УДК 519.816

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СРАВНЕНИЮ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

В.И. Ухоботов, П.В. Щичко

AN APPROACH TO RANKINKG FUZZY NUMBERS

V.I. Ukhobotov, P.V. Shchichko

В статье предложен метод сравнения двух нечетких чисел, основанный на сравнении их множеств уровня.

Ключевые слова: нечеткие множества, сравнение нечетких чисел.

In the article has been proposed a method for ranking fuzzy numbers. The method is based on comparison of α-cuts.

Keywords: fuzzy sets, ranking fuzzy numbers.

Введение

При решении задач принятия решения в условиях нечеткой информации довольно часто возникает потребность в сравнении нечетких чисел. Следующая задача иллюстрирует данную необходимость.

Вкладчик, имея валюту в объеме N, выбирает один из двух валютных вкладов с k_i процентной ставкой, $i = 1, 2$. Курс i-й валюты по отношению к базовой на момент вклада равен r_i. На момент окончания вклада он будет равен R_i, точное значение которого не известно. По окончанию срока вклада в базовой валюте вкладчик получит сумму

$$x_i = (1 + k_i)yN, \quad y = \frac{R_i}{r_i}, \quad i = 1, 2.$$

С помощью экспертной оценки построен прогноз значения отношения $\frac{R_i}{r_i}$ в виде нечеткого множества [1]. Это значит, что построены функции $\nu_i : R \to [0, 1]$, значение $\nu_i(y)$ каждого из которых для числа $y \in R$ задают меру того, что отношение $\frac{R_i}{r_i} = y$.

Таким образом, сумма, которая будет на счету у вкладчика, характеризуется функцией $\mu_i(x) = \nu_i(\frac{x}{N(1+k_i)})$. Величина $\mu_i(x)$ задает меру того, что на счету у вкладчика будет сумма x. Вкладчик, выбирая вид валютного вклада, имеет цель сделать сумму x, как можно больше. Следовательно, для решения задачи нам необходимо произвести сравнение нечетких чисел $\mu_i(x)$.

Нечетким числом называется нечеткое множество [1], универсальным множеством которого является множество действительных чисел R. Нечеткое число X однозначно определяется своей функцией принадлежности $\mu : R \to [0, 1]$. Для конкретного действительного числа $x \in R$ значение $\mu(x)$ задает степень принадлежности x нечеткому множеству X.

Зафиксируем число $0 < \alpha \leq 1$. Пусть лицо принимающее решение игнорирует появление тех значений $x \in R$ критерия, для которых $\mu(x) < \alpha$. Тогда он принимает во внимание только возможные значения $x \in X(\alpha)$, где

$$X(\alpha) = \{x \in R : \mu(x) \geq \alpha\}. \tag{1}$$

Множества (1) называются множествами уровня нечеткого числа X.

Будем рассматривать нечеткие числа, у которых множества уровня являются отрезками

$$X(\alpha) = \begin{cases} [g(\alpha), G(\alpha)] & \text{при } 0 < \alpha \le f \le 1 \\ \emptyset \quad \text{при } f < \alpha \le 1 \end{cases}, \quad 0 < f \le 1. \tag{2}$$

Это выполнено, например, для LR-нечетких чисел [2].

В работе [3] дается обзор различных подходов к сравнению нечетких чисел. В работе [4] для каждого нечеткого числа X, у которого $f = 1$, строится оценка

$$Val(X) = \frac{1}{2} \frac{\int\limits_0^1 (g(\alpha) + G(\alpha))p(\alpha)d\alpha}{\int\limits_0^1 p(\alpha)d\alpha}. \tag{3}$$

По этим оценкам сравниваются нечеткие числа.

1. Описание метода

Рассмотрим два нечетких числа X_i, множества уровня $X_i(\alpha)$ которых задаются формулой (2). Относительно функций $g_i(\alpha) \le G_i(\alpha)$ предположим, что они удовлетворяют условиям:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \le f_i \implies g_i(\alpha_1) \le g_i(\alpha_2), G_i(\alpha_1) \le G_i(\alpha_2), \tag{4}$$

$$\inf_{0<\alpha\le f_i} g_i(\alpha) = a_i > -\infty, \sup_{0<\alpha<f_i} G_i(\alpha) = e_i < +\infty. \tag{5}$$

Как отмечалось во введении, если лицо, принимающее решение игнорирует те значения x, для которых $\mu_i(x) < \alpha$, $i = 1, 2$, то он должен сравнивать отрезки (2). Естественно считать, что при выборе отрезка $[g_i(\alpha), G_i(\alpha)]$ ожидаемое среднее значение x критерия равно середине отрезка, а отклонение возможной реализации критерия от этого среднего можно оценивать длинной этого отрезка. Чтобы уменьшить риск большого отклонения возможной реализации критерия от середины отрезка применим критерий математического ожидания – дисперсии [5]

$$\varphi_i(\alpha) = g_i(\alpha) + G_i(\alpha) - \lambda(G_i(\alpha) - g_i(\alpha)) \to \max_i, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Здесь число $\lambda \ge 0$ характеризует субъективное отношение лица, принимающего решение к риску.

Доопределим, что $\varphi_i(\alpha) = -\infty$ при $f_i < \alpha \le 1$, $i = 1, 2$. Обозначим

$$J_{ik} = \{\alpha \in (0, 1] : \varphi_i(\alpha) \ge \varphi_k(\alpha)\}, \quad f_{ik} = \min(f_i, f_k). \tag{7}$$

Задана функция $p : [0, 1] \to [0, 1]$, которая характеризует меру важности степени уровня $\alpha \in (0, 1]$ с точки зрения лица принимающего решение.

Определение 1. *Будем говорить, что нечеткое число X_i не хуже нечеткого числа X_k, если*

$$P_{ik} \ge P_{ki}, \quad \text{где } P_{ik} = \begin{cases} \int\limits_{J_{ik}} p(\alpha)d\alpha, & \text{если } J_{ik} \ne \emptyset \\ P_{ik} = 0, & \text{если } J_{ik} = \emptyset. \end{cases} \tag{8}$$

Существование интеграла в (8) предполагаем.

2. Случай трапецеидальных нечетких чисел

График функции принадлежности трапецеидального нечеткого числа [6] приведен на рис. 1.

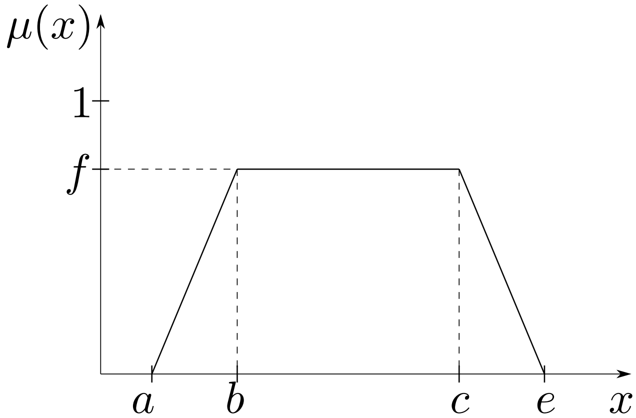

Рис. 1

Очевидно, что условия (2), (4), (5) выполнены. Далее,

$$g(\alpha) = \alpha\frac{b-a}{f}, \quad G(\alpha) = e - \alpha\frac{e-c}{f}, \quad \text{при } 0 \le \alpha \le f,$$

поэтому при $\lambda \ge 0$ функция (6) примет вид

$$\varphi(\alpha) = (1+\lambda)a + (1-\lambda)e + \frac{(1+\lambda)(b-a)-(1-\lambda)(e-c)}{f}, \quad 0 \le \alpha \le f. \tag{9}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= (1+\lambda)\left(\frac{b_i-a_i}{f_i} - \frac{b_k-a_k}{f_k}\right) - (1-\lambda)\left(\frac{e_i-c_i}{f_i} - \frac{e_k-c_k}{f_k}\right), \\ \delta_{ik} &= (1+\lambda)(a_i-a_k) + (1-\lambda)(e_i-e_k). \end{aligned} \tag{10}$$

Из формул (10) и (7) следуют равенства:

$$\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}, \quad \delta_{ik} = -\delta_{ki}, \quad f_{ik} = f_{ki}. \tag{11}$$

Формула (7) принимает вид:

$$J_{ik} = \{\alpha \in (0, f_{ik}] : \delta_{ik} + \alpha\varepsilon_{ik} \ge 0\} \cup (f_k, 1]. \tag{12}$$

Обозначим:

$$P = \int\limits_0^1 p(r)dr. \tag{13}$$

Предложение 1. *Пусть заданы числа* $a, b \in (0;1]$. *Тогда для множества* $J = (0, \min(a,b)] \cup (b,1]$ *верно равенство*

$$\int\limits_J p(r)dr = \min\left(P; P - \int\limits_a^b p(r)dr\right). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $a \leq b \leq 1$. Тогда $J = (0, a] \cup (b, 1]$. Следовательно:

$$\int\limits_J p(r)dr = P - \int\limits_a^b p(r)dr = \min\left(P; P - \int\limits_a^b p(r)dr\right).$$

Пусть $b \leq a \leq 1$. Тогда $J = (0, b] \cup (b, 1] = (0, 1]$. Следовательно:

$$\int\limits_J p(r)dr = P = \min\left(P; P + \int\limits_b^a p(r)dr\right) = \min\left(P; P - \int\limits_a^b p(r)dr\right).$$

□

Вычислим значения чисел P_{ik} и P_{ki} (8) при разных значениях чисел ε_{ik} и δ_{ik}.

1. Пусть $\delta_{ik} = 0$ и $\varepsilon_{ik} = 0$. Тогда, согласно равенствам (11), $\delta_{ki} = 0$ и $\varepsilon_{ki} = 0$. Из формулы (12) получим, что $J_{ik} = (0, f_{ik}] \cup (f_k, 1]$, $J_{ki} = (0, f_k] \cup (f_i, 1]$. Отсюда, используя равенство $f_{ik} = f_{ki} = \min(f_i; f_k)$ и утверждения 1, получим, что

$$P_{ik} = \min\left(P; P - \int\limits_{f_i}^{f_k} p(r)dr\right), \quad P_{ki} = \min\left(P; P - \int\limits_{f_k}^{f_i} p(r)dr\right). \qquad (15)$$

   Следовательно:

$$\begin{cases} P_{ik} = P, \quad P_{ki} = P - \int\limits_{f_k}^{f_i} p(r)dr, \quad \text{при } f_k \leq f_i; \\ P_{ik} = P - \int\limits_{f_i}^{f_k} p(r)dr, \quad P_{ki} = P, \quad \text{при } f_i \leq f_k. \end{cases} \qquad (16)$$

2. Пусть $\delta_{ik} = 0$ и $\varepsilon_{ik} > 0$. Тогда $\delta_{ki} = 0$ и $\varepsilon_{ki} < 0$. Из формулы (12) следует, что: $J_{ik} = (0, f_i] \cup (f_k, 1]$ и $J_{ki} = (f_i, 1]$. Следовательно, P_{ik} задается первой формулой из (15), а $P_{ki} = P - \int\limits_0^{f_i} p(r)dr$. Стало быть,

$$\begin{cases} P_{ik} = P, \quad P_{ki} = P - \int\limits_0^{f_i} p(r)dr, \quad \text{при } f_k \leq f_i; \\ P_{ik} = P - \int\limits_{f_i}^{f_k} p(r)dr, \quad P_{ki} = P - \int\limits_0^{f_i} p(r)dr, \quad \text{при } f_i \leq f_k. \end{cases} \qquad (17)$$

3. Пусть $\delta_{ik} = 0$ и $\varepsilon_{ik} < 0$. Тогда $\delta_{ki} = 0$ и $\varepsilon_{ki} > 0$. Согласно предыдущему пункту

$$\begin{cases} P_{ik} = P - \int\limits_0^{f_k} p(r)dr, \quad P_{ki} = P - \int\limits_{f_k}^{f_i} p(r)dr, \quad \text{при } f_k \leq f_i; \\ P_{ki} = P - \int\limits_0^{f_k} p(r)dr, \quad P_{ki} = P, \quad \text{при } f_i \leq f_k. \end{cases} \qquad (18)$$

4. Пусть $\delta_{ik} > 0$ и $\delta_{ik}+f_{ik}\varepsilon_{ik} \geq 0$. Тогда $J_{ik} = (0, f_{ik}] \cup (f_k, 1]$, $J_{ki} = (f_i, 1]$. Из предложения 1 получим, что:

$$P_{ik} = \min\left(P; P - \int\limits_{f_i}^{f_k} p(r)dr\right), \quad P_{ki} = \int\limits_{f_i}^{1} p(r)dr.$$

Раскрывая первую формулу, получим

$$\begin{cases} P_{ik} = P, \quad P_{ki} = P - \int\limits_{0}^{f_i} p(r)dr, \quad \text{при } f_k \leq f_i; \\ P_{ik} = P - \int\limits_{f_i}^{f_k} p(r)dr, \quad P_{ki} = P - \int\limits_{0}^{f_i} p(r)dr, \quad \text{при } f_i \leq f_k. \end{cases} \tag{19}$$

5. Пусть $\delta_{ik} > 0$ и $\delta_{ik} + f_{ik}\varepsilon_{ik} \leq 0$. В этом случае

$$J_{ik} = \left(0, -\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}\right] \cup (f_k, 1], \quad J_{ki} = \left[-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}, f_k\right] \cup (f_i, 1].$$

Раскрывая последнюю формулу, получим

$$\begin{cases} P_{ik} = \int\limits_{0}^{-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}} p(r)dr + \int\limits_{f_k}^{1} p(r)dr, \quad P_{ki} = \int\limits_{-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}}^{f_k} p(r)dr + \int\limits_{f_i}^{1} p(r)dr, \quad \text{при } f_k \leq f_i; \\ P_{ik} = \int\limits_{0}^{-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}} p(r)dr + \int\limits_{f_k}^{1} p(r)dr, \quad P_{ki} = \int\limits_{-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}}^{1} p(r)dr, \quad \text{при } f_i \leq f_k. \end{cases} \tag{20}$$

6. Пусть $\delta_{ik} < 0$ и $\delta_{ik} + f_{ik}\varepsilon_{ik} \geq 0$. Тогда $\delta_{ki} > 0$ и $\delta_{ki} + f_{ki}\varepsilon_{ki} \leq 0$. Согласно формулам (20)

$$\begin{cases} P_{ik} = \int\limits_{-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}}^{1} p(r)dr, \quad P_{ki} = \int\limits_{0}^{-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}} p(r)dr + \int\limits_{f_i}^{1} p(r)dr, \quad \text{при } f_k \leq f_i; \\ P_{ik} = \int\limits_{-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}}^{f_i} p(r)dr + \int\limits_{f_k}^{1} p(r)dr, \quad P_{ki} = \int\limits_{0}^{-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}} p(r)dr + \int\limits_{f_i}^{1} p(r)dr, \quad \text{при } f_i \leq f_k. \end{cases} \tag{21}$$

7. Пусть $\delta_{ik} < 0$ и $\delta_{ik} + f_{ik}\varepsilon_{ik} \leq 0$. Тогда $\delta_{ki} > 0$ и $\delta_{ki} + f_{ki}\varepsilon_{ki} \geq 0$. Тогда из формулы (19) получим, что

$$\begin{cases} P_{ik} = P - \int\limits_{0}^{f_k} p(r)dr, \quad P_{ki} = P - \int\limits_{f_k}^{f_i} p(r)dr, \quad \text{при } f_k \leq f_i; \\ P_{ik} = P - \int\limits_{0}^{f_k} p(r)dr, \quad P_{ki} = P, \text{при } f_i \leq f_k. \end{cases} \tag{22}$$

Полученные формулы (16) – (22) для случаев $0 < f_2 < f_1$ и $0 < f_2 = f_1$ приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

Результаты сравнения при $f_2 < f_1$

$0 < f_2 < f_1$	$\delta_{12} < 0$	$\delta_{12} = 0$	$\delta_{12} > 0$
$\delta_{12} + f_2\varepsilon_{12} < 0$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_0^{f_2} p(r)dr < \int_{f_2}^{f_1} p(r)dr$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_0^{f_2} p(r)dr < \int_{f_2}^{f_1} p(r)dr$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_{-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}}^{f_2} p(r)dr < \int_0^{-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}} p(r)dr + \int_{f_2}^{f_1} p(r)dr$
$\delta_{12} + f_2\varepsilon_{12} = 0$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_0^{f_2} p(r)dr < \int_{f_2}^{f_1} p(r)dr$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_{f_2}^{f_1} p(r)dr > 0$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_0^{f_1} p(r)dr > 0$
$\delta_{12} + f_2\varepsilon_{12} > 0$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_0^{-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}} p(r)dr < \int_{-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}}^{f_1} p(r)dr$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_0^{f_1} p(r)dr > 0$	$P_{21} < P_{12} \iff \int_0^{f_1} p(r)dr > 0$

Таблица 2

Результаты сравнения при $f_2 = f_1 = f$

$f_2 = f_1 = f$	$\delta_{12} < 0$	$\delta_{12} = 0$	$\delta_{12} > 0$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} < 0$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} < P_{12} \iff 2\int_0^{-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}} p(r)dr > \int_0^{f} p(r)dr$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} = 0$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} = P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} > 0$	$P_{21} < P_{12} \iff 2\int_0^{-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}} p(r)dr < \int_0^{f} p(r)dr$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$

Возьмем $p(r) = mr^{m-1}$, $m \geq 1$. Тогда таблицы 1 и 2 примут вид таблиц 3 и 4.

Таблица 3

Результаты сравнения при $f_2 < f_1$, $p(r) = mr^{m-1}$

$0 < f_2 < f_1$	$\delta_{12} < 0$	$\delta_{12} = 0$	$\delta_{12} > 0$
$\delta_{12} + f_2\varepsilon_{12} < 0$	$P_{21} < P_{12} \iff 2{f_2}^m < {f_1}^m$	$P_{21} < P_{12} \iff 2{f_2}^m < {f_1}^m$	$P_{21} < P_{12} \iff 2{f_2}^m - 2\left(-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}\right)^m < {f_1}^m$
$\delta_{12} + f_2\varepsilon_{12} = 0$	$P_{21} < P_{12} \iff 2{f_2}^m < {f_1}^m$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$
$\delta_{12} + f_2\varepsilon_{12} > 0$	$P_{21} < P_{12} \iff 2\left(-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}\right)^m < {f_1}^m$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$

Таблица 4

Результаты сравнения при $f_2 = f_1 = f$, $p(r) = mr^{m-1}$

$f_2 = f_1 = f$	$\delta_{12} < 0$	$\delta_{12} = 0$	$\delta_{12} > 0$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} < 0$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} < P_{12} \iff 2\left(-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}\right)^m > f^m$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} = 0$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} = P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} > 0$	$P_{21} < P_{12} \iff 2\left(-\frac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}}\right)^m < f^m$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$

Рассмотрим случай, когда эксперт хочет учитывать только значения α близкие к 1, то есть случай $m \to \infty$. Этот случай отображен в таблице 5. Отметим, что в случае $f_2 < f_1$ нечеткое число с меньшей высотой будет всегда меньше нечеткого числа с большей высотой.

Таблица 5

Результаты сравнения при $f_2 = f_1 = f$, $p(r) = mr^{m-1}$, $m \to \infty$

$f_2 = f_1 = f$	$\delta_{12} < 0$	$\delta_{12} = 0$	$\delta_{12} > 0$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} < 0$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} = 0$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} = P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$
$\delta_{12} + f\varepsilon_{12} > 0$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$

Обозначим $\beta = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$. Тогда имеем

$$\delta_{12} = (1+\lambda)(a_1 - a_2 + \beta(e_1 - e_2)),$$

$$\varepsilon_{12} = (1+\lambda)\left(\frac{b_1 - a_1}{f_1} - \frac{b_2 - a_2}{f_2} - \beta\frac{e_1 - c_1}{f_1} + \beta\frac{e_2 - c_2}{f_2}\right).$$

Для $\lambda = 0$ получим

$$\varepsilon_{12} = \left(\frac{b_1 - a_1}{f_1} - \frac{b_2 - a_2}{f_2} - \frac{e_1 - c_1}{f_1} + \frac{e_2 - c_2}{f_2}\right),$$

$$\delta_{12} = (a_1 - a_2 + e_1 - e_2).$$

В соответствии с этим, мы можем переписать условия для сравнений. Они приведены в таблицах 6 и 7.

Таблица 6

Результаты сравнения при $f_2 < f_1$, $p(r) = mr^{m-1}$, $m \to \infty$, $\lambda = 0$

$0 < f_2 < f_1$	$a_1 + e_1 < a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 = a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 > a_2 + e_2$
$\left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right)(a_1 + e_1) + \frac{f_2}{f_1}(b_1 + c_1) < b_2 + c_2$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$
$\left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right)(a_1 + e_1) + \frac{f_2}{f_1}(b_1 + c_1) < b_2 + c_2$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$
$\left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right)(a_1 + e_1) + \frac{f_2}{f_1}(b_1 + c_1) < b_2 + c_2$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$

Таблица 7

Результаты сравнения при $f_2 = f_1 = f$, $p(r) = mr^{m-1}$, $m \to \infty$, $\lambda = 0$

$f_2 = f_1 = f$	$a_1 + e_1 < a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 = a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 > a_2 + e_2$
$b_1 + c_1 < b_2 + c_2$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} > P_{12}$
$b_1 + c_1 = b_2 + c_2$	$P_{21} > P_{12}$	$P_{21} = P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$
$b_1 + c_1 > b_2 + c_2$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$	$P_{21} < P_{12}$

Из таблицы 7 видно, что в случае равенства высот, сначала нужно провести сравнение X_i по ядру $core\, X_i = [b_i, c_i]$. Затем, в случае равенства, сравнение нужно провести по носителю $supp\, X_i = [a_i, e_i]$. Другими словами, необходимо найти оптимальное в лексикографическом смысле решение двухкритериальной задачи

$$b_i + c_i \to \max, \quad a_i + e_i \to \max, \quad i = 1, 2.$$

Литература

1. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М.: Мир, 1976.
2. Дюбуа, Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад. – М.: Радио и связь, 1990.
3. Chen, S. Fuzzy multiple attribute decision making methods and applications / S. Chen, C. Hwang. – N. Y.: Springer, 1992.
4. Yager, R.R. On ranking fuzzy numbers using valuations / R. R. Yager, D. Filev // International J. of Intelligent Systems. – 1999. – V. 14, №. 12. – P. 1249 – 1268.
5. Ухоботов, В.И. Математика. Экономико-математические методы и модели / В.И. Ухоботов, А.Н. Тырсин, С.А. Никитина. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2010.
6. Ухоботов, В.И. Введение в теорию нечетких множеств и ее приложения / В. Ухоботов. – Челябинск: УрСЭИ АТ и СО, 2005.

References

1. Zade L. *Linguistic variable and its appliance in theory of approximate solutions* [Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh resheniy]. Moscow, Mir, 1976.

2. Dyubua D. and Prad A. *Possibility theory. Appliances to representation knowledge in informatics* [Teoriya vozmozhnostey. Prilozheniya k predstavleniyu znaniy v informatike]. Moscow, Radio i svyaz', 1990.

3. Chen S. and Hwang C. *Fuzzy multiple attribute decision making methods and applications.* N. Y., Springer, 1992.

4. Yager R.R. and Filev D. On ranking fuzzy numbers using valuations. *International J. of Intelligent Systems.* 1999, vol. 14, no. 12., pp. 1249 – 1268.

5. Ukhobotov V.I., Tyrsin A.N, and Nikitina S.A. *Mathematics. Economic and mathematical methods and models* [Matematika. Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli]. Chelyabinsk, Izd-vo Chelyab. gos. un-ta, 2010.

6. Ukhobotov V.I. *Introduction into fuzzy set theory and its appliances* [Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv i ee prilozheniya]. Chelyabinsk, UrSEI AT i SO, 2005.

Виктор Иванович Ухоботов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра ≪Теория управления и оптимизация≫,Челябинский государственный университет (Россия, г. Челябинск), ukh@csu.ru.

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Doctor of Physico-mathematical Sciences, Full Pofessor, Department ≪Control Theory and Optimization≫, Chelyabinsk State University (Russia, Chelyabinsk), ukh@csu.ru.

Павел Владимирович Щичко, аспирант, кафедра ≪Теория управления и оптимизация≫, Челябинский государственный университет (Россия, г. Челябинск), pancho@csu.ru.

Pavel Vladimirovich Shchichko, Postgraduate Student, Department ≪Control Theory and Optimization≫, Chelyabinsk State University (Russia, Chelyabinsk), pancho@csu.ru.

Поступила в редакцию 15 июля 2011 г.