УДК 517.9

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

А.А. Замышляева, Е.В. Бычков

В статье доказана однозначная разрешимость задачи Коши для полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка. В работе используются идеи и техника, разработанные Свиридюком Г.А. при исследовании задачи Коши для полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка, и Замышляевой А.А. при решении задачи Коши для линейного уравнения соболевского типа высокого порядка. В работе так же используется теория дифференцируемых банаховых многообразий, которая окончательно оформилась в работах С. Ленга. В качестве приложения приведена начально-краевая задача для модифицированного уравнения Буссинеска. Рассмотрено два случая – первый, когда оператор L при старшей производной по времени непрерывно обратим, тогда для любой точки из касательного расслоения исходного банахова пространства существует единственное решение, лежащее в этом пространстве как траектория. Особое внимание было уделено второму случаю, когда оператор L не является непрерывно обратимым, тогда уравнение Буссинеска является вырожденным, и было построено для него локальное фазовое пространство. Приводятся условия, при которых фазовое пространство данного уравнения является простым банаховым многообразием.

Ключевые слова: фазовое пространство, уравнение соболевского типа, относительно спектрально ограниченный оператор, банахово многообразие.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши — Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{2}$$

для модифицированного уравнения Буссинеска (IMBq — equation) [1]

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha^2 \Delta u + \Delta f(u). \tag{3}$$

Уравнение (3) описывает возмущение свободной поверхности несжимаемой жидкости, при условии потенциальности движения и сохранении массы в слое [2]. В более общем случае позволяет изучать столкновения плоских волн.

Задачу (1) – (3) в подходящих пространствах удается редуцировать к задаче Коши

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \tag{4}$$

для полулинейного уравнения

$$L\ddot{u} = Mu + N(u), \tag{5}$$

где операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}), N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства.

Во многих работах [1, 2] рассматривается ситуация, когда уравнение невырождено. Для нас наиболее интересен случай сингулярного уравнения, когда оператор при старшей производной по времени не является непрерывно обратимым, в частности, когда его ядро нетривиально. Такие уравнения принято называть уравнениями соболевского типа.

Как известно, задача Коши для уравнения соболевского типа не разрешима при любых начальных условиях. На наш взгляд, наиболее плодотворным (если считать уже имеющиеся приложения) подходом к изучению таких уравнений является метод фазового пространства, основы которого были заложены Г.А. Свиридюком и Т.К. Сукачевой [3] при изучении полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка и развиты в работах [4, 5, 6]. Суть этого метода заключается в редукции сингулярного уравнения (5) к регулярному, определенному, однако, не на всем пространстве, а на некотором его подмножестве, состоящем из допустимых начальных значений, понимаемом как фазовое пространство исходного уравнения.

Нашей целью является распространение идей данного метода на случай полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка. При исследовании мы существенно опираемся на теорию неполных линейных уравнений соболевского типа высокого порядка с (L,p)-ограниченным оператором M [7] и теорию дифференцируемых многообразий [8].

Статья, кроме введения и списка литературы, содержит три пункта. В первом приведены результаты теории (L,p)-ограниченных операторов [7]. Второй пункт пункт содержит основные результаты о разрешимости абстрактной задачи (4), (5). В третьем абстрактные результаты применяются для решения задачи (1) – (3).

В заключение условимся о следующем. Все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, но при рассмотрении «спектральных» вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением «против часовой стрелки» и ограничивают области, лежащие «слева» при таком движении. Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначены, соответственно, «единичный» и «нулевой» операторы.

1. (L,p)-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Определение 1. *Множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

называется резольвентным множеством оператора M относительно оператора L (или, L-резольвентным множеством оператора M). Множество $\mathbb{C}\backslash\rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется спектром оператора M относительно оператора L (или, L-спектром оператора M).

Определение 2. *Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}, R^L_\mu = (\mu L - M)^{-1}L, L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются соответственно резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой оператора M относительно оператора L (короче, L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора M).*

Определение 3. *Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если*

$$\exists a > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C} : (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Лемма 1. *Пусть оператор M (L,σ) - ограничен. Тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\lambda(M)d\lambda \ \text{и}\ Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\lambda(M)d\lambda$$

являются проекторами в пространствах $\mathfrak{U}\mathfrak{F}$*, соответственно. Здесь* $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$ [7, с. 89].

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$. Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора L (M) на подпространство $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. [7, с. 90] *Пусть оператор* M (L, σ) *-ограничен. Тогда*
(i) операторы $L_k, M_k : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k, k = 0, 1$;
(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0, \mathfrak{U}^0)$;
(iii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1, \mathfrak{U}^1)$;
(iv) оператор $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1, \mathfrak{F}^1)$.

В условиях теоремы 1 построим операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Определение 4. *Точка* ∞ *называется устранимой особой точкой, полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$*, существенно особой точкой* L*-резольвенты оператора* M*, если* $H \equiv \mathbb{O}; H^p \neq \mathbb{O}, H^{p+1} \equiv \mathbb{O}; H^q \neq \mathbb{O}$ *при всех* $q \in \mathbb{N}$*, соответственно.*

Замечание 1. В дальнейшем устранимую особую точку будем называть *полюсом порядка нуль.* (L, σ)-ограниченный оператор M будем называть (L, p)-ограниченным, если точка ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L-резольвенты.

2. Полулинейное уравнение соболевского типа второго порядка

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \tag{6}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\ddot{u} = Mu + N(u), \tag{7}$$

где операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}), N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор $M(L, 0)$-ограничен.

Определение 5. *Вектор-функцию* $u \in C^2((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$*, удовлетворяющую уравнению (7) при некотором* $\tau \in \mathbb{R}_+$*, называют решением этого уравнения, а если решение удовлетворяет условию (6), то функция u называется решением задачи (6), (7).*

Определение 6. *Множество* $\mathfrak{P}$ *называется фазовым пространством уравнения (7), если*
(i) для любых $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$ *существует единственное решение задачи (6), (7);*
(ii) любое решение $u = u(t)$ *уравнения (7) лежит в* $\mathfrak{P}$ *как траектория, т.е.* $u(t) \in \mathfrak{P}$ *при* $t \in (-\tau, \tau)$.

Если $\ker L = \{0\}$, то уравнение (7) тривиально редуцируется к эквивалентному ему уравнению

$$\ddot{u} = F(u), \tag{8}$$

где оператор $F = L^{-1}(M + N) \in C^\infty(\mathfrak{U})$ по построению. Существование единственного решения $u \in C^\infty((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$ задачи (6), (7) при любых $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$ –доказано в монографии [8, с. 104].

Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и оператор $M(L, 0)$-ограничен, тогда в силу теоремы 1 уравнение (7) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbb{I} - Q)(M + N)(u^0 + u^1), \\ \ddot{u}^1 &= L_1^{-1}Q(M + N)(u^0 + u^1), \end{aligned} \tag{9}$$

где $u^1 = Pu, u^0 = (I - P)u$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$.

Пусть $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, то есть существует точка $u_0 \in \mathfrak{U}$, положим $u_0^1 = Pu_0 \in \mathfrak{U}^1$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке u_0 является банаховым C^k-многообразием, если существуют окрестности $\mathcal{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathcal{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек u_0 и u_0^1 соответственно и C^k-диффеоморфизм $\delta : \mathcal{O}^1 \to \mathcal{O}$ такой, что δ^{-1} равен сужению проектора P на $\mathcal{O}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется банаховым C^k-многообразием, моделируемым пространством $\mathfrak{U}^1$, если оно является банаховым C^k-многообразием в каждой своей точке. Связное C^k-многообразие называется простым, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Пусть выполнено условие:

$$(\mathbb{I} - Q)(M + N'_{u_0}) : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0 - \text{топлинейный изоморфизм.} \tag{10}$$

Тогда в силу теоремы о неявной функции [9, с. 155] существуют окрестности $\mathcal{O}^0 \subset \mathfrak{U}^0$ и $\mathcal{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек $u_0^0 = (I - P)u_0, u_0^1 = Pu_0$ соответственно, и оператор $B \in C^\infty(\mathcal{O}^1; \mathcal{O}^0)$ такой, что $u_0^0 = B(u_0^1)$. Построим оператор $\delta = I + B : \mathcal{O}^1 \to \mathfrak{M}$, $\delta(u_0^1) = u_0$. Тогда оператор δ^{-1} вместе со множеством $\mathcal{O}^1$ задает карту множества $\mathfrak{M}$ и равен сужению проектора P на $\delta[\mathcal{O}^1] = \mathcal{O} \subset \mathfrak{M}$. Таким образом, доказана

Лемма 2. *Множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$ при выполнении (10) является C^∞ многообразием в точке u_0.*

Подействуем производной Фреше второго порядка $\delta''_{(u^1,v^1)}$ на второе уравнение системы (9). Тогда, так как

$$\delta''_{(u^1,v^1)}\ddot{u}^1 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\delta(u^1)\right) \text{ и } \delta(u^1) = u,$$

получим уравнение вида (8), определенное на $\mathcal{O}$, где

$$F(u) = \delta''_{(u^1,v^1)} L_1^{-1} Q(M + N)(u).$$

Теорема 2. *Пусть оператор $M(L, 0)$-ограничен, оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Тогда для любой пары $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{M}$ при выполнении условия (10), существует единственное решение задачи (6)–(7), лежащее в $\mathfrak{M}$.*

Справедливость теоремы следует из классических результатов для невырожденных дифференциальных уравнений, заданных на банаховом многоообразии [8, с. 104].

3. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска

Проведем редукцию задачи (1) – (3) к задаче (4) – (5), для этого положим

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{l+2}(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_2^l(\Omega).$$

Операторы L, M, N зададим формулами:

$$L = \lambda - \Delta, \quad M = \alpha^2\Delta, \quad N(u) = \Delta f(u).$$

При любом $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Обозначим через $\sigma(\Delta) = \{\lambda_k\}$ множество собственных значений однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ, занумерованных по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L^2(\Omega)$.

Лемма 3. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор M является $(L,0)$-ограниченным* [7, с. 125].

В дальнейшем нам понадобится теорема о регулярности [10, с. 197], которая в наших обозначениях выглядит следующим образом:

Лемма 4. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $l > n/2$. Тогда $F \in C^\infty\big(W_2^l(\Omega)\big)$, где оператор $F : u \to f(u)$.*

Тогда для нашей ситуации, получим

Лемма 5. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и пусть $l+2 > n/2$. Тогда оператор $N : u \to \Delta f(u)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.*

Доказательство. В силу леммы 4 оператор $F : u \to f(u)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathfrak{U})$, а следовательно оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, как композиция оператора $F : u \to f(u)$ и оператора Лапласа $\Delta \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. □

Итак, редукция задачи (1) – (3) к задаче (4) – (5) закончена. По лемме 1 построим проектор

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \ \text{если} \ \lambda \notin \sigma(\Delta), \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda=\lambda_k} \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l. \end{cases}$$

Проектор Q имеет тот же вид, но определен на пространстве $\mathfrak{F}$.

Зафиксируем $l > n/2 - 2$ и построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{U}, \ \text{если} \ \lambda \notin \sigma(\Delta), \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \varphi_l\} \end{cases}$$

и пространство

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, \ \text{если} \ \lambda \notin \sigma(\Delta), \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \varphi_l\}. \end{cases}$$

В случае $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ множество $\mathfrak{M}$ является гладким банаховым C^∞-многообразием. Если $\lambda \in \sigma(\Delta), u_0 \in \mathfrak{M}$ и выполнено условие (10), то в силу леммы 2 $\mathfrak{M}$ является банаховым C^∞-многообразием в точке u_0.

Теорема 3. *(i) При любых $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, $l > n/2-2$, $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ и некотором $\tau > 0$ существует единственное решение $u \in C^\infty\big((-\tau,\tau),\mathfrak{U}\big)$ задачи (1) – (3).*
(ii) Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $l > n/2-2$, $(u_0,u_1) \in T\mathfrak{M}$ и выполнено условие (10). Тогда при некотором $\tau > 0$ существует единственное решение $u \in C^\infty\big((-\tau,\tau),\mathfrak{M}\big)$ задачи (1) – (3).

Из теоремы 3(i) вытекает, что в случае $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, множество $\mathfrak{M}$ является фазовым пространством уравнения (3). В случае $\lambda \in \sigma(\Delta)$ любое решение задачи (1) – (3) лежит в $\mathfrak{M}$ как траектория. Осталось найти условия, при которых множество $\mathfrak{M}$ является простым банаховым C^∞-многообразием. В [13] было показано, что если оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ оператор $(-N)$ s-монотонен и сильно коэрцитивен, причем в т. $u=0$ $N'_u = \mathbb{O}$, то множество $\mathfrak{M}$ является простым банаховым C^∞-многообразием, моделируемым пространством $\mathfrak{U}^1$. Эти условия выполняются, в частности, если оператор N определятся посредством функции

$$f(u) = -\sum_{m=1}^{\infty} a_m u^{2m+1}, \quad a_m \in \overline{R}_+,$$

либо посредством функции

$$f(u) = -|u|^{q-2}u, \quad q \geq 2.$$

В заключение, хотелось бы поблагодарить своего научного руководителя, замечательного педагога и хорошего человека, Свиридюка Георгия Анатольевича, за ценные и своевременные советы и консультации.

Литература

1. Wang, S. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation/ S. Wang, G. Chen // Mathematical Analysis and Application. – 2002. – V. 274. – P. 846 – 866.

2. Архипов, Д.Г. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованых волн в диспергирующих средах / Д.Г. Архипов, Г.А. Хабахпашев // Письма в ЖЭТФ. – 2011. – Т. 93, № 8. – С. 469 – 472.

3. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева// Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250 – 258.

4. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007.– № 3. – С. 22 – 28.

5. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. — 2009. — Т. 16, № 2. – С. 345 – 346.

6. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. –Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.

7. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

8. Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – М.: Мир, 1967.

9. Ниренберг, Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М.: Мир, 1980.

10. Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн.– М.: Мир, 1985.

11. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной обобщенной модели Осколкова / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак// Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44, № 5. – С. 1124 – 1131.

Алена Александровна Замышляева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alzama@mail.ru.

Евгений Викторович Бычков, аспирант, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), bychkov42@gmail.com.

MSC 35A01

The Phase Space of the Modified Boussinesq Equation

A.A. Zamyshlyaeva, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
E.V. Bychkov, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

We proved a unique solvability of the Cauchy problem for a class of semilinear Sobolev type equations of the second order. We used ideas and techniques developed by G.A. Sviridyuk for the investigation of the Cauchy problem for a class of semilinear Sobolev type equations of the first order and by A.A. Zamyshlyaeva for the investigation of the high-order linear Sobolev type equations. We also used theory of differential Banach manifolds which was finally formed in S. Leng's works. The initial-boundary value problem for the modified Bussinesq equation was considered as application. In article we considered two cases. The first one is when an operator L at the highest time derivative is continuously invertible. In this case for any point from a tangent fibration of an original Banach space there exists a unique solution lying in this space as trajectory. Particular attention was paid to the second case, when the operator L isn't continuously invertible and the Bussinesq equation is degenerate one. A local phase space in this case was constructed. The conditions for the phase space of the equation being a simple Banach manifolds are given.

Keywords: phase space, Sobolev type equation, relatively spectrally bounded operator, Banach manifold.

References

1. Wang S., Chen G. Small Amplitude Solutions of the Generalized IMBq Equation. *Mathematical Analysis and Application*, 2002, vol. 274, pp. 846 – 866.
2. Arkhipov D.G., Khabakhpashev G.A. The New Equation to Describe the Inelastic Interaction of Nonlinear Localized Waves in Dispersive Media. *JTEP Letters*, 2011, vol. 93, no. 8, pp. 423 – 426.
3. Sviridyuk G.A., Sukacheva, T.G. The Phase Space of a Class of Operator Equations of Sobolev Type [Fazovye prostranstva odnogo klassa operatornykh uravneniy tipa Soboleva]. *Differential Equation,* 1990, vol. 26, no. 2, pp. 250 – 258.
4. Zagrebina S.A. On the Showalter-Sidorov Problem. *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, no. 3, pp. 19 – 24.
5. Keller A.V. Numerical Solution of the Starting Control System of Equations of Leontiev Type [Chislennoe reshenie zadachi startovogo upravleniya dlya sistemy uravneniy leont'evskogo tipa]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Industrial and Applied Mathematics], 2009, vol. 16, no. 2. pp. 345 – 346.
6. Manakova N.A. Optimal Control Problem for the Oskolkov Nonlinear Filtration Equation. *Differential equations,* 2007, vol. 43, no. 9, pp. 1213 – 1221.
7. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003.
8. Leng S. *Introduction to Differentiable Manifolds.* New-York, Spriger, Verlag, 2002.
9. Nirenberg L. *Topics in Nonlinear Functional Analysis.* New ed., New-York, 2001.
10. Hassard B.D. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation.* Cambridge University Press, 1981.
11. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of one Generalized Model by Oskolkov. *Siberian Mathematical journal,* 2003, vol. 44, no 5, pp. 877 – 882.

Поступила в редакцию 7 февраля 2012 г.