УДК 517.97

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ СО СЛАБОЙ НОРМОЙ НА РЕШЕНИЯХ ВЫРОЖДЕННОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

А.Ф. Исламова

MINIMIZATION OF FUNCTIONALS WITH A WEAK NORM ON SOLUTIONS OF THE DEGENERATE LINEAR EQUATION

A.F. Islamova

В работе для класса задач жесткого смешанного управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени, со слабыми относительно функции состояния функционалами качества доказаны теоремы существования и единственности. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примере задачи управления для уравнения соболевского типа с многочленами от эллиптических самосопряженных операторов высокого порядка.

Ключевые слова: оптимальное управление, распределенная система, уравнение соболевского типа.

In the work existence and uniqueness theorems are proved for a class of problems with rigid mixed control of linear distributed systems, not solvable with respect to the time derivative, with weak cost functional with respect to the state function. Abstract results are illustrated by example of the control problem for Sobolev type equation with polynomials of high order elliptic selfadjoint operators.

Keywords: optimal control, distributed system, Sobolev type equation.

Введение

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{U}$ — гильбертовы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$ (линейные непрерывные операторы), $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейный, замкнутый и плотно определенный в $\mathcal{X}$). При некоторых предположениях на операторы L и M, гарантирующих существование сильно непрерывной разрешающей полугруппы уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t)$, будем исследовать задачу оптимального управления для системы, в которой управляющее воздействие производится посредством выбора начального значения v и выбора функции u в уравнении состояния

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t), \quad Px(0) = v, \tag{1}$$

$$(u, v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{2}$$

$$J_0(x) \to \inf. \tag{3}$$

Здесь P – проектор, являющийся единицей упомянутой полугруппы операторов, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства управлений $\mathfrak{U}$, которое будет определено далее, $y : (0, T) \to \mathcal{Y}$ — заданная вектор-функция. Поскольку в явном виде функционал стоимости не зависит от управления, задачу (1) – (3) называют задачей с жестким управлением [1].

Система (1) является абстрактной формой многих начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, встречающихся в естествознании и технике. К примеру, к уравнению такого вида сводятся линеаризованная система Навье – Стокса, система и уравнение Соболева, уравнение ионно-звуковых волн, уравнение волн Россби, уравнение свободной эволюции поверхности фильтрующейся жидкости и др. (см., например, [2, 3]). Заметим, что выбранное в качестве начального обобщенное условие Шоуолтера для уравнений соболевского типа в приложениях часто оказывается более естественным, чем условие Коши.

При исследовании задачи (1) – (3) будем пользоваться результатами о разрешимости начальных задач для уравнений, не разрешенных относительно производной по времени, так называемых уравнений соболевского типа, полученных в своих работах Г.А. Свиридюком и В.Е. Федоровым [3, 4].

Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа исследовались Г.А. Свиридюком и его учениками. В работах [5, 6] доказаны существование и единственность решения задач с распределенным управлением в случае линейных уравнений соболевского типа, а в [7, 8] – для нелинейных уравнений.

Задача со смешанным управлением вида (1) – (3) рассматривается впервые. Общие результаты о задаче с функционалом качества $J_0(x)$ используются при рассмотрении задач с функционалом в виде квадрата нормы функции состояния в пространстве Лебега (в отличие от более ранних результатов, в которых используется норма в пространстве Соболева) и с терминальным функционалом качества – квадратом нормы функции состояния в фиксированный момент времени. Абстрактные результаты работы проиллюстрированы на примере уравнения соболевского типа с многочленами от эллиптических самосопряженных операторов высокого порядка.

1. Относительно p-радиальные операторы. Разрешимость задачи Шоуолтера

В данном параграфе приведены условия на операторы, достаточные для разрешимости задачи (1). Доказательства приведенных результатов можно найти в работах [3, 4].

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Введем некоторые необходимые в дальнейшем обозначения: $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Определение 1. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется сильно (L,p)-радиальным, если*

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in (a,+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) *существует плотный в $\mathcal{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{Y}}$, такой, что*

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1}y\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{\mathrm{const}(y)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall y \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$$

при любом $\mu \in (a,+\infty)$;

(iv) *для любого* $\mu \in (a, +\infty)$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Замечание 1. Эквивалентность этого, более простого определения сильной (L,p)-радиальности и того, которое было использовано в [3, 4], доказана в [9].

Обозначим через $\mathcal{X}^0$ $(\mathcal{Y}^0)$ ядро $\ker(R^L_\mu(M))^{p+1}$ $(\ker(L^L_\mu(M))^{p+1})$, а через $\mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y}^1)$ – замыкание линеала $\mathrm{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$ $(\mathrm{im}(L^L_\mu(M))^{p+1})$ в норме пространства $\mathcal{X}$ $(\mathcal{Y})$. Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $\mathrm{dom} M_k = \mathcal{X}^k \cap \mathrm{dom} M$ $(\mathcal{X}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. [3, 4]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*
(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$;
(iv) *оператор* $G = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p;
(v) *существует сильно непрерывная полугруппа* $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, *разрешающая уравнение* $L\dot{x} = Mx$;
(vi) *оператор* $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$ *является инфинитезимальным генератором* C_0-*непрерывной полугруппы* $\{X_1^t = X^t\Big|_{\mathcal{X}^1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$.

Замечание 2. Проектор вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$ (вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$) имеет вид

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}).$$

При доказательстве утверждения (ii) используется тот факт, что в условиях теоремы 1 выполняются равенства $QL = LP$, $QMx = MPx$ для $x \in \mathrm{dom} M$.

Для краткости пространства Соболева в дальнейшем будем обозначать: $W^k_q(\mathcal{X}) = W^k_q(0,T;\mathcal{X})$, $H^k(\mathcal{X}) = W^k_2(\mathcal{X})$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq q < \infty$. При этом $L_q(\mathcal{X}) = W^0_q(\mathcal{X})$, $L_2(\mathcal{X}) = H^0(\mathcal{X})$.

Рассмотрим задачу с обобщенным условием Шоуолтера

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t), \tag{4}$$

$$Px(0) = x_0, \tag{5}$$

Функция $x \in W^1_q(\mathcal{X})$ называется *сильным решением* задачи (4), (5), если она удовлетворяет условию (5) и почти всюду на $(0,T)$ – уравнению (4).

Теорема 2. [10]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда при любых $y \in W^{p+1}_q(\mathcal{Y})$ и $x_0 \in \mathrm{dom} M_1$ существует единственное сильное решение x задачи* (4), (5). *При этом оно имеет вид*

$$x(t) = -\sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1}(I - Q)y^{(k)}(t) + \int\limits_0^t X^{t-s}L_1^{-1}Qy(s)ds + X^t x_0 \tag{6}$$

и удовлетворяет условию

$$\|x\|^2_{W^1_q(\mathcal{X})} \leq C\left(\|x_0\|^2_{\mathcal{X}} + \|Sx_0\|^2_{\mathcal{X}} + \|y\|^2_{W^{p+1}_q(\mathcal{Y})}\right). \tag{7}$$

2. Линейная задача управления

Результаты данного параграфа, необходимые для дальнейшего изложения, взяты из монографии А.В. Фурсикова [1]. Пусть $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{V}$ – линейные нормированные пространства, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{U}$ – рефлексивные банаховы пространства, причем $\mathfrak{Y}_1$ непрерывно вложено в $\mathfrak{Y}$.

Рассмотрим следующую абстрактную линейную задачу управления

$$\mathfrak{L}(y,u)+\mathfrak{F}_0=0, \tag{8}$$

$$u\in\mathfrak{U}_\partial. \tag{9}$$

$$J(y,u)\to\inf, \tag{10}$$

Здесь $\mathfrak{U}_\partial$ – замкнутое выпуклое подмножество пространства $\mathfrak{U}$, функционал стоимости $J(y,u)$ – выпуклый, определенный, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в $\mathfrak{Y}\times\mathfrak{U}$ и ограниченый снизу на $\mathfrak{Y}\times\mathfrak{U}_\partial$, линейный оператор $\mathfrak{L}:\mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{V}$ непрерывен, $\mathfrak{F}_0\in\mathfrak{V}$ – заданный вектор.

Множеством $\mathfrak{W}$ *допустимых пар* (y,u) задачи (8) – (10), называется множество пар $(y,u)\in\mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{U}$, удовлетворяющих соотношениям (8), (9), для которых $J(y,u)<\infty$.

Предполагается также выполнение условий нетривиальности и коэрцитивности.

Нетривиальность: Множество $\mathfrak{W}$ допустимых элементов непусто.

Коэрцитивность: Для любого $R>0$ множество $\{(y,u)\in\mathfrak{W}:J(y,u)\le R\}$ ограничено в $\mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{U}$.

Решением задачи (8) – (10) называется пара $(\hat y,\hat u)\in\mathfrak{W}$, на которой достигается минимум функционала J:

$$J(\hat y,\hat u)=\inf_{(y,u)\in\mathfrak{W}}J(y,u).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия, сформулированные в данном параграфе. Тогда задача* (8) – (10) *имеет решение* $(\hat y,\hat u)\in\mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{U}$. *Если функционал* J *строго выпуклый, то это решение единственно.*

3. Задачи жесткого управления со слабой нормой функции состояния

Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – гильбертовы пространства, $L\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L\ne\{0\}$, $B\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, оператор $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ сильно (L,p)-радиален.

Введем обозначение $\mathcal{D}_S=\mathrm{dom}M_1$. В силу замкнутости оператора $S=L_1^{-1}M_1$ пространство $\mathcal{D}_S$ является гильбертовым со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_S}=\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}+\langle S\cdot,S\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$. В качестве пространства управлений выберем $\mathfrak{U}=H^{p+1}(\mathcal{U})\times\mathcal{D}_S$.

Пусть J_0 – ограниченный снизу на линейном нормированном пространстве $\mathfrak{Y}$, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в $\mathfrak{Y}$ функционал. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L\dot x(t)=Mx(t)+y(t)+Bu(t),\quad t\in(0,T), \tag{11}$$

$$Px(0)=v, \tag{12}$$

$$(u,v)\in\mathfrak{U}_\partial. \tag{13}$$

$$J_0(x)\to\inf, \tag{14}$$

где непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ пространства $\mathfrak{U}$ – *множество допустимых управлений*, пара $(u,v)\in\mathfrak{U}$ задает управление, $y\in H^{p+1}(\mathcal{Y})$ – заданная функция.

Решения уравнения (11) будем искать в гильбертовом пространстве $\mathcal{Z} = \{z \in H^1(\mathcal{X}) : L\dot{z} - Mz \in H^{p+1}(\mathcal{Y})\}$, наделенном нормой $\|z\|^2_{\mathcal{Z}} = \|z\|^2_{H^1(\mathcal{X})} + \|L\dot{z} - Mz\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}$.

Множество $\mathfrak{W}$ троек $(x, u, v) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$, удовлетворяющих условиям (11) – (13), для которых $J_0(x) < +\infty$, назовем *множеством допустимых троек* задачи (11) – (14).

Решение задачи (11) – (14) состоит в нахождении троек $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал стоимости $J_0(x)$:

$$J_0(\hat{x}) = \inf_{(x,u,v)\in\mathfrak{W}} J_0(x).$$

Функционал $J_0(x)$ назовем *коэрцитивным*, если для любого $R > 0$ множество $\{(x, u, v) \in \mathfrak{W} : J_0(x) \le R\}$ ограничено в пространстве $\mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$.

Введем в рассмотрение непрерывный оператор $\gamma_0 : H^1(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$, действующий по правилу $\gamma_0 x = Px(0)$, и определим оператор $\mathfrak{B} \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathcal{U}); H^{p+1}(\mathcal{Y}))$, $(\mathfrak{B}u)(t) = Bu(t)$, $t \in (0, T)$.

Теорема 4. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален, $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$, J_0 – ограниченный снизу на линейном нормированном пространстве $\mathfrak{Y}$, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в $\mathfrak{Y}$ функционал, имеет место непрерывное вложение $\mathcal{Z}$ в $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}_\partial$ – непустое, выпуклое, замкнутое и ограниченное в пространстве $\mathfrak{U} = H^{p+1}(\mathcal{U}) \times \mathcal{D}_S$ множество. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$ задачи* (11) – (14).

Доказательство. Возьмем $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Z}$, $\mathfrak{V} = H^l(\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}$, $l \in \{0, 1, \ldots, p+1\}$, вектор $\mathfrak{F}_0 = (-y, 0) \in \mathfrak{V}$. Очевидна линейность оператора $\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, $\mathfrak{L}(x, u, v) = (L\dot{x} - Mx - Bu, \gamma_0 x - v)$. Докажем его непрерывность. В силу очевидного неравенства $\|\gamma_0 x\|_{\mathcal{X}} \le C_1 \|x\|_{\mathcal{Z}}$ имеем

$$\|(L\dot{x} - Mx - Bu, \gamma_0 x - v)\|^2_{H^l(\mathcal{Y})\times\mathcal{X}} = \|L\dot{x} - Mx - Bu\|^2_{H^l(\mathcal{Y})} + \|\gamma_0 x - v\|^2_{\mathcal{X}} \le$$

$$2\|L\dot{x} - Mx\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} + 2\|Bu\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} + 2\|\gamma_0 x\|^2_{\mathcal{X}} + 2\|v\|^2_{\mathcal{X}} \le C\|(x, u, v)\|^2_{\mathcal{Z}\times\mathfrak{U}}.$$

Для доказательства коэрцитивности функционала J_0 воспользуемся оценкой (7) на решение обобщенной задачи Шоуолтера:

$$\|x\|^2_{\mathcal{Z}} + \|u\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{U})} + \|v\|^2_{\mathcal{D}_S} =$$

$$\|x\|^2_{H^1(\mathcal{X})} + \|Bu + y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} + \|u\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{U})} + \|v\|^2_{\mathcal{D}_S} \le$$

$$C_1 \left(\|v\|^2_{\mathcal{X}} + \|Sv\|^2_{\mathcal{X}} + \|Bu + y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}\right) + \|u\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{U})} + \|v\|^2_{\mathcal{D}_S} \le$$

$$C_2 \left(\|u\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{U})} + \|v\|^2_{\mathcal{D}_S} + \|y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}\right) \le C_3.$$

Здесь использована ограниченность $\mathfrak{U}_\partial$ в пространстве $H^{p+1}(\mathcal{U}) \times \mathcal{D}_S$. Таким образом, из теоремы 3 следует существование решения задачи (11) – (14).

□

Рассмотрим частные случаи функционала J_0

$$J_1(x) = \frac{1}{2}\|x - w\|^2_{L_2(\mathcal{X})} \to \inf, \tag{15}$$

$$J_2(x) = \frac{1}{2}\|x(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} \to \inf, \tag{16}$$

где $w \in L_2(\mathcal{X})$ для (15) и $w \in \mathcal{X}$ для (16). Из теоремы 4 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален, $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$, $\mathfrak{U}_\partial$ – непустое, выпуклое, замкнутое и ограниченное в пространстве управлений $\mathfrak{U} = H^{p+1}(\mathcal{U}) \times \mathcal{D}_S$ множество. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$ задачи* (11) – (13), (15)*. В случае инъективности оператора $\mathfrak{B}$ решение задачи единственно.*

Доказательство. Поскольку функционал J_1 выпуклый в пространстве $L_2(\mathcal{X})$, то из его полунепрерывности снизу следует полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости [11]. Таким образом, существование решения следует из теоремы 4, если положить $\mathfrak{Y} = L_2(\mathcal{X})$. Непрерывное вложение $\mathfrak{Y}_1$ в $\mathfrak{Y}$ следует из построения $\mathcal{Z}$.

Докажем единственность решения при условии инъективности оператора $\mathfrak{B}$ с учетом строгой выпуклости J_1. Пусть существуют два решения $(\hat{x}_1, \hat{u}_1, \hat{v}_1)$, $(\hat{x}_2, \hat{u}_2, \hat{v}_2)$ задачи (11) – (13), (15). Тройка $(\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2}, \frac{\hat{u}_1+\hat{u}_2}{2}, \frac{\hat{v}_1+\hat{v}_2}{2})$ в силу выпуклости множества $\mathfrak{W}$ является допустимой. Пусть $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$, тогда в силу строгой выпуклости функционала J_1 относительно одной переменной

$$J_1\left(\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(J_1(\hat{x}_1) + J_1(\hat{x}_2)).$$

Получили противоречие с тем, что $J_1(\hat{x}_1) = J_1(\hat{x}_2) = \inf\limits_{(x,u,v)\in\mathfrak{W}} J_1(x)$. Следовательно, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ и поэтому $\hat{v}_1 = \hat{v}_2$. В силу (11) это означает, что $\mathfrak{B}(\hat{u}_1 - \hat{u}_2) = 0$, т. е. $\hat{u}_1 - \hat{u}_2 \in \ker\mathfrak{B}$. $\square$

Следствие 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, функция $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$, $\mathfrak{U}_\partial$ – непустое, выпуклое, замкнутое и ограниченное в пространстве $\mathfrak{U} = H^{p+1}(\mathcal{U}) \times \mathcal{D}_S$ множество. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}$ задачи* (11) – (13), (16).

Доказательство. Положим $\mathfrak{Y} = H^1(\mathcal{X})$ и пусть x_n сходится к x в $H^1(\mathcal{X})$. Имеем

$$\frac{1}{2}\|x(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{2}\left(\|x(T) - x_n(T)\|^2_{\mathcal{X}} + \|x_n(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} + \right.$$

$$\left. 2\|x_n(T) - x(T)\|_{\mathcal{X}}(\|x_n(T)\|_{\mathcal{X}} + \|w\|_{\mathcal{X}})\right) \leq$$

$$C_1\|x - x_n\|^2_{H^1(\mathcal{X})} + \frac{1}{2}\|x_n(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} + C_2\|x - x_n\|_{H^1(\mathcal{X})} \cdot (\|x_n\|_{H^1(\mathcal{X})} + \|w\|_{\mathcal{X}}).$$

С учетом ограниченности последовательности $\left\{\|x_n\|_{H^1(\mathcal{X})}\right\}$, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим полунепрерывность снизу функционала J_2.

Покажем выпуклость функционала J_2 на пространстве $H^1(\mathcal{X})$. Для $\alpha \in [0,1]$ очевидны неравенства

$$\alpha(1-\alpha)(a-b)^2 \geq 0;$$

$$\alpha(1-\alpha)a^2 + \alpha(1-\alpha)b^2 - 2\alpha(1-\alpha)ab \geq 0;$$

$$(\alpha - \alpha^2)a^2 + ((1-\alpha) - (1-\alpha)^2)b^2 - 2\alpha(1-\alpha)ab \geq 0;$$

$$(\alpha a + (1-\alpha)b)^2 \leq \alpha a^2 + (1-\alpha)b^2.$$

Отсюда имеем при любых x_1, $x_2 \in H^1(\mathcal{X})$

$$J_2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \|\alpha x_1(T) + (1-\alpha)x_2(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} \leq$$

$$(\alpha\|x_1(T) - w\|_{\mathcal{X}} + (1-\alpha)\|x_2(T) - w\|_{\mathcal{X}})^2 \leq$$

$$\alpha\|x_1(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} + (1-\alpha)\|x_2(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} = \alpha J_2(x_1) + (1-\alpha)J_2(x_2).$$

Таким образом, получили выпуклость, а потому и полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости функционала J_2. В силу теоремы 4 получим требуемое. $\square$

4. Задачи оптимального управления для уравнения с многочленами от эллиптических самосопряженных операторов

Пусть многочлены $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$, $Q_m(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j\lambda^j$ таковы, что $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $c_n, d_m \neq 0$, $n \leq m$. Далее, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, набор операторов A, $B_1, \ldots B_r$ – регулярно эллиптический [12], где

$$(Aw)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha w(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l w)(x) = \sum_{|\alpha| \leq r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha w(x), \quad b_{l\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \ldots, r.$$

Потребуем также самосопряженности оператора $A_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $\mathrm{dom} A_1 = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ [12], $A_1 w = Aw$, $w \in \mathrm{dom} A_1$, и ограниченности справа его спектра.

Редуцируем начально-краевую задачу

$$P_n(A) w_t(x, t) = Q_m(A) w(x, t) + y(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{17}$$

$$B_l A^k w(x, t) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad l = 1, 2, \ldots, r, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{18}$$

$$P_n(A) w(x, 0) = P_n(A) v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{19}$$

к задаче (4), (5). Для этого возьмем

$$\mathcal{X} = H^{2rn}(\Omega), \quad \mathcal{Y} = L_2(\Omega), \quad L = P_n(A), \quad M = Q_m(A),$$

$$\mathrm{dom} M = \{w \in H^{2rm}(\Omega) \colon B_l A^k w(x) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \ l = 1, 2, \ldots, r, \ x \in \partial\Omega\}.$$

Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A_1, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Здесь мы учли, что спектр оператора A_1 вещественный и сгущается к $-\infty$.

Теорема 5. *Пусть $(-1)^{m-n} \mathrm{Re}(c_n/d_m) \leq 0$, спектр $\sigma(A_1)$ не содержит общих корней многочленов $P_n(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$. Тогда оператор M сильно $(L, 0)$-радиален.*

Доказательство. В условиях теоремы числа $\mu_k = Q_m(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)$ при тех k, при которых $P_n(\lambda_k) \neq 0$, составляют множество $\sigma^L(M)$. Если $m = n$, то существует конечный предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)},$$

поэтому множество $\sigma^L(M) = \{Q_m(\lambda_k)/P_n(\lambda_k) : k \in \mathbb{N}\}$ ограничено в $\mathbb{C}$ и оператор M является сильно $(L, 0)$-радиальным в силу отсутствия у оператора L M-присоединенных векторов (см. [3]).

Если $m > n$, то по условию на старшие коэффициенты многочленов

$$\lim_{k \to \infty} \left| \arg \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} \right| \in (\pi/2, \pi).$$

Поэтому можно выбрать такое $a \in \mathbb{R}$, что все точки множества $\sigma^L(M)$ лежат слева от прямой $\{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu = a\}$.

Проверим оценки из определения сильной $(L,0)$-радиальности. При $\mu,\nu > a$, $w \in \mathcal{X}$, $y \in L_2(\Omega)$

$$\|L^L_\mu(M)y\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{|\langle y,\varphi_k\rangle|^2}{\left|\mu - \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2} \le \frac{\|y\|^2_{L_2(\Omega)}}{(\mu-a)^2},$$

$$\|R^L_\mu(M)w\|^2_{H^{2rn}(\Omega)} = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{\left(1+\lambda_k^{2n}\right)|\langle w,\varphi_k\rangle|^2}{\left|\mu - \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2} \le \frac{\|w\|^2_{H^{2rn}(\Omega)}}{(\mu-a)^2},$$

$$\|R^L_\mu(M)(\nu L - M)^{-1}y\|^2_{H^{2rn}(\Omega)} =$$

$$\sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{\left(1+\lambda_k^{2n}\right)|\langle y,\varphi_k\rangle|^2}{|P_n(\lambda_k)|^2\left|\mu - \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2\left|\nu - \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2} \le \frac{C\|y\|^2_{L_2(\Omega)}}{(\mu-a)^2(\nu-a)^2}.$$

Взяв $y \in \mathrm{dom} M = \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$, получим

$$\|M(\nu L - M)^{-1}L^L_\mu(M)y\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$\sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{|Q_m(\lambda_k)|^2|\langle y,\varphi_k\rangle|^2}{|P_n(\lambda_k)|^2\left|\mu - \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2\left|\nu - \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2} \le \frac{c^{-2}\|My\|^2_{L_2(\Omega)}}{(\mu-a)^2(\nu-a)^2}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $|P_n(\lambda_k)| \ge c$ при тех k, по которым идет суммирование. Это следует из отсутствия конечных предельных точек множества $\{\lambda_k\}$. □

Замечание 3. Как уже было замечено,

$$\sigma^L(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu = \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}, P_n(\lambda_k) \neq 0\right\}.$$

Поэтому, если $m > n$, $\mathrm{Re}(c_n/d_m) = 0$, относительный спектр является неограниченным множеством, но оператор M не является сильно $(L,0)$-секториальным [3].

Имеем $P = Q = \sum\limits_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$, $\mathcal{X}^0 = \mathrm{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) = 0\}$, $\mathcal{X}^1 = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0\}$ – замыкание в норме пространства $H^{2rn}(\Omega)$. При этом сильно непрерывная полугруппа однородного уравнения (17) имеет вид

$$X^t = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \exp\left(\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}t\right)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k.$$

Из вида проектора P следует, что для $u_0, v_0 \in H^{2rn}(\Omega)$ условие $Pu_0 = Pv_0$ выполняется тогда и только тогда, когда $P_n(A)u_0(x) = P_n(A)v_0(x)$. В этом смысле начальное условие (19) эквивалентно обобщенному условию Шоуолтера.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$P_n(A)w_t(x,t) = Q_m(A)w(x,t) + y(x,t) + u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{20}$$

$$B_lA^kw(x,t) = 0,\ k = 0,1,\ldots,m-1, \quad l = 1,2,\ldots,r, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{21}$$

$$P_n(A)w(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega, \tag{22}$$

$$(u,v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{23}$$

$$J_1(w) = \frac{1}{2}\|w - \tilde{w}\|^2_{L_2(0,T;H^{2rn}(\Omega))} \to \inf, \qquad (24)$$

где $\tilde{w} \in L_2(0,T;H^{2rn}(\Omega))$ – заданная функция, $\mathfrak{U}_\partial$ – подмножество пространства управлений $\mathfrak{U}$.

Выбрав пространство $\mathcal{U} = L_2(\Omega)$, оператор $B = I$ и

$$\mathcal{D}_S = \{w \in H^{2rm}(\Omega) : B_l A^k w(x) = 0,\ k = 0,1,\ldots,m-1, \quad l = 1,2,\ldots,r,\ x \in \partial\Omega, \\ w = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \langle w(x), \varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}\varphi_k\}$$

с нормой пространства $H^{2rm}(\Omega)$, редуцируем задачу (20) – (24) к задаче (11) – (14). Тогда пространство управлений $\mathfrak{U} = H^1(0,T;L_2(\Omega)) \times \mathcal{D}_S$ и

$$\mathcal{Z} = \{z \in H^1(0,T;H^{2rn}(\Omega)) : P_n(A)z_t - Q_m(A)z \in H^1(0,T;L_2(\Omega))\}.$$

Из следствия 1 вытекает

Теорема 6. *Пусть* $(-1)^{m-n}\mathrm{Re}(c_n/d_m) \le 0$*, спектр* $\sigma(A_1)$ *не содержит общих корней многочленов* $P_n(\lambda)$ *и* $Q_m(\lambda)$*,* $y \in H^1(0,T;L_2(\Omega))$*, множество* $\mathfrak{U}_\partial$ *непустое, выпуклое, замкнутое и ограниченное в пространстве управлений* $\mathfrak{U} = H^1(0,T;L_2(\Omega))\times\mathcal{D}_S$*. Тогда существует единственное решение* $(\hat{w},\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{Z} \times H^1(0,T;L_2(\Omega)) \times \mathcal{D}_S$ *задачи* (20) – (24).

Рассмотрим также задачу с терминальным функционалом стоимости

$$J_2(w) = \frac{1}{2}\|w(T) - \tilde{w_1}\|^2_{H^{2rn}(\Omega)} \to \inf, \qquad (25)$$

где $\tilde{w_1} \in H^{2rn}(\Omega)$. Из следствия 2 получим нижеприведенный результат.

Теорема 7. *Пусть* $(-1)^{m-n}\mathrm{Re}(c_n/d_m) \le 0$*, спектр* $\sigma(A_1)$ *не содержит общих корней многочленов* $P_n(\lambda)$ *и* $Q_m(\lambda)$*,* $y \in H^1(0,T;L_2(\Omega))$ *и пусть* $\mathfrak{U}_\partial$ *– непустое, выпуклое, замкнутое и ограниченное в пространстве управлений* $\mathfrak{U} = H^1(0,T;L_2(\Omega)) \times \mathcal{D}_S$*. Тогда существует решение* $(\hat{w},\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{Z} \times H^1(0,T;L_2(\Omega)) \times \mathcal{D}_S$ *задачи* (20) – (23), (25).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (код проекта 10-01-96007-р_урал_а).

Литература

1. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков – Новосибирск: Науч. кн., 1999.
2. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Науч. кн., 1998. – 438 с.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – VSP, Utrecht etc., 2003.
4. Федоров, В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Федоров // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, вып. 3. – С. 173 – 200.
5. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912 – 1919.
6. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Изв. вузов. Матем. – 1996. – № 12. – С. 75 – 83.
7. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.В. Плеханова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 7. – С. 997 – 998.

8. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Сиб. журн. индустр. математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144 – 151.
9. Федоров, В.Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов / В.Е. Федоров // Вестник. Челяб. гос. ун-та. Сер. «Математика. Механика. Информатика». – 2009. – Вып. 1. – С. 12 – 19.
10. Федоров, В.Е. Слабые решения и проблема квадратического регулятора для вырожденного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 92 – 102.
11. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М.: Мир, 1979. – 20 с.
12. Трибель, Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

Анна Фаридовна Исламова, кафедра «Математический анализ», Челябинский государственный университет, islamovaaf@inbox.ru.

Поступила в редакцию 8 февраля 2011 г.