

УДК 517.9

МНОГОТОЧЕЧНАЯ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ХОФФА

С.А. Загребина

Статья посвящена изучению однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа. Доказана обобщенная теорема о расщеплении пространств и действий операторов. Полученные абстрактные результаты реализованы в конкретной ситуации.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, многоточечная начально-конечная задача, относительно p -ограниченные операторы, линейная модель Хоффа.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Рассмотрим уравнение Хоффа [1]

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3 + f, \quad (0.1)$$

которое моделирует выпучивание двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой при высоких температурах. Функция $u = u(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, характеризует отклонение балки от положения $u = 0$; параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала балки, а параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризует нагрузку. Начально-краевые задачи для уравнения (0.1) в области $\Omega \times \mathbb{R}$ впервые были изучены Н.А. Сидоровым [2] и его учениками [3, 4], причем в [3, 4] был отмечен феномен несуществования решений этих задач при произвольных начальных данных. Изучение множества начальных значений, обеспечивающих существование и единственность решения начально-краевой задачи для уравнения (0.1), было проведено в [5]. В [6] показано, что это множество, понимаемое как фазовое пространство уравнения (0.1), является простым банаховым C^∞ -многообразием, если $\alpha \cdot \beta > 0$. В [7] показано, что если $\alpha \cdot \beta < 0$, то фазовое пространство уравнения (0.1) уже не будет простым – оно лежит на сборке Уитни. Первым уравнения Хоффа на графе начал изучать Г.А. Свиридюк совместно с В.В. Шеметовой [8]. Им удалось дать полное описание фазового пространства на геометрическом графе. В дальнейшем на графах была решена обратная задача для уравнения Хоффа [9]. Кроме того, были проведены исследования устойчивости уравнений Хоффа на графе и получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости решений уравнений Хоффа в области и на геометрическом графе [10].

В настоящее время внимание многих исследователей привлекает линейная модель Хоффа

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + f. \quad (0.2)$$

Интерес к линейным уравнениям соболевского типа (к которым безусловно относится уравнение (0.2)) инспирирован новым классом задач, к обсуждению которых мы переходим. Прежде всего в подходящих функциональных пространствах редуцируем (0.2) к абстрактному линейному уравнению соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad (0.3)$$

как это делается, например, в [11]. Затем в предположении, что свободный член $f = f(t)$ определен на интервале (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, будем искать (классическое) решение уравнения (0.3), удовлетворяющее следующим условиям

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0, n}, \quad (0.4)$$

$a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < b$, P_j – относительно спектральные проекторы (речь о них пойдет в п.1 настоящей статьи), а u_j – произвольные векторы из банахова пространства \mathfrak{U} . Заметим, что если $n = 1$, то (0.4) превратится в более простую задачу

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = P_1(u(\tau_1) - u_1) = 0, \quad (0.5)$$

которая в [12] названа *начально-конечной*. Задача (0.3), (0.5) в последнее время весьма активно изучается в различных аспектах [13 – 16]. Если же в (0.4) положить $n = 0$, то задача (0.4) редуцируется к *обобщенной задаче Шоуолтера – Сидорова*

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = 0, \quad (0.6)$$

которая уже сыграла важную роль в численных исследованиях экономических [17] и технических [18] моделей. Отметим еще, что задача (0.6) является обобщением классической задачи Коши $u(\tau_0) = u_0$. Сказанное выше позволяет задачу (0.4) для уравнения (0.3) называть *многоточечной начально-конечной задачей* и считать ее последовательным (через (0.5) и (0.6)) обобщением задачи Коши.

Данная статья посвящена изучению разрешимости задачи (0.3), (0.4) при любом $n \in \mathbb{N}$ и приложению полученных абстрактных результатов к многоточечной начально-конечной задаче для линейной модели Хоффа (0.2). Кроме введения и списка литературы статья содержит три части. В первой обсуждаются относительно спектральные проекторы, вторая посвящена задаче (0.3), (0.4), а третья часть содержит приложения к уравнению (0.2). Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия автора.

Наконец, заметим, что все рассуждения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако, при рассмотрении «спектральных вопросов» вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением против часовой стрелки и ограничивают области, лежащие слева при таком движении. Символами \mathbb{O} и \mathbb{I} обозначены соответственно «нулевой» и «единичный» операторы, области определения которых ясны из контекста.

1. Относительно спектральные проекторы

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{F} – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейен и непрерывен) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейен, замкнут и плотно определен). Введем в рассмотрение *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M ([11], п.2.1). Пусть $\sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M)$, причем

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1^L(M) \neq \emptyset, \text{ существует замкнутый контур} \\ \Gamma \subset \mathbb{C}, \text{ ограничивающий область } D \supset \sigma_1^L(M), \\ \text{такой, что } \overline{D} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset. \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

Построим интегралы *типа Ф. Рисса* (понимаемые в смысле Римана)

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu, \quad (1.2)$$

где $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ — правая, а $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ — левая L -резольвенты оператора M .

Лемма 1. Пусть $\sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M)$, причем выполнено (1.1). Тогда операторы $P : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ и $Q : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ — проекторы.

Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P(\ker Q)$, $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1) = \text{im}P(\text{im}Q)$ и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на \mathfrak{U}^k ($\text{dom}M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда

- (i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) $M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$;
- (iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Как известно, оба этих утверждения первым сформулировал и доказал Г.А. Свиридок, правда, при более ограничительном условии, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^L(M) \neq \emptyset, \text{ существует замкнутый контур} \\ \Gamma \subset \mathbb{C}, \text{ ограничивающий область } D \supset \sigma^L(M). \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

Однако внимательный анализ его доказательств (см. [11], лемма 4.1.1 и теорема 4.1.1) показывает, что они годятся и в нашем случае.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Пусть } \sigma^L(M) = \bigcup_{j=0}^n \sigma_j^L(M), n \in \mathbb{N}, \text{ причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset, \\ \text{существует замкнутый контур } \Gamma_j \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } D_j \supset \sigma_j^L(M), \text{ такой, что} \\ \overline{D}_j \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset \text{ и } \overline{D}_k \cap \overline{D}_l = \emptyset \text{ при всех } j, k, l = \overline{1, n}, k \neq l. \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

Аналогично (1.2) построим интегралы

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} L_\mu^L(M) d\mu, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.5)$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие (1.4). Тогда операторы

- (i) $P_j : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ и $Q_j : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ — проекторы, $j = \overline{1, n}$;
- (ii) $P_k P_l = \mathbb{O}$, $Q_k Q_l = \mathbb{O}$, $k, l = \overline{1, n}, k \neq l$.

Доказательство. Утверждение (i) справедливо в силу леммы 1. Докажем (ii).

$$\begin{aligned} P_k P_l &= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma_k} \int_{\Gamma_l} R_\mu^L(M) R_\lambda^L(M) d\mu d\lambda = \\ &= (2\pi i)^{-2} \left(\int_{\Gamma_k} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_{\Gamma_l} R_\mu^L(M) d\mu + \int_{\Gamma_k} R_\lambda^L(M) d\lambda \int_{\Gamma_l} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right) = \mathbb{O} \end{aligned}$$

в силу теоремы о вычетах и правого L -резольвентного тождества

$$R_\lambda^L(M) - R_\mu^L(M) = (\mu - \lambda) R_\mu^L(M) R_\lambda^L(M) \quad (1.6)$$

(тождество (2.1.4) [11]). □

Лемма 3. Пусть выполнены условия (1.3) и (1.4). Тогда операторы $P_0 = P - \sum_{j=1}^n P_j$ и

$$Q_0 = Q - \sum_{j=1}^n Q_j \text{ - проекторы.}$$

(Заметим, что здесь ради экономии места проекторы P_j и Q_j , $j = \overline{1, n}$, из (1.5), а проекторы P и Q из (1.2), но с заменой условия (1.1) на условие (1.3)).

Доказательство. Достаточно показать, что $P_j P = P P_j = P_j$ и $Q_j Q = Q Q_j = Q_j$ при всех $j = \overline{1, n}$. Действительно, в силу (1.6)

$$\begin{aligned} P_j P &= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma_j} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) R_{\lambda}^L(M) d\mu d\lambda = \\ &= (2\pi i)^{-2} \left(\int_{\Gamma_j} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu + \int_{\Gamma_j} R_{\lambda}^L(M) d\lambda \int_{\Gamma} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу теоремы о вычетах, $P_j P = P_j$. Остальные равенства доказываются аналогично. \square

Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P(\ker Q)$, $\mathfrak{U}_j^1(\mathfrak{F}_j^1) = \text{im} P_j(\text{im} Q_j)$, $j = \overline{0, n}$, через $L_0(M_0)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^0(\text{dom} M \cap \mathfrak{U}^0)$, а через $L_{1j}(M_{1j})$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}_j^1(\text{dom} M \cap \mathfrak{U}_j^1)$, $j = \overline{0, n}$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.3), (1.4). Тогда

- (i) $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_j^1; \mathfrak{F}_j^1)$, $j = \overline{0, n}$;
- (ii) $M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_{1j} \in Cl(\mathfrak{U}_j^1; \mathfrak{F}_j^1)$, $j = \overline{0, n}$;
- (iii) существуют операторы $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_j^1; \mathfrak{U}_j^1)$, $j = \overline{0, n}$, и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Доказательство ввиду теоремы 1 и лемм 2, 3 очевидно.

2. Многоточечная начально-конечная задача

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{F} – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2.1}$$

Решением $u = u(t)$ уравнения (2.1) назовем вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению.

Определение 1. Отображение $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ назовем группой разрешающих операторов уравнения (2.1), если

- (i) $U^t U^s = U^{t+s}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$;
- (ii) при всех $v \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u = U^t v$ есть решение уравнения (2.1).

В дальнейшем, следуя традиции, будем отождествлять группу разрешающих операторов уравнения (2.1) с ее графиком $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ и в дальнейшем называть просто группой уравнения (2.1). Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ уравнения (2.1) будем называть аналитической, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость с сохранением свойства (i).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1.3), (1.4). Тогда существуют аналитические группы уравнения (2.1).

Доказательство. Построим интегралы типа Данфорда – Тейлора (понимаемые в смысле Римана)

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad U_j^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad j = \overline{1, n}.$$

Затем, рассуждая аналогично теореме 4.4.1 [11], получим требуемое. \square

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда

- (i) $U^t U_j^s = U_j^s U^t = U_j^{t+s}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n}$;
- (ii) $U_k^t U_l^s = U_l^s U_k^t = \mathcal{O}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}, k, l = \overline{1, n}, k \neq l$.

Доказательство. (i)

$$\begin{aligned} U^t U_j^s &= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_j} R_{\mu}^L(M) R_{\lambda}^L(M) e^{\mu t + \lambda s} d\mu d\lambda = \\ &= (2\pi i)^{-2} \left(\int_{\Gamma} \frac{e^{\mu t} d\mu}{\mu - \lambda} \int_{\Gamma_j} R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda s} d\lambda + \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \int_{\Gamma_j} \frac{e^{\lambda s} d\lambda}{\mu - \lambda} \right) = U_j^{s+t} \end{aligned}$$

в силу теоремы о вычетах и тождества (1.6). Второе равенство в (i) и равенства (ii) доказываются аналогично. \square

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $U_0^t = U^t - \sum_{j=1}^n U_j^t$ – аналитическая группа уравнения (2.1).

Доказательство вытекает из следствия 1.

Далее возьмем вектор-функцию $f \in C^{\infty}((a, b); \mathfrak{F})$ и рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{2.2}$$

Вектор-функцию $u \in C^{\infty}((a, b); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2.2), назовем *решением уравнения (2.2)*. Решение $u = u(t), t \in (a, b)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0, n}, \tag{2.3}$$

назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (2.2)* (см. (0.4)).

Определение 2. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно оператора L* (короче, (L, p) -ограниченным), если выполнено условие (1.3), и точка ∞ является либо устранимой особой точкой ($p = 0$), либо полюсом порядка p ($p \in \mathbb{N}$) L -резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M .

Теорема 4. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, причем выполнено условие (1.4). Тогда для любых $f \in C^{\infty}((a, b); \mathfrak{F}), u_j \in \mathfrak{U}, j = \overline{0, n}$ существует единственное решение задачи (2.2), (2.3), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = - \sum_{q=0}^p (M_0^{-1} L_0)^q M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(q)}(t) + \sum_{j=0}^n U_j^{t-\tau_j} u_j + \sum_{j=0}^n \int_{\tau_j}^t U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j f(s) ds.$$

Доказательство. Уравнение (2.2) посредством теоремы 2 сведем к системе

$$\begin{aligned} M_0^{-1}L_0\dot{u}^0 &= u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f, \\ \dot{u}^{1j} &= L_{1j}^{-1}M_{1j}u^{1j} + L_{1j}^{-1}Q_jf, \quad j = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где каждое уравнение определено на «своем» подпространстве. Из первого уравнения (2.4) получим

$$u^0(t) = - \sum_{q=0}^p (M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(q)}(t).$$

Заметив, что проекторы P_j являются единичными операторами на \mathfrak{U}_j^1 , $j = \overline{0, n}$, в силу (2.3) поставим задачи Коши для остальных уравнений (2.4)

$$\dot{u}^{1j} = L_{1j}^{-1}M_{1j}u^{1j} + L_{1j}^{-1}Q_jf, \quad u^{1j}(\tau_j) = P_ju_j, \quad j = \overline{0, n}. \quad (2.5)$$

Последовательно решая задачи (2.5), получим утверждение теоремы. □

Замечание 1. Из доказательства теоремы 4 видно, что требование гладкости на функцию f можно понизить. Однако при этом понизится гладкость решения (2.2), (2.3).

3. Линейная модель Хоффа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Через \mathfrak{U} и \mathfrak{F} обозначим функциональные пространства, определенные на Ω , в которых оператор Лапласа Δ фредгольмов. Например, это могут быть пространства Соболева

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_p^{k+2}(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\} \text{ и } \mathfrak{F} = W_p^k(\Omega),$$

где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)$; или пространства Гельдера

$$\mathfrak{U} = \{u \in C^{k+2+\delta}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x}(x) = 0, x \in \partial\Omega\} \text{ и } \mathfrak{F} = C^{k+\delta}(\Omega),$$

где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\delta \in (0, 1)$; или еще какие-нибудь пространства, скажем, с третьим краевым условием. Выбор краевого условия здесь не важен, важно требование его однородности. Другими словами, пусть на границе $\partial\Omega$ будет задано краевое условие

$$Au(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.1)$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений задачи (3.1) для оператора Лапласа Δ в области Ω , занумерованную по невозрастанию и с учетом кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $L_2(\Omega)$) последовательность соответствующих собственных функций, $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем пространства \mathfrak{U} и \mathfrak{F} , причем пространство \mathfrak{U} с условием (3.1), и формулами

$$L = \lambda + \Delta, \quad M = \alpha\mathbb{I} \quad (3.2)$$

зададим операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Как известно (см. например [6]), L -спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{\alpha}{\lambda + \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = -\lambda\} \right\}.$$

Выполнение условия (1.3) очевидно, выберем $\sigma_j^L(M)$, $j = \overline{0, n}$, так, чтобы выполнялось условие (1.4) (понятно, что это можно сделать не одним способом). Построим проекторы

$$P_j = \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.3)$$

Возьмем $-\infty \leq a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < b \leq +\infty$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0, n}$, $f \in C^\infty((a, b); \mathfrak{F})$ и рассмотрим задачу (2.2), (2.3), где \mathfrak{U} – функциональное банахово пространство с краевым условием (3.1), операторы L и M из (3.2), а проекторы P_j , $j = \overline{0, n}$, из (3.3).

Лемма 4. При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M ($L, 0$)-ограничен.

Как и в [5, 6] доказательство основано на теореме 4.6.1 [11].

Отсюда и из теоремы 4 вытекает

Теорема 5. При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0, n}$, $f \in C^\infty((a, b); \mathfrak{F})$ много-точечная начальнo-конечная задача для уравнения (0.2) с краевым условием (3.1) имеет единственное решение $u \in C^\infty((a, b); \mathfrak{U})$, которое к тому же имеет вид

$$u(t) = (Q - \mathbb{I})f(t) + \sum_{j=0}^n \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau_j)} \langle u_j, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{j=0}^n \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \int_{\tau_j}^t e^{\mu_k(t-s)} \langle f(s), \varphi_k \rangle \varphi_k ds.$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю признательность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе и поздравить его с шестидесятилетием.

Литература

1. Hoff, N.J. Creep buckling / N.J. Hoff // The Aeronautical Quarterly. – 1956. – V. 7, № 1. – P. 1 – 20.
2. Сидоров, Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1982.
3. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, №9. – С. 1516 – 1526.
4. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, № 4. – С. 726 – 728.
5. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН, сер. математическая. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192 – 207.
6. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начальнo-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Мат. заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292 – 297.
7. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Изв. вузов. Математика. – 2005. – №10. – С. 54 – 60.
8. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126 – 131.

9. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – Самара, 2009. – №1 (18). – С. 6 – 17.
10. Свиридюк, Г.А. Устойчивость уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – Самара, 2010.– №1 (15). – С. 6 – 15.
11. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003. – 228 p.
12. Свиридюк, Г.А. Задача Шоултера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т. 3, №1. – С. 51 – 72.
13. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2008. – № 15 (115), вып. 1. – С. 23 – 26.
14. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейной системы Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 4 (241), вып. 7. – С. 35 – 39.
15. Манакова Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 113 – 114.
16. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 37 (254), вып. 10. – С. 22 – 29.
17. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоултера – Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 4 (241), вып. 7. – С. 40 – 46.
18. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Вып. 12. – С. 181 – 190.

Софья Александровна Загребина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), zagrebina_sophiya@mail.ru.

The Multipoint Initial-finish Problem for Hoff Linear Model

S.A. Zagrebina, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

Article is devoted to the single-digit solvability of multipoint initial-finish value problem for a linear Sobolev-type equations. We prove a generalized theorem of the splitting of the space and operators actions. The obtained abstract results are implemented in a specific situation.

Keywords: Sobolev type equation, multipoint initial-finish problem, relatively p -bounded operators, Hoff linear model.

References

1. Hoff N.J. Creep Buckling. *The Aeronautical Quarterly*, 1956, vol. 7, no.1, pp. 1 – 20.
2. Sidorov N.A. *Common Questions of Regularity in Problems of Ramification Theory*. Irkutsk, Publisher Irkutsk Gos. Univ., 1982.
3. Sidorov N.A., Romanova O.A. Application of Certain Results of Branching Theory in the Solution of Degenerate Differential Equations. *Differential Equations*, 1983, vol. 19, no. 9, pp. 1516 – 1526.
4. Sidorov N.A., Falaleev M.V. Generalized Solutions of Differential Equations with a Fredholm Operator at the Derivative. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 726 – 728.
5. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601 – 614.
6. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 2, pp. 262 – 266.
7. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney Fold in the Phase Space of the Hoff Equation. *Russian Mathematics*, 2005, vol. 49, no. 10, pp. 49 – 55.
8. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff Equations on Graphs. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 139 – 145.
9. Sviridyuk G.A., Bayazitova A.A. On Direct and Inverse Problems for the Hoff Equations on Graph. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009, no. 1 (18), pp. 6 – 17.
10. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Pivovarova P.O. Hoff Equation Stability on a Graph. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010, no. 1 (15), pp. 6 – 15.
11. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, VSP, 2003. 228 p.
12. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-type Equations. *J. News of Irkutsk State University. Series «Mathematics»*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 51 – 72.
13. Zagrebina S.A., Soloveva N.P. The Initial-Finish Problem for Evolution Sobolev Type Equations on a Graph. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2008, no. 15 (115), issue 1, pp. 23 – 26.
14. Zagrebina S.A. The Initial-Finish Problem for the Navier – Stokes Linear System. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2011, no. 4 (241), issue 7, pp. 35 – 39.
15. Manakova N.A., Dylkov A.G. Optimal Control of Solutions of Initial-Finish Problem for the Linear Sobolev Type Equations. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 113 – 114.
16. Zamyshlyayeva A.A. The Initial-Finish Value Problem for Nonhomogenous Boussinesque – Löve Equation. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2011, no. 37 (254), issue 10, pp. 22 – 29.
17. Keller A.V. The Algorithm for Solution of the Showalter – Sidorov Problem for Leontief Type Models. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2011, no. 4 (241), issue 7, pp. 40 – 46.
18. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. The Numerical Solution of the Optimal Demension Problem. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 12, pp. 2524 – 2533.

Поступила в редакцию 27 ноября 2011 г.