

КОМПЛЕКС МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВЛАГООБМЕНА МЕЖДУ КНИГАМИ И ВОЗДУХОМ В ХРАНИЛИЩАХ

Е.Г. Кузьмина

Проблема поддержания оптимального температурно-влажностного режима является основной при хранении экспонатов в музеях и обеспечении сохранности настенной живописи и икон в храмах, поскольку отклонение этих величин от нормы приводит к разрушению материалов. Данная работа посвящена исследованию процесса влагообмена между воздушной средой книгохранилища и книгами, размещенными на полке. На основе разработанного алгоритма были проведены расчеты распределения влажности при высыхании и увлажнении листа бумаги для различных термовлажностных показателей книгохранилища, исследовано влияние интерьера книжных полок на закономерности диффузии водяного пара из воздуха книгохранилища в воздух между листами книги и в сами листы. Был осуществлен анализ результатов расчетов и сопоставление их с имеющимися опытными данными.

Ключевые слова: процесс влагообмена между воздушной средой книгохранилища и книгами, уравнение диффузии.

Введение

Практическая направленность работы обусловливается тем, что она является частью проблемы создания оптимальных тепловлажностных показателей воздушной среды книгохранилищ, библиотек, архивов документов.

Температура и влажность воздуха в помещении оказывают решающее влияние на прочность и старение бумажных материалов. При высокой температуре (выше 22 °С) материалы стареют быстрее, так как каждое повышение температуры ускоряет химический процесс. Если с повышением температуры повышается и уровень влажности воздуха (выше 65–70% относительной влажности), то это может привести к росту числа микроорганизмов. При очень низкой влажности воздуха (ниже 35–40% относительной влажности) материалы высыхают, теряют эластичность, которая необходима для их сохранности.

1. Моделирование процесса

В данной работе моделируется перенос водяного пара из воздуха в помещении внутрь книги. Суммарный поток влаги в капиллярно-пористом веществе, к которому относится бумага, состоит из трех компонентов [1]:

$$\vec{j} = -D_U \nabla U - D_T \nabla T - k_p \nabla p,$$

\vec{j} – вектор потока влаги, ∇ – оператор Гамильтона, U – относительное влагосодержание на единицу поверхности листа.

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2,$$

\vec{j}_1 – поток влаги в виде пара, \vec{j}_2 – поток влаги в виде жидкости.

Так как размеры книги намного меньше размера книгохранилища, в котором, как правило, стремятся поддерживать однородность всех параметров, то можно с очень малой погрешностью пренебречь перепадами давления P и температуры T в пределах книги. Другими словами, в уравнении можно положить равными нулю термоградиентный поток влаги, $-D_T \nabla T \approx 0$ и $-k_p \nabla p \approx 0$. Тогда поток влаги описывается только диффузионным членом $-D_U \nabla U$, обусловленным капиллярно-сорбционным потенциалом вещества (бумаги), D_U – эффективный коэффициент диффузии влаги, он зависит от влажности и температуры. В дальнейшем будет обозначаться символом $D \equiv D(U, T)$.

Так как $T = \text{const}$, то температура в помещении выступает в качестве параметра, и можно для упрощения записей опустить этот параметр. Зависимость коэффициента диффузии D от влажности очень сильная и определяется по результатам экспериментов. Уравнение диффузии пара в слое воздуха между листами бумаги имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial W}{\partial y} \right) + q,$$

где q – источниковый член, определяемый поступлением влаги из слоя воздуха в бумагу. Поскольку коэффициент диффузии пара в воздухе на много порядков больше коэффициента диффузии пара в бумаге, то решение уравнения можно расщепить на два процесса – на расчет диффузии пара из воздуха между листами в бумагу, откуда определяется источниковый член, и на расчет диффузии в слое воздуха между листами с учетом убыли или прихода пара, т. е. члена q .

Уравнение диффузии пара в слое воздуха между листами бумаги решается в прямоугольнике ABCD, где ABCD – лист бумаги, сторона BC которого вшита или вклеена в переплет (рис. 1).



Рис. 1. Лист бумаги

Стороны листа AB, CD и AD контактируют непосредственно с воздушной средой книгохранилища. Поэтому здесь выполняется граничное условие:

$$W_{CD}(x, y, t) = W_0,$$

$$W_{AD}(x, y, t) = W_0,$$

$$W_{AB}(x, y, t) = W_0,$$

где величина W_0 определяется в зависимости от относительной влажности U и температуры воздуха T в книгохранилище.

Переплет задерживает поступление влаги в листы бумаги. Тогда на стороне BC листа реализуется граничное условие:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{BC} = 0.$$

Книга рассматривается как неоднородное тело, состоящее из листов бумаги с чередующимися между ними прослойками воздуха. Поэтому математически решается совокупность двух связанных между собой краевых задач – линейной двумерной задачи диффузии пара в воздушной прослойке между листами книги и набора нелинейных одномерных задач влагообмена между отдельными участками листа бумаги и воздушной прослойкой.

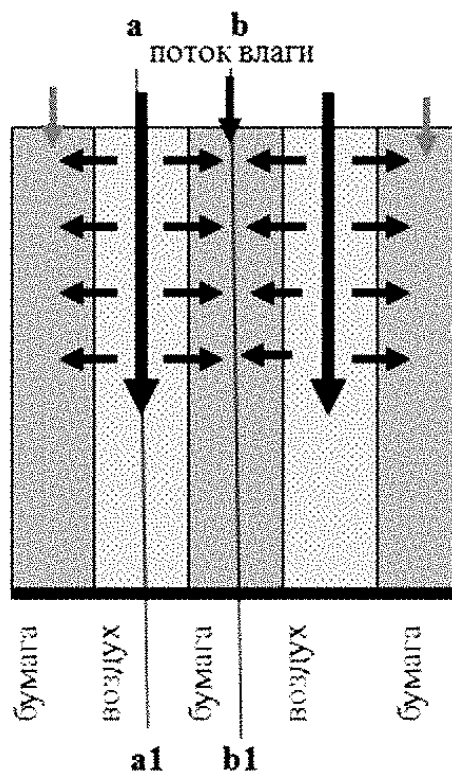


Рис. 2. Диффузия пара в листы бумаги

Обмен влажностью производится между половиной слоя воздуха и половиной слоя листа бумаги по толщине (между сечением aa_1 и bb_1 , рис. 2). На линиях симметрии задается условие непротекания:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

где z – это координата, отсчитываемая от середины воздушного слоя перпендикулярно листу бумаги. В качестве начального условия в листе рассматривается

$$W(x, y, z, 0) = W_{000} = \text{const},$$

где W_{000} – стационарная влажность, установившаяся в листе в результате достаточно длительного поддержания постоянными параметров в книгохранилище. Далее в расчетах моделируется повышение влажности воздуха в книгохранилище в результате, например, выпадения обильных дождей. В итоге начинается процесс диффузии влаги в воздушных промежутках между листами бумаги, а из них – в бумагу. Рассматривается и противоположное климатическое событие – высокая температура и сухость воздуха. Тогда происходит процесс переноса влаги в воздушные прослойки, то есть высушивание.

Для численного интегрирования уравнения диффузии пара в слое воздуха между листами бумаги воздушный промежуток между листами разбивается равномерно на ячейки (рис. 3) с шагами

$$\Delta x = \frac{l}{k-1}, \Delta y = \frac{h}{m-1}.$$

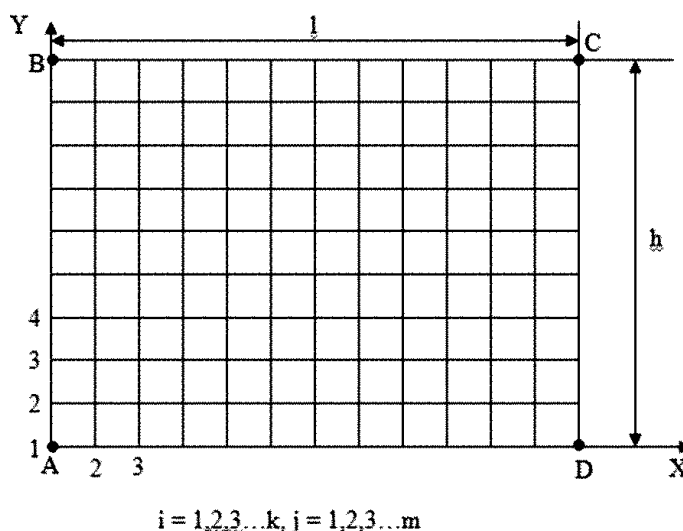


Рис. 3. Схема разбиения листа

Расчет ведется дискретными шагами по времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. На каждом шаге расчета для каждой ячейки (i, j) производится расчет влагообмена между половиной слоем воздуха и половиной листа бумаги, находящегося под слоем воздуха [2]. В результате расчета m шагов по времени Δt находится новая влажность воздуха в слое (i, j) $w_{*,B}^{n+1}[i, j]$ и определяется мощность источника влаги $q(x, y)$:

$$q^{n+1/2}(i, j) = \frac{W_{*,B}^{n+1}(i, j) - W_B^n(i, j)}{\Delta t}. \quad (1)$$

После нахождения величины q для всех ячеек (i, j) из (1), производится расчет уравнения диффузии пара в воздухе между листами бумаги, которое аппроксимируется во внутренних листах неявной схемой на пятиточечном шаблоне дробных шагов методом Писмена-Рэкфорда [3].

В алгоритме для диффузии пара из слоя воздуха в лист бумаги совместно интегрируются в рамках неявной схемы на четырехточечном шаблоне уравнения для воздуха

$$\frac{\partial W_B}{\partial t} = D_B \frac{\partial^2 W_B}{\partial z^2}$$

и для бумаги

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(w) \frac{\partial W}{\partial z} \right).$$

Специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что удельная влажность W на границе «воздух–лист» изменяется скачком, то есть функция $W(z, t)$ терпит здесь разрыв. Физическая основа этого явления следующая. В воздухе влага находится в виде пара, то

есть в газовой фазе. При попадании водяного пара в капилляры и поры листа бумаги пар сорбируется на огромной внутренней поверхности волокон целлюлозы и влага переходит в связанную форму (плотносвязанной, рыхлосвязанной, пленочной и капиллярной воды). Другими словами, на границе «бумага–воздух» вода претерпевает фазовый переход, поэтому концентрация влаги изменяется скачком. В силу сказанного для замыкания задачи необходимо условие

$$D_B \frac{\partial W_B}{\partial z} = D(W) \frac{\partial W}{\partial z},$$

выражающее равенство потоков массы влаги в воздухе и бумаге на границе контакта «воздух–лист». Зависимость влажности бумаги от относительной влажности воздуха, полученная опытным путем [4]

– для участка сорбции:

$$W = W_m (1 + (A \ln h)^n)^k,$$

– для участка десорбции:

$$W = W_{de} = W_{0,1} + \left(\frac{W_m - W_{0,1}}{h_m - 0,1} \right) (h - 0,1),$$

где h – относительная влажность воздуха, непосредственно граничащего с бумагой и A , n , k , W_{max} – константы, характеризующие конкретный тип бумаги (рис. 4). Коэффициент диффузии имеет вид:

$$D = P_{\nu s} \cdot \delta_a (a + b \cdot e^{ch}) \cdot \exp \left(\left(\left(\frac{W}{W_m} \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{A} \right) \cdot \frac{1}{A \cdot k \cdot n \cdot W_m} \cdot \left(\left(\frac{W}{W_m} \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(\frac{W}{W_m} \right)^{\frac{1}{k}-1}$$

для участка адсорбции ($\frac{\partial W}{\partial t} > 0$, $\frac{\partial h}{\partial t} > 0$),

$$D = P_{\nu sat} \cdot \delta_a (a + b \cdot e^{ch}) \cdot \left(\frac{h_m - 0.1}{W_m - W_{0.1}} \right)$$

для участка десорбции ($\frac{\partial W}{\partial t} < 0$, $\frac{\partial h}{\partial t} < 0$) или ($\frac{\partial W}{\partial t} > 0$, $\frac{\partial h}{\partial t} > 0$, $h < h_m$), где h_m , W_m – максимальные относительная влажность воздуха и влажность бумаги, достигнутые при увлажнении.

Изотерма сорбции $W_{ad}(h)$ описывает поглощение паров воды из воздуха бумагой при монотонном увеличении относительной влажности воздуха (рис. 4, кривая 1). Изотерма десорбции $W_{de}(h)$ описывает испарение воды из листа бумаги при монотонном снижении относительной влажности воздуха (рис. 4, кривая 2), либо при возрастании влажности воздуха до значения h_m после предшествовавшего периода высыхания.

2. Анализ результатов расчетов

Расчеты выполнялись для условий расположения книг на книжной полке. Это существенно усложняет реализацию численного алгоритма, так как появляются дополнительные непроницаемые для водяного пара границы – стенки полок.

Считается, что полка имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Книги на полке плотно прижаты друг к другу и расположены вертикально корешками наружу. Так как переплеты книг можно считать также влагонепроницаемыми, то диффузией водяного пара вдоль полки с книгами можно пренебречь. Другими словами, влагообмен листов книг с окружающим воздухом осуществляется в плоскостях, перпендикулярных оси полки. На рис. 5 показано поперечное сечение типичной полки без задней стенки. Поскольку влагоемкость

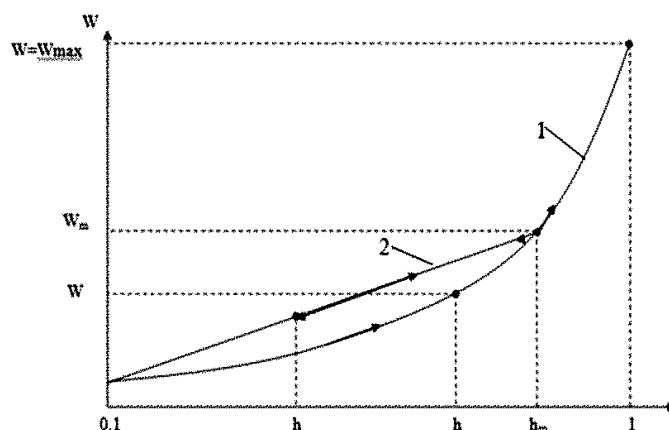


Рис. 4. Изотермы адсорбции (1) и десорбции (2)

бумаги очень высока, и это приводит к эффекту осушения воздуха в непосредственной близости от полки, то граничные условия по относительной влажности воздуха задавались на некотором удалении от полки (на прямоугольнике ABCD). Размеры АВ и ВС в расчетах варьировались. Основным считается вариант с размерами ABCD, приблизительно в три раза большими размера полки. Расчеты выполнялись для конкретного книгохранилища университета г. Фульда, Германия (Hochschule Fulda). Книгохранилище расположено в подвальном помещении. Его размеры составляют 7,58 м×5 м×2,3 м. Оно имеет два окна и три батареи системы отопления.

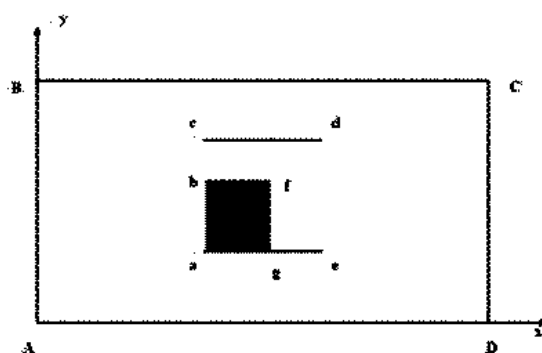


Рис. 5. Поперечное сечение полки без задней стенки

В книгохранилище расположены 12 подвижных и один неподвижный книжный шкаф. Размеры шкафа – 2,92 м×0,5 м×2,08 м. В каждом шкафу 5 рядов полок. Размеры полки – 1 × 0,5 м×0,33 м (длина×ширина×высота). Полки не имеют задней стенки.

В течение 59 суток, с 14.12.2010 по 10.02.2011, Маркусом Фишер и Мартином Хан проводились измерения термовлажностных показателей в различных местах книгохранилища [5]. Для этого шестью датчиками типа SHT 75 производилась регистрация относительной влажности воздуха и температуры. Диапазон регистрации охватывает по относительной влажности от 0 до 100% и по температуре от –40 °С до +80 °С. Погрешность измерения датчиками составляет 2% для относительной влажности и 0,04 °С для температуры. Разрешение сенсора влажности – 0,5% и температуры – 0,04°С. Данные сенсоров считываются один раз в 10 минут и передаются на магнитный носитель.

Численное моделирование выполнялось в постановке, соответствующей условиям эксперимента. Расчетные зависимости относительной влажности в воздухе между листами книги сопоставляются с опытными данными. Для сравнения рассматривались изменения влажности в двух точках – в центре и на краю листа бумаги. изнашивание книг по краям страниц происходит по-другому, чем в центре страниц, так как свет, ультрафиолетовое излучение и загрязнения сорбируются только краями листов [6]. Размеры полки: $ae = cd = 0,5$ м, $ac = de = 0,33$ м. Размеры книги: $ag = bf = 0,17$ м, $ab = fg = 0,25$ м. Граничные условия задавались на расстоянии 10 см от полки. Соответственно, размеры области ABCD составляли: $AD = BC = ae + 2 \cdot 0,1$ м = 0,7 м, $AB = CD = ac + 2 \cdot 0,1$ м = 0,53 м. Количество разбиений области ABCD на ячейки по осям X и Y – 110×110 .

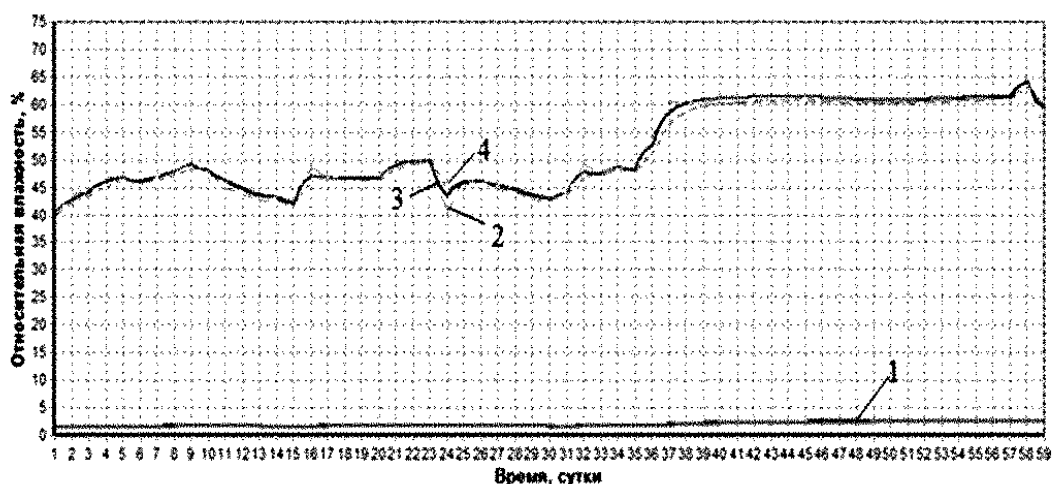


Рис. 6. Изменение относительной влажности в листе бумаги (1) и в воздухе над ним (2, 3, 4)

На рис. 6 линия 1 показывает изменение относительной влажности бумаги в центре листа (данные получены расчетным путем), линия 2 – экспериментальные данные относительной влажности воздуха, линия 3 – изменение относительной влажности воздуха по краю листа бумаги и линия 4 – в центре воздушного промежутка между листами книги (данные получены расчетным путем).

Таким образом, математическое моделирование позволяет достичь удовлетворительного воспроизведения реального процесса. Важно отметить, что изменение влажности листа бумаги в книге практически невозможно измерить инструментально из-за его малой толщины, но оказывается возможным определить программным путем.

С целью исследования того, как влияет на влажность листов книги среднее значение относительной влажности воздуха в книгохранилище за длительный промежуток времени (59 суток), проводилась серия расчетов. В этих расчетах за основу брался экспериментальный закон изменения относительной влажности воздуха во времени, что и в расчетах на рис.8. Отличие состояло в том, что измеренная влажность воздуха увеличивалась или уменьшалась на одну и ту же величину Δu^* в течение каждого из пятидесяти девяти суток. Расчеты производились для вариантов с увеличением базовой относительной влажности воздуха на $\Delta u^* = 10\%$, а также с ее уменьшением, соответственно, на 10%, 20%, 30%.

На рис. 7 демонстрируется типичный результат расчета изменения влажности во времени.

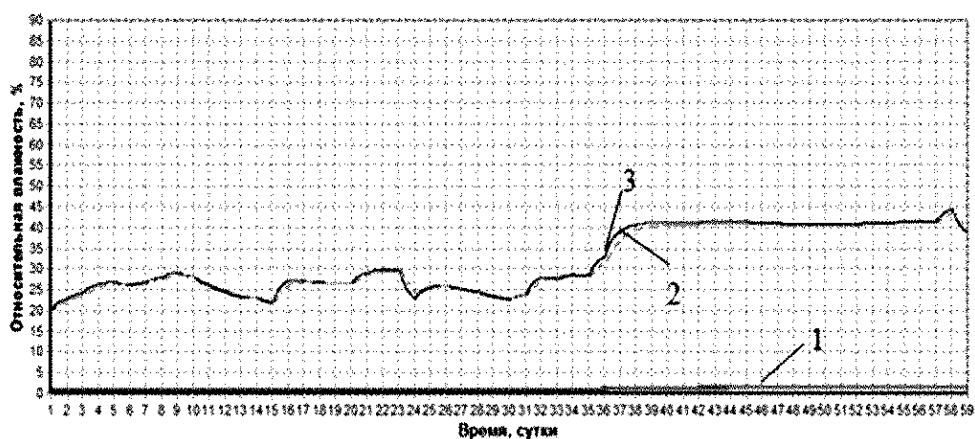


Рис. 7. Изменение относительной влажности в листе бумаги (1 – в центре) и в воздухе над ним (2 – в центре, 3 – по краю)

Из данных рис. 6, 7 видно, что с 35 по 39 день произошел скачок содержания пара в воздухе на 12%. Как видно из графика 7, влажность в воздухе стабилизировалась на 39 день, в то время, как в бумаге она еще повышалась и только на 42 день стала постоянной. Для другого варианта расчета (см. рис. 6) влажность в бумаге стабилизируется только на 45 сутки. Таким образом, влажность в бумаге стабилизируется быстрее, если относительная влажность воздуха небольшая (20 – 40%). При одном и том же скачке влажности воздуха на 12% влажность в бумаге увеличилась только на 0,5% в случае относительно сухого воздуха (см. рис. 7) и на 2% в случае более влажного воздуха (см. рис. 6). Таким образом, бумага более чувствительно реагирует на изменения влажности воздуха при его большей начальной влажности (70 – 90%), что безусловно приводит к риску разрушения материала за счет набухания.

На рис. 8 демонстрируются результаты расчетов относительной влажности бумаги на пятьдесят девятые сутки от изменения относительной влажности воздуха в помещении.

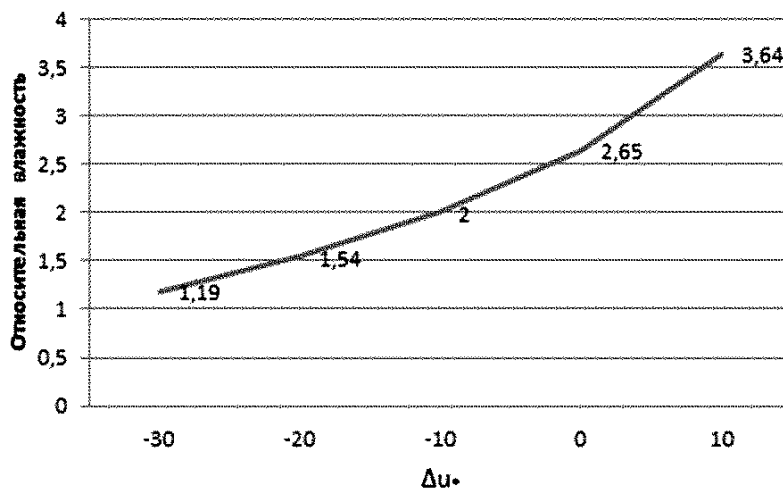


Рис. 8. Относительная влажность бумаги на пятьдесят девятые сутки от изменения относительной влажности воздуха в помещении

Коэффициент диффузии в воздухе намного больше коэффициента диффузии в бумаге. Таким образом, влажность в слое воздуха между листами бумаги по пространству распространяется гораздо быстрее, чем в листе бумаги.

Разработанный программный комплекс включает также модуль, позволяющий проводить расчеты термовлажностного режима интерьера помещений. Программный комплекс может использоваться для прогноза влажностного режима бумажных носителей.

Литература

1. Лыков, А.В. Теплообмен / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1978.
2. Годунов, С.К. Разностные схемы / Годунов, С.К., Рябенский, В.С. – М.: Наука, 1973.
3. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972.
4. Hygroscopic Behavior of Paper and Books / H.Derluyn, H.Janssen, J.Diepens, D.Derome, J.Carmeliet // J. of Building Physics. – 2007. – V. 31, № 1. – P. 9–34.
5. Fischer, M. Klimamanagement fuer ein Bibliotheksmagazin in P-Gebaeude der Hochschule Fulda / M. Fischer, M. Hahn. – Fulda, 2010.
6. Baade, W. Elektrische Lueftungs- und Raumklimotechnik Kleinanlagen / W. Baade. – Berlin, 1996.

Елена Геннадьевна Кузьмина, аспирантка, кафедра «Прикладная математика и техническая физика», Московский государственный индустриальный университет (г. Москва, Российская Федерация), elenakuzmina88@yandex.ru.

MSC 65Z05

Complex of Mathematical Models for Research of Humidity Exchangeprocess Between Books and Air Environment of Book Depository

E.G. Kuzmina

The problem of maintenance of optimum hydrothermal mode is a basis of exhibit storage in museums and a guarantee of painting and icons safety in churches, because the deviation from standard conditions is a source of material damaging. This paper is devoted to the research of a humidity exchange process between air environment of book depository and books, which are placed on the shelf. Basing on the developed software program there have been implemented the systematical calculations of humidity distribution during drying and humidification of sheet of books for different hydrothermal features of a book depository. The influence of book shelves interior on the regularities of water steam diffusion from book depository air into the air between sheets of paper and into the sheets themselves have been investigated. The analysis of calculation results have been done and a comparison of them with the existing experimental data either.

Keywords: a humidity exchange process between air environment of book depository and books, diffusion equation.

References

1. Lykov A.V. *Heat and Mass Transfer*. Moscow, Energiya, 1978.
2. Godunov S.K., Ryaben'kiy V.S. *Difference Schemes*. Moscow, Nauka, 1973.
3. Richtmyer D., Morton K.W. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. N.Y., Interscience Publishers, 1967.
4. Derluyn H., Janssen H., Diepens J., Derome D., Carmeliet J. Hygroscopic Behavior of Paper and Books. *J. of Building Physics*, 2007, vol. 31, no. 1, pp. 9–34.
5. Fischer M., Hahn M. *Klimamanagement fuer ein Bibliotheksmagazin in P-Gebaeude der Hochschule Fulda*. Fulda, 2010.
6. Baade W. *Elektrische Lueftungs- und Raumklimotechnik Kleinanlagen*. Berlin, 1996.

Поступила в редакцию 26 марта 2012 г.