|H\|\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}\Big)-$$

$$-2q_2\|H\|\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big).$$

Следовательно, в силу оценки

$$2\left(\alpha\beta+\delta\beta^2\right) \le \Big(\delta+\sqrt{1+\delta^2}\Big)\left(\alpha^2+\beta^2\right), \quad \alpha,\beta,\delta \ge 0,$$

получим

$$
\begin{gathered}
2\left\langle H\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big), F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle \le \\
\le 2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}+ \\
+\|H\|\Big(\|D\|+\sqrt{1+\|D\|^2}\Big)\Big(q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}+q_2\Big)\Big(\|y(t)\|^2+\|y(t-\tau)\|^2\Big)- \\
-2q_1\|H\|\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}\Big)- \\
-2q_2\|H\|\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big).
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

Далее, учитывая положительную определенность матрицы C, а также условие (1.4) и оценку (2.3), из тождества (2.2) нетрудно получить неравенство

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}v(t,y)+c_1\Big(\|y(t)\|^2+\|y(t-\tau)\|^2\Big)+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds\le \\
\le 2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}+ \\
+\|H\|\Big(\|D\|+\sqrt{1+\|D\|^2}\Big)\Big(q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}+q_2\Big)\Big(\|y(t)\|^2+\|y(t-\tau)\|^2\Big)- \\
-2q_1\|H\|\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}\Big)- \\
-2q_2\|H\|\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big).
\end{gathered}
$$

Учитывая обозначение (1.3) и используя оценку

$$
\|y(t)\|^2+\|y(t-\tau)\|^2\ge\frac{1}{1+\|D\|^2}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2,
$$

получим

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}v(t,y)+\frac{\widetilde{c_1}}{1+\|D\|^2}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds- \\
-2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}\le \\
\le -2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|D\|\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}\Big)- \\
-2q_2\|H\|\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big),
\end{gathered}
$$

откуда, с учетом обозначения (1.5) и определения (0.3) функционала $v(t,y)$, нетрудно установить неравенство (2.1).

Теорема 4 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1), где $\varphi(t)\in\Omega_3$. Покажем, что $y(t)$ будет определено на всей полуоси $t\ge\tau$, причем при $t\in[m\tau,(m+1)\tau)$, $m\in\mathbb{N}$, имеет место оценка

$$
\|y(t)\|\le\left(M\Upsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\sum_{k=0}^{m-1}(p\|D\|)^k+\|D\|^m\right)\|\varphi\|_\infty, \tag{2.4}
$$

где ε и p определены в (1.5), Υ — в (1.6), M и $\|\varphi\|_\infty$ — в (1.7)–(1.8). Будем доказывать это неравенство индукцией по m.

Пусть $t \in [\tau, 2\tau)$. Тогда из неравенства (2.1) получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) + \frac{\varepsilon}{\|H\|}v(t,y) - 2q_1\|H\|\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1+\|D\|)^{\omega_1}v^{1+\omega_1/2}(t,y) \le$$

$$\le -2q_1\|H\|\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|\varphi\|_\infty^{\omega_1}\Big) -$$

$$-2q_2\|H\|\Big(\|y(t)\|\|y(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\|^2\Big)\Big(1-\|\varphi\|_\infty^{\omega_2}\Big).$$

Поскольку $\varphi(t) \in \Omega_3$, то в силу условия (1.10) имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) + \frac{\varepsilon}{\|H\|}v(t,y) - 2q_1\|H\|\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1+\|D\|)^{\omega_1}v^{1+\omega_1/2}(t,y) \le 0.$$

Отсюда, учитывая условие (1.9), так же, как и в работе [15] (см. доказательство теоремы 6, с. 26) получим

$$v(t,y) \le \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{\|H\|}\right)v(\tau,\varphi)\left(1 - \frac{2q_1\|H\|^2\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1+\|D\|)^{\omega_1}}{\varepsilon}v^{\omega_1/2}(\tau,\varphi)\right)^{-2/\omega_1}.$$

Учитывая оценку

$$v(\tau,\varphi) \le \big(\|H\|(1+\|D\|)^2 + \tau\|K\|_\infty\big)\|\varphi\|_\infty^2$$

и обозначения (1.6)–(1.8), из определения (0.3) функционала $v(t,y)$ и установленного неравенства нетрудно получить

$$\|y(t) + Dy(t-\tau)\|^2 \le \|H^{-1}\|\ v(t,y) \le (M\Upsilon)^2\exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{\|H\|}\right)\|\varphi\|_\infty^2.$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \le \|y(t)+Dy(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\| \le \left(M\Upsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right) + \|D\|\right)\|\varphi\|_\infty,$$

т. е. решение $y(t)$ начальной задачи (1.1) определено на отрезке $[\tau, 2\tau]$, и при $m = 1$ неравенство (2.4) доказано.

Далее будем рассуждать по индукции. Пусть решение $y(t)$ задачи (1.1) существует на отрезке $[\tau, m\tau]$, причем при $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$ выполнено неравенство (2.4).

Пусть $t \in [m\tau, (m+1)\tau)$. Оценим $\|y(t-\tau)\|$. По предположению индукции имеем

$$\|y(t-\tau)\| \le \left(M\Upsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon(t-2\tau)}{2\|H\|}\right)\sum_{k=0}^{m-2}(p\|D\|)^k + \|D\|^{m-1}\right)\|\varphi\|_\infty =$$

$$= \left(M\Upsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon(t-2\tau)}{2\|H\|}\right)(p\|D\|)^{m-2}\sum_{k=0}^{m-2}(p\|D\|)^{-k} + \|D\|^{m-1}\right)\|\varphi\|_\infty \le$$

$$\le \left(M\Upsilon\sum_{k=0}^{\infty}(p\|D\|)^{-k} + \|D\|\right)\|\varphi\|_\infty = \Big(M\Upsilon p\|D\|(p\|D\|-1)^{-1} + \|D\|\Big)\|\varphi\|_\infty,$$

откуда в силу условия (1.10) $\|y(t-\tau)\| \le 1$. Следовательно, из неравенства (2.1) получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) + \frac{\varepsilon}{\|H\|}v(t,y) - 2q_1\|H\|\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1+\|D\|)^{\omega_1}v^{1+\omega_1/2}(t,y) \le 0.$$

Из этого неравенства так же, как и ранее, нетрудно установить оценку

$$\|y(t)+Dy(t-\tau)\| \le M\Upsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\|\varphi\|_\infty.$$

Следовательно, по индукционному предположению, используя (2.4), получим

$$\|y(t)\| \le \|y(t)+Dy(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\| \le M\Upsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\|\varphi\|_\infty +$$

$$+\|D\|\left(M\Upsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-2\tau)}{2\|H\|}\right)\sum_{k=0}^{m-2}(p\|D\|)^k + \|D\|^{m-1}\right)\|\varphi\|_\infty =$$

$$= \left(M\Upsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\sum_{k=0}^{m-1}(p\|D\|)^k + \|D\|^{m}\right)\|\varphi\|_\infty.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что решение $y(t)$ начальной задачи (1.1) определено на всем отрезке $[\tau,(m+1)\tau]$, причем выполнено неравенство (2.4).

Далее, из оценки (2.4) при $t\in[m\tau,(m+1)\tau)$ имеем

$$\|y(t)\| \le \left(M\Upsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\sum_{k=0}^{m-1}(p\|D\|)^k + \|D\|^{m}\right)\|\varphi\|_\infty =$$

$$= \left(M\Upsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)(p\|D\|)^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}(p\|D\|)^{-k} + \|D\|^{m}\right)\|\varphi\|_\infty \le$$

$$\le \exp\left(\frac{(t-\tau)}{\tau}\ln\|D\|\right)\left(M\Upsilon\sum_{k=0}^{\infty}(p\|D\|)^{-k}+1\right)\|\varphi\|_\infty =$$

$$= \exp\left(\frac{(t-\tau)}{\tau}\ln\|D\|\right)\Big(M\Upsilon p\|D\|(p\|D\|-1)^{-1}+1\Big)\|\varphi\|_\infty.$$

Тем самым установлено неравенство (1.11), а следовательно, доказана теорема 3.

Теоремы 1 и 2 доказываются по аналогичной схеме.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 107).

Литература

1. Красовский, Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н.Н. Красовский. – М.: Физматгиз, 1959.

2. Эльсгольц, Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1971.

3. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984.

4. Кореневский, Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии / Д.Г. Кореневский. – Киев: Наукова думка, 1989.

5. Gu, K. Stability of time-delay systems / K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen. – Control Engineering. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.
6. Kharitonov, V.L. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems / V.L. Kharitonov, A.P. Zhabko // Automatica. – 2003. – V. 39, № 1. – P. 15 – 20.
7. Kharitonov, V.L. Exponential estimates for time delay systems / V.L. Kharitonov, D. Hinrichsen // Systems Control Lett. – 2004. – V. 53, № 5. – P. 395 – 405.
8. Mondié, S. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach / S. Mondié, V.L. Kharitonov // IEEE Trans. Automat. Control. – 2005. – V. 50, № 2. – P. 268 – 273.
9. Kharitonov, V.L. Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach / V.L. Kharitonov, S. Mondié, J. Collado // IEEE Trans. Automat. Control. – 2005. – V. 50, № 5. – P. 666 – 670.
10. Хусаинов, Д.Я. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием / Д.Я. Хусаинов, А.Ф. Иванов, А.Т. Кожаметов // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 1137 – 1140.
11. Демиденко, Г.В. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева // Вестн. НГУ. Сер.: математика, механика, информатика. – 2005. – Т. 5, вып. 3. – С. 20 – 28.
12. Демиденко, Г.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах / Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 1025 – 1040.
13. Demidenko, G.V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type / G.V. Demidenko // J. Anal. Appl. – 2009. – V. 7, № 3. – P. 119 – 130.
14. Melchor-Aguilar, D. Estimates of the attraction region for a class of nonlinear time-delay systems / D. Melchor-Aguilar, S.I. Niculescu // IMA J. Math. Control Inform. – 2007. – V. 24, № 4. – P. 523 – 550.
15. Демиденко, Г.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа / Г.В. Демиденко, Т.В. Котова, М.А. Скворцова // Вестн. НГУ. Сер.: математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10, вып. 3. – С. 17 – 29.
16. Скворцова, М.А. Асимптотическая устойчивость нулевого решения квазилинейных систем нейтрального типа / М.А. Скворцова // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2010. – Т. 40. – С. 307 – 311.
17. Скворцова, М.А. Квазилинейные системы дифференциальных уравнений нейтрального типа / М.А. Скворцова // Материалы XLVIII междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск, 2010. – С. 64.

References

1. Krasovskiy N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Certain problems in the theory of stability of motion]. Moscow, Fizmatgiz, 1959.
2. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Vvedeniye v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow, Nauka, 1971.
3. Hale J. Theory of functional differential equations. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1977.

4. Korenevskiy D.G. *Ustoychivost' dinamicheskikh sistem pri sluchaynykh vozmushcheniyakh parametrov. Algebraicheskiye kriterii* [Stability of dinamical systems under random perturbations of parameters. Algebraic criteria]. Kiev, Naukova dumka, 1989.
5. Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. Stability of time-delay systems. Control Engineering. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.
6. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 15 – 20.
7. Kharitonov V.L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems. *Systems Control Lett.*, 2004, vol. 53, no. 5, pp. 395 – 405.
8. Mondié, S., Kharitonov V.L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2005, vol. 50, no. 2, pp. 268 – 273.
9. Kharitonov V.L., Mondié S., Collado J. Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2005, vol. 50, no. 5, pp. 666 – 670.
10. Khusainov D.Ya., Ivanov A.F., Kozhametov A.T. Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay [Otsenki skhodimosti resheniy lineynykh statsionarnykh sistem differentsial'no-raznostnykh uravneniy s postoyannym zapazdyvaniem]. *Differ. Equ.*, 2005, vol. 41, no. 8, pp. 1196–1200.
11. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Asymptotic properties of solutions to delay differential equations [Asimptoticheskiye svoystva resheniy differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom]. *Vestnik NGU. Ser.: Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2005, vol. 5, iss. 3, pp. 20 – 28.
12. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms [Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom i periodicheskimi koeffitsientami v lineynykh chlenakh]. *Sib. Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 824 – 836.
13. Demidenko G.V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. *J. Anal. Appl.*, 2009, vol. 7, no. 3, pp. 119 – 130.
14. Melchor-Aguilar D., Niculescu S.I. Estimates of the attraction region for a class of nonlinear time-delay systems. *IMA J. Math. Control Inform.*, 2007, vol. 24, no. 4, pp. 523 – 550.
15. Demidenko G.V., Kotova T.V., Skvortsova M.A. Stability of solutions to differential equations of neutral type [Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy neytral'nogo tipa]. *Vestnik NGU. Ser.: Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2010, vol. 10, iss. 3, pp. 17 – 29.
16. Skvortsova M.A. Asymptotic stability of the zero solution to quasi-linear systems of neutral type [Asimptoticheskaya ustoychivost' nulevogo resheniya kvazilineynykh sistem neytral'nogo tipa]. *Trudy mat. tsentra im. N.I. Lobachevskogo* [Proceedings of the Lobachevsky Mathematical Centre]. Kazan, 2010, vol. 40, pp. 307 – 311.
17. Skvortsova M.A. Quasi-linear systems of differential equations of neutral type [Kvazilineynye sistemy differentsial'nykh uravneniy neytral'nogo tipa]. *Materialy XLVIII mezhdunar. nauch. stud. konf. ≪Student i nauchno-tekhnicheskiy progress≫: Matematika* [Materials of XLVIII International Scientific Students Conference ≪Students and Progress in Science and Technology≫: Mathematics]. Novosibirsk, 2010, p. 64.

Мария Александровна Скворцова, аспирант, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Россия, г. Новосибирск), sm-18-nsu@yandex.ru.

Maria Aleksandrovna Skvortsova, Postgraduate Student, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS (Russia, Novosibirsk), sm-18-nsu@yandex.ru.

Поступила в редакцию 31 мая 2011 г.