УДК 519.6 DOI: 10.14529/mmp180203

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА С РАЗРЫВНЫМИ БАЗИСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА РАЗНЕСЕННЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

***Р.В. Жалнин*[1], *В.Ф. Масягин*[1]**
[1]Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, Российская Федерация

В данной работе представлены априорные оценки точности решения однородной краевой задачи для эллиптического уравнения методом Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках. Для аппроксимации исходного эллиптического уравнения с известными начально-краевыми условиями методом Галеркина с разрывными базисными функциями, необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для этого вводятся вспомогательные переменные, представляющие собой компоненты потока искомой величины. Характерной особенностью метода является нахождение вспомогательных переменных на ячейках двойственной сетки. Двойственная сетка состоит из медианных контрольных объемов и является сопряженной к основной неструктурированной треугольной сетке. Численные потоки на границе между элементами находятся с использованием стабилизирующих добавок. Для стабилизирующего параметра порядка порядка 1 показано, что порядок сходимости будет $k + \frac{1}{2}$, а в случае использования стабилизирующего параметра порядка h^{-1} порядок сходимости увеличивается до $k+1$, когда в качестве базиса используются полиномы степени не ниже k.

Ключевые слова: априорные оценки погрешности; конечные элементы; метод Галеркина с разрывными базисными функциями; разнесенные сетки; эллиптические задачи.

Введение

Ранее авторами было предложено новое семейство схем на основе локального метода Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных неструктурированных сетках для уравнений диффузионного типа [1–4]. Характерной особенностью данного семейства схем является то, что аппроксимация потока искомой функции производится на двойственной сетке, состоящей из медианных контрольных объемов, связанных с узлами основной сетки, в то время как аппроксимация искомой функции рассматривается на ячейках основной сетки.

В статье представлен априорный анализ ошибок локального разрывного метода Галеркина (РМГ), или Local Discontinuous Galerkin method (LDG), для следующей эллиптической задачи:

$$-\Delta u = f, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $\partial\Omega$ – граница области Ω.

Метод LDG был впервые предложен Кокбурном и Шу в работе [5] как развитие численной схемы для сжимаемых уравнений Навье – Стокса, описанной Басси и

Рибэем в [6]. Эта схема, в свою очередь, является развитием метода Runge – Kutta Discontinuous Galerkin (RKDG), разработанного Кокбурном и Шу [7] для нелинейных гиперболических систем.

Вопросам получения априорных оценок для метода Галеркина с разрывными базисными функциями посвящено много работ как в России, так и за рубежом. Например, оценки для параболических интегро-дифференциальных уравнений получены в [11], в [13] разработана абстрактная теория схем разрывного метода Галеркина в смешанной формулировке и получены априорные оценки точности для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Наш анализ частично основывается на технике, представленной в работах [10, 12] для параболических и эллиптических задач, соответственно.

Для применения локального разрывного метода Галеркина перепишем исходную эллиптическую задачу (1), (2) как систему уравнений первого порядка. Введем вспомогательную переменную $\mathbf{q} = \nabla u$ и получаем следующую систему уравнений

$$\boldsymbol{q} = \nabla u, \qquad \text{в } \Omega, \tag{3}$$

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{q} = f, \qquad \text{в } \Omega, \tag{4}$$

$$u = 0, \qquad \text{на } \partial\Omega. \tag{5}$$

1. Локальный разрывный метод Галеркина

Покроем область расчета треугольной сеткой $\mathcal{T}_T$ без зазоров и наложений. Также введем в рассмотрение двойственную сетку $\mathcal{T}_D$, составленную из медианных ячеек, центры которых лежат в узлах ячеек треугольной сетки $\mathcal{T}_T$.

Для удобства дальнейших рассуждений дополнительно введем в рассмотрение сетку $\mathcal{T}_Q$, состоящую из ячеек Q, которые являются результатом пересечения ячеек из $\mathcal{T}_T$ и $\mathcal{T}_D$.

Предполагаем, что функции $(\boldsymbol{q}, u)$ берутся из $\boldsymbol{W} \times V$, где:

$$V = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_T \in H^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_T \right\},$$
$$\boldsymbol{W} = \left\{ \boldsymbol{q} \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 : \boldsymbol{q}|_D \in H^1(D)^2, \forall D \in \mathcal{T}_D \right\}.$$

Будем аппроксимировать точное решение $(\boldsymbol{q}, u)$ функциями $(\boldsymbol{q_h}, u_h)$ из конечно-элементного пространства $\boldsymbol{W_h} \times V_h \subset \boldsymbol{W} \times V$, где

$$V_h = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_T \in P(T), \forall T \in \mathcal{T}_T \right\},$$
$$\boldsymbol{W_h} = \left\{ \boldsymbol{q} \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 : \boldsymbol{q}|_D \in P(D)^2, \forall D \in \mathcal{T}_D \right\},$$

где локальные конечно-элементные пространства $P(T)$ и $P(D)^2$ состоят из полиномов.

Для обеспечения единственности аппроксимационного решения РМГ потребуем выполнения следующего условия для произвольных гладких функций $\mathbf{w}$ и v:

$$\text{если } v \in P(T) \text{ и } \int\limits_T \nabla v \cdot \boldsymbol{w} dx = 0, \ \forall \boldsymbol{w} \in P(D)^2 : T \cap D \neq \varnothing, \text{ то } \nabla v \equiv 0 \text{ в } T \in \mathcal{T}_T. \tag{6}$$

Аппроксимационное решение $(\boldsymbol{q_h}, u_h)$ далее определяется применением слабой формулировки для всех элементов $T \in \mathcal{T}_T$ и $D \in \mathcal{T}_D$ для всех $(\boldsymbol{w}, v) \in P(D)^2 \times P(T)$

$$\int\limits_D \boldsymbol{q_h} \cdot \boldsymbol{w} dx \ + \int\limits_D u_h \nabla \cdot \boldsymbol{w} dx \ - \int\limits_{\partial D} \hat{u}_h \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} dx = 0, \tag{7}$$

$$\int\limits_T \boldsymbol{q_h} \cdot \nabla v dx \ - \int\limits_{\partial T} v \hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{h}} \cdot \boldsymbol{n} dx = \int\limits_\Omega f v dx, \tag{8}$$

где численные потоки $\hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{h}}$ и $\hat{u}_h$ выбираются аналогично тому, как это сделано в работах [9, 11]. Чтобы определить численные потоки, определим сначала несколько обозначений. Пусть K^+ и K^- это два соседних элемента триангуляции $\mathcal{T}_T$. Пусть $\boldsymbol{x}$ будет произвольная точка набора $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$, и пусть $\boldsymbol{n}^+$ и $\boldsymbol{n}^-$ будут соответствующие внешние нормали к элементам в данной точке. Пусть $(\boldsymbol{q}, u)$ будут гладкие функции внутри каждого элемента $K^\pm$ и обозначим за $(\boldsymbol{q}^\pm, u^\pm)$ отпечатки $(\boldsymbol{q}, u)$ на e из внутренности $K^\pm$. После этого определим средние значения $\{\!\{\cdot\}\!\}$ и скачки $[\![\cdot]\!]$ на $\boldsymbol{x} \in e$ следующим образом

$$\begin{aligned} \{\!\{u\}\!\} &= \left(u^+ + u^-\right)/2, & \{\!\{\boldsymbol{q}\}\!\} &= \left(\boldsymbol{q}^+ + \boldsymbol{q}^-\right)/2, \\ [\![u]\!] &= u^+ \boldsymbol{n}^+ + u^- \boldsymbol{n}^-, & [\![\boldsymbol{q}]\!] &= \boldsymbol{q}^+ \cdot \boldsymbol{n}^+ + \boldsymbol{q}^- \cdot \boldsymbol{n}^-. \end{aligned}$$

Если набор e лежит внутри области Ω, получаем следующее определение для потоков из (7), (8)

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{q}} &= \{\!\{\boldsymbol{q}\}\!\} - C_{11} [\![u]\!], \\ \hat{u} &= \{\!\{u\}\!\}, \end{aligned} \tag{9}$$

где вспомогательный параметр C_{11} определен на $\boldsymbol{x} \in e$.

Граничные условия задаются следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{q}^+ - C_{11} u^+ \boldsymbol{n}^+, \\ \hat{u} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

2. Классические смешанные обозначения

Обозначим за Γ_I^T объединение всех внутренних ребер триангуляции $\mathcal{T}_T$, за Γ_I^D – объединение всех внутренних ребер сетки $\mathcal{T}_D$, за Γ_∂ - объединение всех ребер на границе области Ω.

Просуммируем уравнения (7) и (8) на соответствующих элементах и получим, что приближенное решение $(\boldsymbol{q_h}, u_h)$ будет являться решением следующей вариационной задачи: найти $(\boldsymbol{q_h}, u_h) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h$ такие, что

$$A\left(\boldsymbol{q_h}, \boldsymbol{w}\right) + B\left(u_h, \boldsymbol{w}\right) = 0, \tag{11}$$

$$-B\left(v, \boldsymbol{q_h}\right) + C\left(u_h, v\right) = F\left(v\right), \tag{12}$$

для всех $(\boldsymbol{w}, v) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h$. Билинейные формы A, B, C определяются следующим образом:

$$A\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}\right) = \int_{\Omega} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{w} d\boldsymbol{x}, \tag{13}$$

$$B\left(u, \boldsymbol{w}\right) = \sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} \int_Q u \nabla \cdot \boldsymbol{w} d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_Q} \{\!\{u\}\!\} [\![\boldsymbol{w}]\!] ds, \tag{14}$$

$$C\left(u, v\right) = \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![u]\!] [\![v]\!] ds. \tag{15}$$

Линейная форма F определяется следующим образом

$$F\left(v\right) = \int_{\Omega} f v d\boldsymbol{x}.$$

Уравнения (11), (12) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\mathcal{A}\left(\boldsymbol{q_h}, u_h; \boldsymbol{w}, v\right) = F\left(v\right), \tag{16}$$

где

$$\mathcal{A}\left(\boldsymbol{q_h}, u_h; \boldsymbol{w}, v\right) = A\left(\boldsymbol{q_h}, \boldsymbol{w}\right) + B\left(u_h, \boldsymbol{w}\right) - B\left(v, \boldsymbol{q_h}\right) + C\left(u_h, v\right). \tag{17}$$

Предложение 1. *При выборе потоков в виде (9), (10) и $C_{11} > 0$ задача (11), (12) имеет единственное решение $(\boldsymbol{q_h}, u_h) \in \boldsymbol{W}_h \times V_h$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f \equiv 0$, и покажем, что в этом случае решением будет являться пара $(\boldsymbol{q_h}, u_h) = (0, 0)$.

Из (16) при выборе $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{q_h}$, $v = u_h$ получим:

$$A(\boldsymbol{q_h}, \boldsymbol{q_h}) + C(u_h, u_h) = 0.$$

При $C_{11} > 0$ получаем, что $\boldsymbol{q_h} = 0$ и $[\![u]\!] = 0$ на Γ_Q^I.

Далее, из выражения (11) получаем $B(u_h, \boldsymbol{w}) = 0, \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W_h}$. Интегрируя по частям и используя предположение (6), получаем, что $\nabla u = 0$. Из доказанной непрерывности u и (2) получаем, что $u = 0$. □

3. Априорные оценки погрешности метода

Для каждого $T \in \mathcal{T}_T$ обозначим за h_T характеристический размер T и за ρ_T диаметр максимального шара, вложенного в T. Обозначим за $h = \max_{T \in \mathcal{T}_T} h_T$. Будем рассматривать триангуляции $\mathcal{T}_T$ и $\mathcal{T}_Q$, обладающие свойством регулярности, т.е. существует положительная константа σ такая, что

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \forall T \in \mathcal{T}_T, \quad \frac{h_Q}{\rho_Q} \leq \sigma, \forall Q \in \mathcal{T}_Q. \tag{18}$$

Далее введем в рассмотрение набор $\langle T, T' \rangle$, определенный следующим образом

$$\langle T, T' \rangle = \begin{cases} \varnothing, & \text{если мера}\left(\partial T \cap \partial T'\right) = 0, \\ \text{внутренность} \quad \partial T \cap \partial T' & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Будем предполагать, что существует положительная константа $\delta < 1$ такая, что для каждого элемента $T \in \mathcal{T}_T$

$$\delta \leq \frac{h_{T'}}{h_T} \leq \delta^{-1} \qquad \forall T' : \langle T, T' \rangle \neq \varnothing. \tag{19}$$

Также предполагаем, что локальное пространство $\mathcal{S}(K)$ содержит пространство полиномов $\mathcal{P}^k(K)$ степени не выше k и удовлетворяет (6).

Предполагаем, что стабилизирующий коэффициент C_{11}, определяющий численные потоки в (9) и (10), определяется следующим образом

$$C_{11}(x) = \begin{cases} \zeta \min\{h_{K^+}^{\alpha}, h_{K^-}^{\alpha}\}, \text{ если } \boldsymbol{x} \in \langle K^+, K^- \rangle, \\ \zeta h_{K^+}^{\alpha}, \text{ если } \boldsymbol{x} \in \partial K^+ \cap \Gamma_\partial, \end{cases} \tag{20}$$

где $\zeta > 0$, $-1 \leq \alpha \leq 0$ не зависят от размера сетки. Для удобства также введем в рассмотрение параметры μ^* и μ_* определенные как

$$\mu^* = \max\{-\alpha, 1\}, \quad \mu_* = \min\{-\alpha, 1\}.$$

Теорема 1. *Пусть $(\boldsymbol{q}, u)$ является решением задачи (3) – (5) и $(\boldsymbol{q_h}, u_h)$ является решением задачи (11), (12). Пусть выполнены предположения на локальные пространства и на вид стабилизирующего параметра C_{11}. Предполагаем, что триангуляция $\mathcal{T}_T$ удовлетворяет (18). Также, когда $\alpha \neq 0$ предполагаем, что имеет силу (19). Тогда получим для $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}(\Omega) \times H^{s+2}(\Omega)$, при $s \geq 0$,*

$$\|u - u_h\|_0 + h^D \left|(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q_h}, u - u_h)\right|_{\mathcal{A}}^2 \leq C h^{P+D} \|u\|_{s+2},$$

где C зависит от σ, δ (в случае $\alpha \neq 0$), ζ, k и d.

$$P = \min\{s + \frac{1}{2}(1 + \mu_*), k + \frac{1}{2}(1 - \mu^*)\}, \quad D = \frac{1}{2}(1 + \mu_*), \quad \text{если} \quad k \geq 1.$$

В случае $k = 0$ получаем $P = D = \frac{1}{2}(1 - \mu_*)$.

Доказательство теоремы будет приведено ниже.

Представим ошибку $(\boldsymbol{e_q}, e_u) = (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q_h}, u - u_h)$ как следующую сумму:

$$(\boldsymbol{e_q}, e_u) = (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}, u - \Pi u) + (\boldsymbol{\Pi e_q}, \Pi e_u),$$

где $\boldsymbol{\Pi}$ и Π обозначают проекции из $\boldsymbol{W}$ и V на конечно-элементные пространства $\boldsymbol{W_h}$ и V_h соответственно.

Будем считать, что выполняется свойство ортогональности метода Галеркина, а именно

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{e_q}, e_u; \boldsymbol{w}, v) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{w}, v) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h. \tag{21}$$

Для получения оценки в норме $\|e_u\|_{-t,D}$, где t – натуральное число и D – подобласть Ω, нам нужно получить оценку погрешности аппроксимации линейного функционала $\Lambda(u) = (\lambda, u)$, где $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в L^2 через $\Lambda(u_h)$

$$\|e_u\|_{-t,D} = \sup_{\lambda \in C_0^\infty(D)} \frac{\Lambda(e_u)}{\|\lambda\|_{t,D}}.$$

В данной работе нас интересует только случай $t = 0$. Для достижения необходимых оценок, введем в рассмотрение решение ϕ следующей двойственной задачи

$$-\triangle \phi = \lambda \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{22}$$

$$\phi = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{23}$$

4. Априорные оценки

Вначале приведем две леммы, которые содержат всю информацию, которую мы будем использовать относительно наших конечных элементов. Их доказательство основывается на работах [8, 9].

Лемма 1. *Пусть* $w \in H^{r+1}(K)$, $r \geq 0$. *Пусть* Π *есть линейный непрерывный оператор из* $H^{r+1}(K)$ *в* $\mathcal{S}(K)$ *такой, что* $\Pi w = w$ *для всех* $w \in \mathcal{P}^k(K)$. *Тогда для целого* m, $0 \leq m \leq r+1$, *получаем*

$$|w - \Pi w|_{m,K} \leq C h_K^{\min\{r,k\}+1-m} \|w\|_{r+1,K},$$

$$\|w - \Pi w\|_{0,\partial K} \leq C h_K^{\min\{r,k\}+\frac{1}{2}} \|w\|_{r+1,K},$$

где C *– константа, зависящая только от* σ *в неравенстве (18),* k, d *и* r.

Лемма 2. *Существует положительная константа* C_{inv}*, зависящая только от* σ *в неравенстве (18),* k *и* d *такая, что для всех* $s \in \mathcal{S}(K)^d$ *выполняется*

$$\|s\|_{0,\partial K} \leq C_{inv} h_K^{-\frac{1}{2}} \|s\|_{0,K},$$

для всех $K \in \mathcal{T}_T$ *и всех* $K \in \mathcal{T}_Q$.

Пусть Π и $\mathbf{\Pi}$ произвольные проекции на пространства V_h и $\boldsymbol{W_h}$, удовлетворяющие покомпонентно предположениям леммы 1.

Лемма 3. *Пусть* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^2 \times H^{s+2}(\Omega)$ *и* $(\boldsymbol{\Phi}, \phi) \in H^{t+1}(\Omega)^2 \times H^{t+2}(\Omega)$, $s, t \geq 0$. *Тогда справедлива следующая оценка*

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{A}(\boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}, u - \Pi u; \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{\Phi}, \phi - \Pi\phi)| \leq \\
&\leq C \left[\left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{s,k\}+2} \|\boldsymbol{q}\|_{s+1,Q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{t,k\}+2} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{t+1,Q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
&+ \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{s+1,k\}} \|u\|_{s+2,Q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{t,k\}+2} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{t+1,Q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{s,k\}+2} \|\boldsymbol{q}\|_{s+1,Q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{t+1,k\}} \|\phi\|_{t+2,Q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \left. \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} C_{11} h_Q^{2\min\{s+1,k\}+1} \|u\|_{s+2,Q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_Q} C_{11} h_Q^{2\min\{t+1,k\}+1} \|\phi\|_{t+2,Q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].
\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство будем проводить аналогично тому, как это сделано в работе [8]. Положим $\boldsymbol{\xi_q} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}$, $\xi_u = u - \Pi u$, $\boldsymbol{\xi_\Phi} = \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}$, $\xi_\phi = \phi - \Pi\phi$. Тогда имеем:

$$|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi_q}, \xi_u; \boldsymbol{\xi_\Phi}, \xi_\phi)| \leq |A(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_\Phi})| + |B(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi})| + |B(\xi_\phi, \boldsymbol{\xi_q})| + |C(\xi_u, \xi_\phi)|.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Из неравенства Коши – Буняковского получаем

$$|A(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \leq \sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \left| \int_Q \boldsymbol{\xi_q}\boldsymbol{\xi_\Phi} dx \right| \leq \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \|\boldsymbol{\xi_q}\|^2_{0,Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \|\boldsymbol{\xi_\Phi}\|^2_{0,Q} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, из оценок леммы 1 следует:

$$|A(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \leq \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{s,k\}+2} \|\boldsymbol{q}\|^2_{s+1,Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} h_q^{2\min\{t,k\}+2} \|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{t+1,Q} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Интегрируя по частям выражение (14) и применяя последовательно неравенство Коши – Буняковского и лемму 1, получим оценку:

$$|B(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi})| = \left| -\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \left[\int_Q \nabla\xi_u \cdot \boldsymbol{\xi_\Phi} dx + \int_{\partial Q} \boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot (\xi_u \boldsymbol{n}) d\sigma \right] \right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \left(|\xi_u|^2_{1,Q} + \frac{1}{h_Q} \|\xi_u\|^2_{0,\partial Q} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \left(\|\boldsymbol{\xi_\Phi}\|^2_{0,Q} + h_Q \|\boldsymbol{\xi_\Phi}\|^2_{0,\partial Q} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{s+1,k\}} \|u\|^2_{s+2,Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{t,k\}+2} \|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{t+1,Q} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее для $B(\xi_\phi, \boldsymbol{\xi_q})$ получим

$$|B(\xi_\phi, \boldsymbol{\xi_q})| \leq \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{s,k\}+2} \|\boldsymbol{q}\|^2_{s+1,Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} h_Q^{2\min\{t+1,k\}} \|\phi\|^2_{t+2,Q} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$|C(\xi_u, \xi_\phi)| = \left| -\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \int_{\partial Q} C_{11} [\![\xi_u]\!] \cdot (\xi_\phi \boldsymbol{n}) d\sigma \right| \leq \sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \left| \int_{\partial Q} C_{11} (\xi_u^{out} \boldsymbol{n} - \xi_u \boldsymbol{n}) \cdot (\xi_\phi \boldsymbol{n}) \right| \leq$$

$$\leq 2 \sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \left| \int_{\partial Q} \sqrt{C_{11}} \xi_u \sqrt{C_{11}} \xi_\phi d\sigma \right| \leq 2 \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} C_{11} \|\xi_u\|^2_{0,\partial Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} C_{11} \|\xi_\phi\|^2_{0,\partial Q} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} C_{11} h_Q^{2\min\{s+1,k\}+1} \|u\|^2_{s+2,Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} C_{11} h_Q^{2\min\{t+1,k\}+1} \|\phi\|^2_{t+2,Q} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сложив полученные неравенства, получаем требуемую оценку. □

Следствие 1. *Пусть* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^2 \times H^{s+2}(\Omega)$, $s \geq 0$ *является точным решением (3)–(5) и пусть* $\phi \in H^{t+2}(\Omega)$, $t \geq 0$ *является решением двойственной задачи (22), (23) и* $\boldsymbol{\Phi} = -\nabla\phi$. *Полагаем также, что коэффициент* C_{11} *удовлетворяет выражению (20). Тогда существует константа* C, *зависящая только от* σ, ζ, k *и* d, *такая, что*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}, u; \boldsymbol{\Phi}, \phi) \leq Ch^H \|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2},$$

где $H = 1+\alpha$, *когда* $k = 0$ *и* $H = \min\{s+1+\min\{t+1,k\}, k+1+\min\{t,k+\alpha\}\}$ *для* $k \geq 1$. *Более того,*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}, u; \boldsymbol{q}, u) \leq Ch^{2J} \|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2},$$

где $J = \frac{1}{2}(1+\alpha)$, *когда* $k = 0$ *и* $J = \min\{s + \frac{1}{2}\min\{s + \frac{1}{2}(1+1), k + \frac{1}{2}(1+\alpha)\}$ *для* $k \geq 1$.

Доказательство. Из леммы 3 получаем

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}, u; \boldsymbol{\Phi}, \phi) \leq C[h^{\min\{s,k\}+1}\left(h^{\min\{t,k\}+1} + h^{\min\{t+1,k\}}\right) + \\ + h^{\min\{s+1,k\}+1}\left(h^{\min\{t,k\}} + \zeta h^{\min\{t+1,k\}+\alpha}\right)]\|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2}$$

и

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}, u; \boldsymbol{q}, u) \leq C[h^{2\min\{s,k\}+2} + \zeta h^{2\min\{s+1,k\}+1+\alpha}]\|u\|_{s+2}.$$

□

Лемма 4. *Пусть* Π *и* $\boldsymbol{\Pi}$ *обозначают* $L^2(\Omega)$*-проекцию и* $L^2(\Omega)^2$*-проекцию на* V_h *и* $\boldsymbol{W_h}$ *соответственно. Тогда справедливо*

$$|\mathcal{A}(\boldsymbol{w}, v; \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q}, u - \Pi u)| \leq C\left(\|\boldsymbol{w}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![v]\!]^2 ds\right) \times \\ \times \int_{\Gamma_Q}\left(\frac{1}{C_{11}}\{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}^2 + \frac{1}{\chi}\{\!\{\xi_u\}\!\}^2 + C_{11}[\![\xi_u]\!]^2\right) ds, \qquad (24)$$

где C *обозначает константу, зависящую только от* σ, k *и* d.

Доказательство. Возьмем $\boldsymbol{\xi_q} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{q}$ и $\xi_u = u - \Pi u$, тогда получаем

$$|\mathcal{A}(\boldsymbol{w}, v; \boldsymbol{\xi_q}, \xi_u)| \leq |A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi_q})| + |B(v, \boldsymbol{\xi_q})| + |B(\xi_u, \boldsymbol{w})| + |C(v, \xi_u)|.$$

Используя неравенство Коши – Буняковского и тот факт, что $\boldsymbol{\Pi}$ есть $L^2(\Omega)^2$-проекция, получаем

$$|A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi_q})| = 0.$$

Далее получаем

$$|B(v, \boldsymbol{\xi_q})| = \left|\int_{\Gamma_Q} \{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}[\![v]\!] ds\right|.$$

Умножим и поделим на $C_{11}^{\frac{1}{2}}$ и применим неравенство Коши – Буняковского. Получаем

$$|B\left(v, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{q}}\right)| \leq \left(\int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![v]\!]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Gamma_Q} \frac{1}{C_{11}}\{\!\{\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{q}}\}\!\}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично

$$|B\left(\xi_u, \boldsymbol{w}\right)| = \left|\int_{\Gamma_Q} \{\!\{\xi_u\}\!\}[\![\boldsymbol{w}]\!] ds\right| \leq \left(\int_{\Gamma_Q} \chi[\![\boldsymbol{w}]\!]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Gamma_Q} \frac{1}{\chi}\{\!\{\xi_u\}\!\}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Первый множитель можно оценить следующим образом при помощи леммы 2:

$$\int_{\Gamma_Q} \chi[\![\boldsymbol{w}]\!] ds \leq \sum_{Q\in\mathcal{T}_Q}\sum_{e\in\partial Q}\int_e \chi\left(\boldsymbol{w}|_Q \cdot \boldsymbol{n}\right)^2 ds \leq \sum_{Q\in\mathcal{T}_Q} \chi^{\partial Q}\|\boldsymbol{w}|_Q \cdot \boldsymbol{n}\|_{0,\partial Q}^2 \leq$$
$$\leq C_{inv} \sup_{Q\in\mathcal{T}_q} \frac{\chi^{\partial Q}}{h_Q}\|\boldsymbol{w}\|_0^2 \leq C_{inv}\|\boldsymbol{w}\|_0^2,$$

где $\chi\left(\boldsymbol{x}\right) = \min\{h_Q, h_{Q'}\}$, если $\boldsymbol{x} \in \langle Q, Q'\rangle$, $\chi\left(\boldsymbol{x}\right) = h_Q$, если $\boldsymbol{x} \in \Gamma_\partial$, $\chi^{\partial Q} = \sup\{\chi\left(\boldsymbol{x}\right) : \boldsymbol{x} \in \partial Q\}$.

И наконец,

$$|C\left(v, \xi_u\right)| = \left|\int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![v]\!][\![\xi_u]\!] ds\right| \leq \left(\int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![v]\!]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![\xi_u]\!]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

На этом доказательство завершено. □

Лемма 5. *Для* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}\left(\Omega\right)^2 \times H^{s+2}\left(\Omega\right)$, $s \geq 0$ *справедлива оценка*

$$\int_{\Gamma_Q} \left(\frac{1}{C_{11}}\{\!\{\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{q}}\}\!\}^2 + \frac{1}{\chi}\{\!\{\xi_u\}\!\}^2 + C_{11}[\![\xi_u]\!]^2\right) ds \leq C \sum_{Q\in\mathcal{T}_Q}\left(h_Q^{2\min\{s,k\}+1}\frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial Q}}\|\boldsymbol{q}\|_{s+1,Q}^2\right) +$$
$$+ C \sum_{Q\in\mathcal{T}_Q}\left(h_Q^{2\min\{s+1,k\}+1}\left(\tilde{C}_{11}^{\partial Q} + \frac{1}{\tilde{\chi}^{\partial Q}}\right)\|u\|_{s+2,Q}^2\right),$$

где $\tilde{C}_{11}^{\partial Q} = \inf\{C_{11}\left(\boldsymbol{x}\right) : \boldsymbol{x} \in \partial Q\}$, $\tilde{\chi}^{\partial Q} = \inf\{\chi\left(\boldsymbol{x}\right) : \boldsymbol{x} \in \partial Q\}$, C *– константа, не зависящая от размера сетки и зависящая только от аппроксимации и констант из лемм 1 и 2,* $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}$, $\xi_u = u - \Pi u$ *и* $\chi\left(\boldsymbol{x}\right) = \min\{h_Q, h_{Q'}\}$, *если* $\boldsymbol{x} \in \langle Q, Q'\rangle$, $\chi\left(\boldsymbol{x}\right) = h_Q$, *если* $\boldsymbol{x} \in \Gamma_\partial$, $\chi^{\partial Q} = \sup\{\chi\left(\boldsymbol{x}\right) : \boldsymbol{x} \in \partial Q\}$.

Следствие 2. *Пусть* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}\left(\Omega\right)^2 \times H^{s+2}\left(\Omega\right)$, $s \geq 0$. *Полагаем, что коэффициент* C_{11} *удовлетворяет (20). Рассматриваемые триангуляции удовлетворяют предположению (18). Если* $\alpha \neq 0$ *также предполагаем, что (19) имеет силу. Тогда существует константа* C, *которая зависит только от* σ, δ, ζ, k *и* d, *такая, что*

$$\int_{\Gamma_Q} \left(\frac{1}{C_{11}}\{\!\{\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{q}}\}\!\}^2 + \frac{1}{\chi}\{\!\{\xi_u\}\!\}^2 + C_{11}[\![\xi_u]\!]^2\right) ds \leq Ch^{2P}\|u\|_{s+2}^2,$$

где $P = \frac{1}{2}\left(1 - \mu^*\right)$, *если* $k = 0$ *и* $P = \min\{s + \frac{1}{2}\left(1 + \mu_*\right), k + \frac{1}{2}\left(1 - \mu^*\right)\}$, *если* $k \geq 1$. *Если* $\alpha = 0$ *константа* C *не зависит от* δ.

Доказательство. Если взять коэффициент C_{11}, как в теореме 1, то после простых вычислений получим

$$\frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial Q}} \leq \zeta^{-1} h_Q^{-\alpha} \delta^{\alpha}$$

и

$$\left(C_{11}^{\partial Q} + \frac{1}{\tilde{\chi}^{\partial Q}}\right) \leq \zeta h_Q^{\alpha} + h_Q^{-1} \delta^{-1},$$

где параметр δ определяется в (19). Далее из леммы 5 получим

$$\int_{\Gamma_Q} \left(\frac{1}{C_{11}} \{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}^2 + \frac{1}{\chi} \{\!\{\xi_u\}\!\}^2 + C_{11} [\![\xi_u]\!]^2\right) ds \leq$$
$$\leq C \left[h^{2\min\{s,k\}+1} \zeta^{-1} h^{-\alpha} + h^{2\min\{s+1,k\}+1} \left(\zeta h^{\alpha} + h^{-1}\right)\right] \|u\|_{s+2}^2.$$

□

Предполагаем, что выполняются следующие аппроксимационные свойства для проекций $\boldsymbol{\Pi}$ и Π

$$|\mathcal{A}\left(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}, u - \Pi u; \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}, \phi - \Pi\phi\right)| \leq C h^H \|u\|_{s+2} \|\phi\|_{t+2} \tag{25}$$

для произвольных $(\boldsymbol{q}, u)$, $(\boldsymbol{\Phi}, \phi) \in \boldsymbol{W} \times V$ и

$$|\mathcal{A}\left(\boldsymbol{w}, v; \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}, u - \Pi u\right)| \leq C \left(\|\boldsymbol{w}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![v]\!]^2 ds\right) h^P \|u\|_{s+2} \tag{26}$$

для произвольных $(\boldsymbol{w}, v) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h$ и $(\boldsymbol{q}, u) \in H^1(\Omega)^2 \times H^2(\Omega)$.

Лемма 6. *Справедлива следующая оценка*

$$\|\boldsymbol{e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![e_u]\!]^2 ds \leq C h^J \|u\|_{s+2} + C h^P \|u\|_{s+2}$$

Доказательство. Распишем левую часть доказываемого неравенства, используя ранее предложенные обозначения:

$$\|\boldsymbol{e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![e_u]\!]^2 ds \leq \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![u - \Pi u]\!]^2 ds + \|\boldsymbol{\Pi e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![\Pi e_u]\!]^2 ds.$$

Т.к.

$$\left(\|\boldsymbol{\Pi e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![\Pi e_u]\!]^2 ds\right)^2 = \mathcal{A}\left(\boldsymbol{\Pi e_q}, \Pi e_u; \boldsymbol{\Pi e_q}, \Pi e_u\right),$$

тогда

$$\mathcal{A}\left(\boldsymbol{\Pi q} - \boldsymbol{q}, \Pi u - u; \boldsymbol{\Pi e_q}, \Pi e_u\right) = \mathcal{A}\left(-\boldsymbol{\Pi e_q}, \Pi e_u; \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}, \Pi u - u\right) \leq$$
$$\leq C \left(\|\boldsymbol{\Pi e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![\Pi e_u]\!]^2 ds\right) h^P \|u\|_{s+2}.$$

Таким образом, справедлива следующая оценка

$$\|\mathbf{\Pi} \boldsymbol{e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![\Pi e_u]\!]^2 ds \leq C h^P \|u\|_{s+2} \tag{27}$$

и далее

$$\|\boldsymbol{e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![e_u]\!]^2 ds \leq \|\boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi} \boldsymbol{q}\| + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![u - \Pi u]\!]^2 ds + C h^P \|u\|_{s+2}.$$

Искомая оценка сразу следует после применения предположения (25). □

Лемма 7. *Пусть t – натуральное число. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\|e_u\|_{-t,D} \leq C h^{\min\{H, 2P\}} \|u\|_{s+2}. \tag{28}$$

Доказательство. Пусть ϕ является решением двойственной задачи (22), (23) и $\mathbf{\Phi} = -\nabla \phi$, тогда легко показать, что при выборе $\mathbf{\Phi} = -\nabla \phi$ получаем

$$\mathcal{A}\left(-\mathbf{\Phi}, \phi; -\boldsymbol{s}, w\right) = \Lambda\left(w\right),$$

для всех $(\boldsymbol{s}, w) \in \boldsymbol{W} \times V$. Задача (1), (2) может быть переписана в виде (16). Возьмем $(\boldsymbol{s}, w) = (\boldsymbol{e_q}, e_u)$ и получим

$$\begin{aligned}\Lambda\left(e_u\right) = {} & \mathcal{A}\left(\boldsymbol{e_q}, e_u; \mathbf{\Phi}, \phi\right) = \\ & = \mathcal{A}\left(\boldsymbol{e_q}, e_u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi\Phi}, \phi - \Pi\phi\right) = \\ & = \mathcal{A}\left(\mathbf{\Pi}\boldsymbol{e_q}, \Pi e_u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi\Phi}, \phi - \Pi\phi\right) + \mathcal{A}\left(\boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}, u - \Pi u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi\Phi}, \phi - \Pi\phi\right).\end{aligned}$$

Т.к. $(\mathbf{\Pi}\boldsymbol{e_q}, \Pi e_u) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h$, то применяя (26) и (27), получаем следующую оценку

$$\left|\mathcal{A}\left(\mathbf{\Pi}\boldsymbol{e_q}, \Pi e_u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi\Phi}, \phi - \Pi\phi\right)\right| \leq C h^P \|u\|_{s+2} h^P \|\phi\|_{s+2}$$

и далее получаем

$$\left|\Lambda\left(e_u\right)\right| \leq C h^P \|u\|_{s+2} h^P \|\phi\|_{s+2} + \mathcal{A}\left(\boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}, u - \Pi u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi\Phi}, \phi - \Pi\phi\right).$$

Применим далее предположение (25) и по определению негативной нормы получаем искомую оценку. □

5. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Перейдем к доказательству теоремы 1. Из леммы 6 и следствий 1 и 2 получаем

$$\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q_h}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![u - u_h]\!]^2 ds \leq C h^{\min\{\tilde{P}, P\}} \|u\|_{s+2},$$

и т.к. $\min\{\tilde{P}, P\} = P$ справедлива оценка:

$$\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q_h}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![u - u_h]\!]^2 ds \leq C h^P \|u\|_{s+2}.$$

Рассмотрим норму L^2 погрешности $u - u_h$. Возьмем $t = 0$ и $D = \Omega$ в лемме 7. Из условия эллиптической регулярности двойственной задачи (22), (23) получаем $\|\phi\|_2 \leq C\|\lambda\|_0$. Оценка $\|u - u_h\|_0$ следует из следствий 1 и 2 ограниченности $\|\Phi\|_1$ и $\|\phi\|_2$ величиной $\|\lambda\|_0$. Получаем

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^{\min\{H|_{t=0}, P+P|_{s=0}\}}\|u\|_{s+2}$$

и т.к. $\min\{H|_{t=0}, P + P|_{s=0}\} = P + P|_{s=0}$ получаем оценку

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^{P+D}\|u\|_{s+2}, \tag{29}$$

где $D = P|_{s=0}$. На этом доказательство завершено. □

В таблице представлены порядки сходимости по h с различным выбором стабилизирующего параметра C_{11}. Эти порядки получаются из (29).

Таблица

Порядки сходимости решения $u \in H^{s+2}$ для $s \geq 0$ и $k \geq 1$

	C_{11}	$\|u - u_h\|_0$
$\alpha = 0$	$O(1)$	$\min\left\{s + \frac{1}{2}, k\right\} + \frac{1}{2}$
$\alpha = -1$	$O(1/h)$	$\min\{s + 1, k\} + 1$

Заключение

В работе получены оценки погрешности решения двумерной однородной краевой задачи для эллиптического уравнения методом Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных неструктурированных сетках. При этом предполагалось, что узлы двойственной сетки являются центрами ячеек основной сетки. Как видно из таблицы в случае использования стабилизирующего коэффициента порядка единицы получается порядок сходимости $k + \frac{1}{2}$, а в случае использования стабилизирующего коэффициента порядка h^{-1} порядок сходимости увеличивается до $k + 1$ для исследуемого метода, где k – максимальный порядок используемых полиномов в базисных функциях. При этом в данном случае, в отличие от традиционного подхода, в котором используется одна сетка, выбор численных потоков на границе элементов происходит интуитивно более понятно за счет использования разнесенных сеток.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (№ 1.6958.2017/8.9), РФФИ (проект 18-31-00102) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-2007.2018.1).

Литература

1. Жалнин, Р.В. Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированной сетке / Р.В. Жалнин, М.Е. Ладонкина, В.Ф. Масягин, В.Ф. Тишкин // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 7—13.
2. Жалнин, Р.В. Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках / Р.В. Жалнин, М.Е. Ладонкина, В.Ф. Масягин, В.Ф. Тишкин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 19, № 3. – С. 523–533.

3. Zhalnin, R.V. Solving the Problem of Non-Stationary Filtration of Substance by the Discontinuous Galerkin Method on Unstructured Grids / R.V. Zhalnin, M.E. Ladonkina, V.F. Masyagin, V.F. Tishkin // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2016. – V. 56, № 6. – P. 977–986.
4. Жалнин, Р.В. Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках / Р.В. Жалнин, М.Е. Ладонкина, В.Ф. Масягин, В.Ф. Тишкин // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 144-151.
5. Cockburn, B. The Local Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Convection-Diffusion Systems / B. Cockburn, C.-W. Shu // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1998. – V. 35. – P. 2440–2463.
6. Bassi, F. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier – Stokes Equations / F. Bassi, S. Rebay // Journal of Computational Physics. – 1997. – V. 131. – P. 267–279.
7. Cockburn, B. The Runge – Kutta Local Projection P1-Discontinuous Galerkin Method for Scalar Conservation Laws / B. Cockburn, C.-W. Shu // RAIRO modelisation mathematique et analyse numerique. – 1991. – V. 25. – P. 337–361.
8. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980.
9. Castillo, P. An A Priory Error Analysis of the Local Discontinuous Galerkin Method for Elliptic Problems / P. Castillo, B. Cockburn, I. Perugia, D. Schötzau // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2003. – V. 38. – P. 1676–1706.
10. Thomee, V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems / V. Thomee. – Berlin: Springer, 1997.
11. Pany, A. An hp-Local Discontinuous Galerkin Method for Parabolic Integro-Differential Equations / A. Pany, S. Yadav // Journal of Scientific Computing. – 2010. – V. 46, № 1. – P. 71–99.
12. Babuska, I. The hp-Version of the Finite Element Method with Quasi-Uniform Meshes / I. Babuska, M. Suri // RAIRO modelisation mathematique et analyse numerique. – 1987. – V. 21. – P. 199–238.
13. Dautov, R.Z. Abstract Theory of Hybridizable Discontinuous Galerkin Methods for Second-Order Quasilinear Elliptic Problems / R.Z. Dautov, E.M. Fedotov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2014. – V. 54, № 3. – P. 474–490.

Руслан Викторович Жалнин, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой, кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева (г. Саранск, Российская Федерация), zhrv@mrsu.ru.

Виктор Федорович Масягин, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева (г. Саранск, Российская Федерация), vmasyagin@gmail.com.

Поступила в редакцию 6 октября 2017 г.

MSC 65N30 DOI: 10.14529/mmp180203

GALERKIN METHOD WITH DISCONTINUOUS BASIS FUNCTIONS ON STAGGERED GRIPS A PRIORY ESTIMATES FOR THE HOMOGENEOUS DIRICHLET PROBLEM

***R.V. Zhalnin*[1], *V.F. Masyagin*[1]**
[1]National Research Mordovia State University, Saransk, Russian Federation,
E-mail: zhrv@mrsu.ru, vmasyagin@gmail.com

In this paper we present the accuracy of solution a priory estimates of a homogeneous boundary value problem for a second-order differential equation by the Galerkin method with discontinuous basis functions on staggered grids. To approximate the initial elliptic equation with known initial boundary conditions by the Galerkin method with discontinuous basis functions, it is necessary to transform it to a system of first-order partial differential equations. To do this auxiliary variables, representing the components on the flux of the sought value, are introduced. The characteristic feature of the method is the finding of auxiliary variables on the dual grid cells. The dual grid consists of median reference volumes and is conjugate to the basic unstructured triangular grid. The numerical fluxes on the boundary between the elements are found by using stabilizing additives. We show that for the stabilization parameter of order one, the L^2-norm of the solution is of order $k+\frac{1}{2}$, if the stabilization parameter of order h^{-1} is taken, the order of convergence of the solution increases to $k+1$, when polynomials of total degree at least k are used.

Keywords: a priory error analysis; finite elements; discontinuous Galerkin methods; staggered grids; elliptic problems.

References

1. Zhalnin R.V., Ladonkina M.E., Masyagin V.F., Tishkin V.F. [Discontinuous Finite-Element Galerkin Method for Numerical Solution of Two-Dimensional Diffusion Problems on Unstructured Grids]. *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 7–13. (in Russian)
2. Zhalnin R.V., Ladonkina M.E., Masyagin V.F., Tishkin V.F. [Solution of 3D Heat Conduction Equations using the Discontinuous Galerkin Method on Unstructured Grids] *Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2015, vol. 19, no. 3, pp. 523–533. (in Russian)
3. Zhalnin R.V., Ladonkina M.E., Masyagin V.F., Tishkin V.F. Solving the Problem of Non-Stationary Filtration of Substance by the Discontinuous Galerkin Method on Unstructured Grids. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 6, pp. 977–986. DOI: 10.1134/S0965542516060245
4. Zhalnin R.V., Ladonkina M.E., Masyagin V.F., Tishkin V.F. Discontinuous Finite-Element Galerkin Method for Numerical Solution of Parabolic Problems in Anisotropic Media on Triangle Grids. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 144–151. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp160313
5. Cockburn B., Shu C.-W. The Local Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Convection-Diffusion Systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998, vol. 35, pp. 2440–2463. DOI: 10.1137/S0036142997316712
6. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier – Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 1997, vol. 131, pp. 267–279. DOI: 10.1006/jcph.1996.5572

7. Cockburn B., Shu C.-W. The Runge – Kutta Local Projection P1-Discontinuous Galerkin Method for Scalar Conservation Laws. *RAIRO modelisation mathematique et analyse numerique*, 1991, vol. 25, pp. 337–361.
8. Ciarlet P. *Metod konechnyh elementov dlya ellipticheskih zadach* [The Finite Element Method for Elliptic Problems]. Moscow, Mir, 1980. (in Russian)
9. Castillo P., Cockburn B., Perugia I., Schötzau D. An A Priory Error Analysis of the Local Discontinuous Galerkin Method for Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2000, vol. 38, pp. 1676–1706. DOI: 10.1137/S0036142900371003
10. Thomee V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems.* Berlin, Springer, 1997. DOI: 10.1007/978-3-662-03359-3
11. Pany A., Yadav S. An hp-Local Discontinuous Galerkin Method for Parabolic Integro-Differential Equations. *Journal of Scientific Computing*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 71–99.
12. Babuska I., Suri M. The hp-Version of the Finite Element Method with Quasi-Uniform Meshes. *RAIRO modelisation mathematique et analyse numerique*, 1987, vol. 21, pp. 199–238.
13. Dautov R.Z., Fedotov E.M. Abstract Theory of Hybridizable Discontinuous Galerkin Methods for Second-Order Quasilinear Elliptic Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 3, pp. 474–490. DOI: 10.1134/S096554251403004X

Received October 6, 2017