УДК 517.927.2

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Ю.С. Асфандиярова, В.И. Заляпин, Е.В. Харитонова

Рассмотрен линейный дифференциальный оператор и система краевых условий, задаваемая линеными в пространстве n раз непрерывно дифференцируемых функций линейно-независимыми функционалами. Функция Грина для краевой задачи, определенной этим оператором и упомянутыми функционалами, строится как решение интегрального уравнения Фредгольма II рода, параметры которого определяются функцией Грина вспомогательной задачи. Полученная таким образом функция Грина дает возможность эффективно решить как прямую (т.е. задачу нахождения решения), так и обратную (т.е. задачу нахождения правой части уравнения по экспериментально полученному решению) задачи. Предложен и апробирован алгоритм численного решения краевой задачи и задачи обращения дифференциального оператора на базе предложенного метода построения функции Грина.

Ключевые слова: краевая задача, функция Грина, интегральные уравнения.

Введение

Различные физические и биологические процессы, а также высокоточные динамические измерительные процедуры (например [1]) приводят к необходимости рассмотрения неклассических задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Здесь возникают задачи типа задачи Валле-Пуссена (например [2]):

$$\begin{cases} L[x] = x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)x' + p_0(t)x = f, \\ x^{(s)}(t_j) = X_j^s,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ s = 0, 1, \ldots, n_j - 1, \\ a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_k \le b,\ \sum\limits_{j=1}^{k} n_j = n \end{cases}$$

или задачи Ильина – Моисеева ([3]):

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right) - q(t)x = f$$

$$x(0) = 0,\ \sum \alpha_j x(t_j) = x(1),\ t \in [0; 1]$$

$$0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_k \le 1.$$

Подобные и другие задачи стимулировали интерес исследователей к общим линейным краевым задачам

$$L[x] = f(t), \quad t \in [a; b], \quad U_j(x) = u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Впервые такие задачи рассматривались еще в начале прошлого века (например Тамаркин Я.Д., Петроград, 1917). Впоследствии ими интенсивно занимались многие математики, из которых отметим Азбелева Н.В., Левина А.Ю., Покорного Ю.В., их учеников и последователей.

В настоящей работе обсуждается проблема нахождения функции Грина задачи (1) и связанная с ней задача восстановления правой части уравнения

$$L[x] = x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + p_1(t)x' + p_0(t)x = f(t)$$

по экспериментально измеренному решению $\hat{x}(t)$.

Замечание 1. Экспериментальный сигнал $\hat{x}(t)$, как правило, зашумлен помехами, поэтому нахождение $f(t)$ непосредственной подстановкой $\hat{x}(t)$ в уравнение приводит к значительным ошибкам. Даже подстановка в (1) регуляризованных производных, найденных по $\hat{x}(t)$, для уравнений высоких порядков дает неудовлетворительный с точки зрения приложений результат.

Более привлекательным путем восстановления $f(t)$ по наблюдаемому в эксперименте сигналу $\hat{x}(t)$ является обращение дифференциального оператора, порожденного задачей (1), что приводит к задаче решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно функции $f(t)$ при заданной $\hat{x}(t)$.

1. Основные соотношения

Рассмотрим общую линейную краевую задачу (1), где $p_i(t),\ i = 0, 1, \dots, n-1$ – непрерывные на промежутке $[a; b]$ функции, а $U_j,\ j = 1, \dots, n$ – линейные и линейно-независимые в $C^n_{[a;b]}$ функционалы.

Назовем задачу (1) *полуоднородной*, если $\forall j\ u_j = 0$ и *однородной*, если одновременно с этим выполняется $f(t) = 0\ \forall t \in [a; b]$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Каковы бы ни были линейно-независимые функционалы U_j для произвольного набора чисел u_j, существует функция $x_U(t) \in C^n_{[a;b]}$ такая, что*

$$U_j(x_U) = u_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots n.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = C^n_{[a;b]}$ – пространство n раз непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций, $\mathcal{L} = \mathcal{M}^*$ – сопряженное к нему пространство линейных на $\mathcal{M}$ функционалов с естественной двойственностью $\langle U, x\rangle = U(x)$.

По теореме о биортогональном базисе ([4]), в силу линейной независимости функционалов U_i, найдутся функции $x_1, x_2, \dots, x_n$ из $\mathcal{M}$ такие, что $U_i(x_j) = \delta_{ij}$. Положив $x_U = u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n$, получим искомую функцию. □

Следствие 1. *Каковы бы ни были линейно-независимые функционалы U_j для произвольного набора чисел u_j, общая линейная краевая задача (2) может быть сведена к полуоднородной краевой задаче.*

Последнее утверждение очевидно – достаточно положить $z = x - x_U$, чтобы получить полуоднородную задачу для функции $z(t)$.

В дальнейшем, не ограничивая общности рассуждений, будем рассматривать полуоднородный вариант задачи (1):

$$\begin{cases} L[x] = x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + p_1(t)x' + p_0(t)x = f(t), t \in [a; b], \\ U_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Напомним ([7]), что функцией Грина называется функция $G(t, \tau), (t, \tau) \in [a; b] \times [a; b]$, реализующая обращение дифференциального оператора (2) посредством интегрального оператора, для которого она является ядром:

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Справедлива

Теорема 2. *Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то полуоднородная задача (2) обладает единственной функцией Грина. При этом соотношение (3) дает единственное решение задачи (2).*

Если фундаментальная система решений однородного уравнения $L(x) = 0$ известна, то функция Грина легко может быть построена с использованием перечисленных свойств. Однако, в общем случае, построение функции Грина задачи (2) непростая задача.

2. Вспомогательная задача

Назовем *вспомогательной* для задачи (2) задачу

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t), \\ U_j(x) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{4}$$

полученную из задачи (2) заменой линейного дифференциального выражения $L[x]$ на дифференциальное выражение $\tilde{L}[x] = x^{(n)}$.

Фундаментальная система решений вспомогательной задачи может быть записана в виде

$$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t - a, \ldots, \varphi_k(t) = (t-a)^{k-1}, \ldots, \varphi_n(t) = (t-a)^{n-1}, \quad t \in [a; b].$$

Теорема 3. *Вспомогательная задача однозначно разрешима тогда и только тогда, когда матрица $U(\varphi) = \|U_i(\varphi_j)\|, \ i, j = 1, 2, \ldots, n$ невырождена.*

Однозначная разрешимость задачи (4) обеспечивает существование ее функции Грина $\tilde{G}(t,\tau)$, а известная фундаментальная система решений задачи (4) дает возможность найти функцию $\tilde{G}(t,\tau)$ в виде:

$$\tilde{G}(t,\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)(t-a)^{i-1}, & t \in \ [a; \tau) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(\tau)(t-a)^{i-1}, & t \in \ (\tau; b] \end{cases},$$

определяя коэффициенты $\alpha_i(\tau)$ и $\beta_i(\tau)$ из условий, наложенных на функцию Грина.

Пример 1. Простая задача Валле-Пуссена.

Зададим на промежутке $[a; b]$ точки $a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b$ и положим $U_j(x) = x(t_j), \ j = 1, 2, \ldots, n$. Задача (2) в этом случае — т.н. *простая* задача Валле-Пуссена. Ее однозначная разрешимость обеспечивается невырожденностью матрицы Вандермонда $U(\varphi) = \|U_i(\varphi_j)\|$. Функция Грина $\tilde{G}(t,\tau)$ может быть найдена, как указано выше, при этом, граничные условия $U_j(\tilde{G}(t,\tau)) = 0$ принимают вид

$$U_j(\tilde{G}(t,\tau) = \tilde{G}(t_j,\tau) = 0 = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)(t_j-a)^{i-1}, & j: \ t_j \in \ [a; \tau) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(\tau)(t_j-a)^{i-1}, & j: \ t_j \in \ (\tau; b]. \end{cases}$$

Подробнее в [5].

Пример 2. Распределенные данные.

Зададим на промежутке $[a;b]$ функции $\sigma_j(t),\ j=1,2,\dots n$ и положим

$$U_j(x)=\int\limits_a^b x(\tau)\sigma_j(\tau)d\tau.$$

Задача (4) в этом случае — задача *с распределенными данными.* Функция Грина находится, как и выше, непосредственно по определению.

Например, для системы степеней $\sigma_j(t)=t^{j-1},\ j=1,2,\dots,n$ коэффициенты $\alpha_i(\tau)$ и $\beta_i(\tau)$ даются соотношениями

$$\alpha_i(\tau)=\frac{(-\tau)^{(n-i-1)}(\tau-1)^n}{i!(n-i-1)!(n-1)!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{i}\frac{(n+k-1)!}{k!}\tau^k\right),$$

$$\beta_i(\tau)=\frac{(-1)^{n-1}\tau^{1+i}}{i!(n-1)!(n-i-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+i+n+k)!}{(2+i+k)!}\tau^k,\quad i=0,1,\dots,n-1.$$

Подробнее в [6].

3. Функция Грина основной задачи

Везде в дальнейшем предполагается, что соответствующие задачи однозначно разрешимы, так что упоминаемые функции Грина существуют.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\Gamma(t,s)$, даваемую соотношением:

$$\Gamma(t,\tau)=G(t,\tau)-\tilde{G}(t,\tau)$$

Лемма 1. *Функция $\Gamma(t,\tau)$ на прямоугольнике $K=\{(t,\tau): a\le t,\tau\le b\}$ непрерывна по t и по τ и имеет непрерывные производные по t до n-ого порядка включительно.*

Доказательство. Функции $G(t,\tau)$ и $\tilde{G}(t,\tau)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по t до $(n-2)$-го порядка включительно, $n-1$-ые производные непрерывны для $t\in[a,\tau)\cup(\tau,b]$, а при $t=\tau$ они имеют разрыв:

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=\tau^+}-\left.\frac{\partial^{n-1}G(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=\tau^-}=1.$$

Следовательно, $n-1$-ая производная функции $\Gamma(t,\tau)$ непрерывна и при $t=\tau$.

Далее, заметим, что для $\forall t\in[a,\tau)\cup(\tau,b]$:

$$L[\Gamma]=L[G]-L[\tilde{G}]=L[G]-\tilde{L}[\tilde{G}]-\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t)\frac{\partial^k\tilde{G}(t,\tau)}{\partial t^k}.$$

Т.к. $L[G]=\tilde{L}[\tilde{G}]=0$, получаем

$$L[\Gamma]=-\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t)\frac{\partial^k\tilde{G}(t,\tau)}{\partial t^k}.$$

В то же время

$$L[\Gamma] = \frac{\partial^n \Gamma}{\partial t^n} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \Gamma}{\partial t^k}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^n \Gamma}{\partial t^n} = -\sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \Gamma}{\partial t^k} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \tilde{G}(t,\tau)}{\partial t^k}.$$

Последнее равненство верно для всех t, следовательно, $\dfrac{\partial^n \Gamma(t,\tau)}{\partial t^n}$ непрерывна для любого $t \in [a,b]$.

Таким образом, лемма доказана. □

Теорема 4. *Пусть задача* (2) *однозначно разрешима. Тогда функция Грина* $G(t,\tau)$ *этой задачи является единственным решением интегрального уравнения:*

$$G(t,\tau) - \tilde{G}(t,\tau) = \int_a^b G(t,s)V(s,\tau)ds, \tag{5}$$

где $\tilde{G}(t,\tau)$ *– функция Грина вспомогательной задачи* (4) *, и* $V(\tau,s) = -\sum_{k=0}^{n-1} p_k(\tau) \dfrac{\partial^k \tilde{G}(\tau,s)}{\partial \tau^k}$.

Доказательство. Из леммы (1) следует, что при фиксированном s функция $\Gamma(t,s)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} L[\Gamma(t,s)] = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \tilde{G}(t,s)}{\partial t^k} \\ U_j(\Gamma(t,s)) = 0, \ j = 1,2,\dots,n. \end{cases}$$

Следовательно, по определению функции Грина, функция $\Gamma(t,s)$ может быть представлена следующим образом:

$$\Gamma(t,s) = \int_a^b G(t,\tau)V(\tau,s)d\tau.$$

Таким образом, функция Грина основной задачи (3) действительно является решением уравнения (5).

Теперь докажем, что $G(t,\tau)$ является единственным решением этого уравнения.

Пусть $Q(t,\tau)$ – другое решение уравнения (5), тогда функция Грина задачи (3) может быть представлена в виде:

$$G(t,\tau) = Q(t,\tau) + r(t,\tau),$$

где $r(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$\int_a^b r(t,\tau)V(\tau,s)d\tau = r(t,s).$$

Пусть $u(t)$ произвольная функция, непрерывная на $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b G(t,s)u(s)ds = \int_a^b Q(t,s)u(s)ds + \int_a^b r(t,s) \int_a^b V(s,\tau)u(\tau)d\tau ds.$$

Последний интеграл может быть представлен в форме:

$$\int_a^b r(t,s)\int_a^b V(s,\tau)u(\tau)d\tau ds = -\int_a^b r(t,s)\sum_{k=0}^{n-1} p_k(s)\int_a^b \frac{\partial^k \tilde{G}(s,\tau)}{\partial s^k}u(\tau)d\tau ds.$$

Пусть $\tilde{x}(t)$ решение вспомогательной задачи (4) с правой частью $f(t) = u(t)$, тогда

$$\tilde{x}^{(k)}(s) = \int_a^b \frac{\partial^k \tilde{G}(s,\tau)}{\partial s^k}u(\tau)d\tau.$$

Тогда решение основной задачи (3) может быть записано в виде

$$x(t) = \int_a^b Q(t,s))u(s)ds - \int_a^b r(t,s)\sum_{k=0}^{n-1} p_k(s)\tilde{x}(s)ds.$$

Заметим, что

$$L[\tilde{x}(s)] = u(s) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(s)\tilde{x}(s).$$

Учитывая представление $r(t,s)$ через $G(t,s)$ и $Q(t,s)$ и предыдущее выражение $x(t)$, получаем:

$$\int_a^b r(t,s)L[\tilde{x}(s)]ds \equiv 0, \quad \forall u(t) \in C_{[a,b]}.$$

В силу произвольности функции $u(t)$ и единственности решения задачи (2) отсюда следует, что $r(t,s) \equiv 0$, чем доказательство и завершается. $\square$

4. Численный анализ

Основой для построения численных процедур решения как прямой (т.е. нахождения решения $x(t)$ задачи (3)), так и обратной (т.е. восстановления правой части $f(t)$ уравнения $L[x] = f$ по неточно заданному решению $\hat{x}(t)$) задачи, служат полученные выше соотношения (3) и (5).

Прямая задача решается в два этапа, первый из которых — нахождение функции Грина из уравнения (5), а второй — вычисление интеграла (3). Уравнение (5) — интегральное уравнение Фредгольма II рода, и особых проблем в реализации процедуры численного решения этого уравнения нет.

Для решения обратной задачи используется соотношение (3), рассматриваемое как уравнение Фредгольма I-го рода относительно функции $f(t)$ при заданном решении $\hat{x}(t): \ Af = \hat{x}$. Оператор A здесь — интегральный оператор, ядро которого найденная из (5) функция Грина. Как хорошо известно, эта задача относится к классу некорректно поставленных, и численные процедуры требуют регуляризации.

Для получения регуляризованного решения задачи применяется метод невязки, предполагающий минимизацию функционала

$$\mathcal{F}^\lambda = \|Af - \hat{x}\|^2 + \lambda \cdot \Omega(f),$$

при некотором значении параметра регуляризации λ. Стабилизатор Ω берется в виде

$$\Omega(U) = \int_a^b \mu(t)f^2(t)dt,$$

параметр регуляризации определяется итерационно по известной информации о точности задания правой части.

Расчетные алгоритмы строились двумя различными способами. Во-первых, для задачи минимизации выписывалось необходимое условие экстремума (интегро-дифференциальное уравнение Эйлера), которое затем дискретизировалось и сводилось к системе уравнений, подлежащей решению. Второй способ предполагал сначала дискретизацию задачи минимизации функционала $\mathcal{F}^{\lambda}$, а затем минимизацию полученной таким образом функции многих переменных.

Оба способа использовали для дискретизации исходной задачи кусочно-линейные лагранжевы аппроксимации на промежутке $[a, b]$. Разработанные алгоритмы верифицировались на тестовых примерах ([6]), для построения которых задавались пробные решения $f(\tau)$, а правые части $\hat{x}(t)$ определялись подстановкой $\hat{x} = Af$.

Описанный алгоритм реализован на языке Си++ с использованием стандарта MPI-2 (Message Passing Interface) на высокопроизводительном вычислительном кластере «СКИФ Аврора ЮУрГУ» (332 процессора 1328 вычислительных ядер, 12,2 триллиона операций в секунду) суперкомпьютерного центра ЮУрГУ.

Литература

1. Shestakov, A. L. Dynamic Error Correction Method /A.L. Shestakov // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1996. – V. 45, №1. – P. 250–255.

2. Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.1 / Сансоне Дж. – М.: ИЛ, 1953.

3. Ильин, В.А. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной форме /Ильин В.А., Моисеев Е.И. // ДАН СССР. – 1986. – Т. 291, №3. – С. 534–539.

4. Тихомиров, В.М. Некоторые вопросы теории приближений / Тихомиров В.М. – М.: МГУ, 1976. – 305 с.

5. Zalyapin, V. Inverse problem of the measurements theory / Zalyapin V.I., Kharitonova H.V., Yermakov S.V. // Inverse problems, Design and Optimization Symposium, Miami, Florida, USA. – 2007. – P. 91–96.

6. Асфандиярова, Ю.С. Функция Грина линейной краевой задачи с нелокальными данными / Асфандиярова Ю.С., Заляпин В.И. // Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского / Казан. матем. общ-во, Казань. – 2009. – Т. 39. – С. 128.

7. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Юлия Сагитовна Асфандиярова, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), asfandiyarova@list.ru.

Владимир Ильич Заляпин, кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), vzal@susu.ac.ru.

Елена Владимировна Харитонова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alena@math.susu.ac.ru.

MSC 34B27

The Method of the Integral Equations to Construct the Green's Function

Yu.S. Asfandiyarova, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
V.I. Zalyapin, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
Ye.V. Kharitonova, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

Linear differential operator and the system of the boundary conditions were considered. The boundary conditions are linear and linear independent functionals. The Green's function for the defined by this operator and functionals boundary problem was build as solution of the Fredholm's integral equation of the second kind. Characteristics of the Fredholm's equation was defined by the Green's function of the auxiliary problem. Resulting Green's function makes it possible to solve both direct (the problem of finding solutions) and inverse (the problem of finding the right part of the equation from the experimentally obtained solution) problems. The numerical algorithm to solve boundary problem and inverse problem was build on the basis of the proposed method and tested .

Keywords: linear boundary problem, Green's function, integral equations.

References

1. Shestakov A.L. Dynamic Error Correction Method. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1996, vol. 45, no. 1, pp. 250–255.
2. Sansone D. *Ordinary Differential Equations, vol.1.* Moscow, IL, 1953. (in Russian)
3. Ilyin V.A., Moiseev Ye.I. Differential and Difference Form for the Nonlocal Boundary Problem of the Sturm-Liouville's Operator. *DAN USSR*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 534–539. (in Russian)
4. Tikhomirov V.M. *Some Problems of the Approximation Theory.* Moscow, MSU, 1976. 305 p. (in Russian)
5. Zalyapin V.I., Kharitonova H.V., Yermakov S.V. Inverse problem of the measurements theory. *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium*, Miami, Florida, USA, 2007, pp. 91–96.
6. Asfandiyarova Yu.S., Zalyapin V.I. The Green's Function of the Linear Boundary Problem with Non-local Data. *Proceedings of the Lobachevskii's Mathematical Center: Kazan Mathematical Society*, 2009, vol. 39, pp. 128. (in Russian)
7. Neimark M.A *Linear Differential Operators.* Moscow, Nauka pub., 1969, 528 p. (in Russian)

Поступила в редакцию 15 июня 2012 г.