

О СОВРЕМЕННЫХ ОРТОГОНАЛИЗОВАННЫХ АЛГОРИТМАХ
ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИЮ.В. Цыганова¹, М.В. Куликова²¹Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Российская Федерация²Университет Лиссабона, г. Лиссабон, Португалия

В настоящее время вычислительные методы оптимального оценивания стали самостоятельной областью исследования и получили большое развитие. Современные численно эффективные ортогонализированные алгоритмы привлекательны не только своей устойчивостью к ошибкам машинного округления, но и приспособленностью алгоритмов, использующих различные типы матричных ортогональных преобразований, к программной реализации на параллельных или векторных вычислительных системах. Эти свойства позволяют разрабатывать новые эффективные информационные технологии, в частности, при решении задач в режиме реального времени и при обработке больших данных. Статья содержит краткий обзор современных ортогонализированных алгоритмов оптимальной линейной дискретной фильтрации. Рассмотрены четыре класса ортогонализированных алгоритмов: квадратно-корневые ортогонализированные алгоритмы, алгоритмы на основе методов взвешенной ортогонализации, J -ортогонализированные алгоритмы и алгоритмы на базе методов сингулярного разложения. Приведена классификация алгоритмов по типам матричных ортогональных преобразований, на основе которых эти алгоритмы построены. Такая классификация позволяет легче понять метод построения ортогонализованного фильтра и выбрать способ эффективной программной реализации при решении практических задач в классе многомерных дискретных линейных стохастических систем. В работе исследованы вычислительные аспекты ортогонализированных алгоритмов: численная устойчивость к ошибкам машинного округления и способы эффективной программной реализации. Все рассмотренные алгоритмы являются алгебраически эквивалентными стандартной реализации дискретного фильтра Калмана, но существенно превосходят его по своим вычислительным свойствам. Полученные результаты сравнительного исследования позволяют сделать вывод о том, что применение ортогонализированных алгоритмов при решении практических задач помогает получить численно эффективные и надежные решения.

Ключевые слова: дискретная фильтрация; линейные стохастические системы; фильтр Калмана; матричные ортогональные преобразования; ортогонализированные алгоритмы.

Введение

В любой области научных исследований, связанной с математическим моделированием, данные, собираемые в результате наблюдения за некоторым объектом, служат исходным материалом для решения таких задач, как построение математической модели, основанное на модели оценивание состояния и основанное на оценках управление объектом.

Поскольку данные всегда первичны, для любой науки, имеющей дело с данными, моделирование является одной из главных задач. Модель извлекает информацию из данных благодаря тому, что она выявляет отношения между измеряемыми

характеристиками объекта и тем самым позволяет (если она не дескриптивная, а предиктивная), предсказывать свойства или поведение объекта всякий раз до того, как о нем поступят новые результаты измерений. Предиктивная модель, как правило, выражает информацию об объекте в математической форме, поэтому использование таких моделей справедливо относят к области математических информационных технологий. Данная работа посвящена современным методам оптимальной дискретной фильтрации в задаче оценивания состояний многомерных дискретных линейных стохастических моделей сложных систем на основе измерительных данных.

Фильтр Калмана (ФК) [1] является наиболее известным математическим рекуррентным алгоритмом оценивания вектора состояния линейной стохастической системы на основе доступных измерений. В настоящее время существует широкий класс робастных (численно устойчивых к ошибкам машинного округления) модификаций ФК, которые основаны на различных методах факторизации ковариационных матриц. Большое количество научных публикаций в области параметрического оценивания подтверждает практическую эффективность данных методов.

Среди всех робастных модификаций ФК можно выделить *класс ортогонализированных алгоритмов*, которые превосходят по своим вычислительным свойствам стандартные алгоритмы калмановской фильтрации. Современные ортогонализированные алгоритмы обладают улучшенными вычислительными свойствами, включая устойчивость к ошибкам машинного округления, компактную и однородную структуру, которая непосредственно ориентирована на единообразную обработку всех данных и идеальна для программной реализации средствами параллельного программирования, что позволяет эффективно обрабатывать большие объемы данных.

Данная статья, являясь, по существу, обзорной, имеет в своей основе изложение тех ключевых математических идей, которые привели к самым эффективным вычислительным алгоритмам во всех приложениях, где так или иначе возникает потребность в применении методов оптимальной дискретной фильтрации.

Статья организована следующим образом. В п. 1 излагается задача оптимальной дискретной фильтрации состояния многомерной дискретной линейной стохастической системы и рассматриваются основные типы алгоритмов дискретной фильтрации. В п. 2 сформулированы основные идеи, позволяющие преодолеть численную неустойчивость стандартного фильтра Калмана. В п. 3 обсуждаются вопросы устойчивости и эффективной программной реализации ортогонализированных алгоритмов.

1. Предпосылки

Рассмотрим многомерную дискретную линейную стохастическую систему \mathfrak{S} , представленную в пространстве состояний уравнениями

$$x_{k+1} = F_k x_k + B_k u_k + G_k w_k, \quad (1)$$

$$z_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}, \quad k \geq 0, \quad (2)$$

где k – дискретный отсчет времени, $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, подлежащий оцениванию; $z_k \in \mathbb{R}^m$ – доступный вектор измерений; $u_k \in \mathbb{R}^d$ – детерминированное управление. Шумы $\{w_k\}$ и $\{v_k\}$ – независимые нормально распределенные последовательности с нулевым математическим ожиданием и матрицами ковариаций $Q_k \geq 0$ и $R_k > 0$, соответственно. Начальное значение вектора состояния x_0 является гауссовым слу-

чайным вектором с характеристиками $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, \Pi_0)$. Вектор x_0 не зависит от $\{w_k\}$ и $\{v_k\}$.

Дискретная линейная стохастическая система \mathfrak{S} (1), (2) является математической моделью объектов различной природы. Поскольку значения вектора состояния недоступны прямому наблюдению ввиду присутствия помех в (2), мы можем вычислить только оценки вектора состояния в результате решения задачи оценивания (или фильтрации). Для линейных систем минимум квадратичного критерия качества оценивания соответствует оптимальной в среднеквадратическом смысле оценке \hat{x}_k вектора состояния x_k , которую можно вычислить с помощью известного с середины прошлого века алгоритма Р. Калмана.

1.1. Стандартные алгоритмы дискретного фильтра Калмана

Свое знаменитое решение задачи оптимальной дискретной фильтрации Рудольф Эмиль Калман [1] предложил в начале 1960-х годов прошлого века. Это решение получило название «*фильтр Калмана*». Изначально фильтр Калмана был построен для решения задачи параметрического оценивания движущихся технических объектов. И хотя его первое практическое использование было связано с областью авиации, впоследствии данный метод нашел свое применение в самых разных областях науки и техники, таких как обработка изображений, спутниковая геодезия, телекоммуникационные сети, метеорология, эконометрика, молекулярная биология и во многих других. В наше время калмановская фильтрация является одним из самых популярных методов решения различных прикладных задач, связанных с параметрическим оцениванием по экспериментальным данным.

Стандартный фильтр Калмана записан в так называемой *ковариационной* форме, поскольку на каждом шаге в алгоритме рекуррентно обновляются значения ковариационных матриц ошибок оценивания вместе с обновлением оценок вектора состояния. Алгоритм состоит из двух этапов: *экстраполяция*¹ и *фильтрация*². Эту форму ФК называют *двухстадийной*. Соответствующие уравнения приведены ниже.

СКФ-ТМ – Conventional Time and Measurement Update Kalman Filter	
① НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ	
положить	$\hat{x}_{0 0} = \bar{x}_0, P_{0 0} = \Pi_0 \ (\Pi_0 > 0)$
② ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ($k \geq 0$)	
оценка	$\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_{k k} + B_k u_k$
ковариация ошибки	$P_{k+1} = F_k P_{k k} F_k^\top + G_k Q_k G_k^\top$
③ ФИЛЬТРАЦИЯ ($k \geq 0$)	
коэффициент Калмана	$K_{k+1} = P_{k+1} H_{k+1}^\top R_{e,k+1}^{-1}, \quad R_{e,k+1} = R_{k+1} + H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^\top$
оценка	$\hat{x}_{k+1 k+1} = \hat{x}_{k+1} + K_{k+1} e_{k+1}, \quad e_{k+1} = z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}$
ковариация ошибки	$P_{k+1 k+1} = P_{k+1} - K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1}$

Условия сходимости алгоритма Калмана подробно рассмотрены в [14].

Алгоритм СКФ-ТМ можно представить в сокращенной *одностадийной форме* [20, р. 895], которая требует меньше вычислений, чем двухстадийная форма алгоритма.

¹Предсказание значений оценки вектора состояния и матрицы ковариации ошибки оценки по предыдущим доступным измерениям.

²Обновление предсказанной оценки вектора состояния и матрицы ковариации ошибки оценки в соответствии с полученным в текущий момент времени измерением.

Алгоритмы фильтрации *информационного* типа вместо матрицы ковариации ошибки оценивания P_k на каждом шаге рекуррентно обновляют значения информационной матрицы Λ_k , где $\Lambda_k \triangleq P_k^{-1}$. Вместо оценки вектора состояния вычисляют *информационную оценку* $\hat{d}_k \triangleq \Lambda_k \hat{x}_k$. В отличие от алгоритмов ковариационного типа, информационные алгоритмы могут стартовать в отсутствии априорной информации, т.е. при $\Lambda_0 = 0$ [23, р. 262].

Быстрые алгоритмы играют важную роль в задаче оценивания стационарных линейных стохастических систем большой размерности, т.е. при $n \gg 0$. В их основе лежит следующий подход. Поскольку для стационарных систем ранг матрицы $\delta P_k = P_{k+1} - P_k$ часто много меньше, чем ранг P_k , то на каждой итерации алгоритма целесообразно обновлять значения матрицы δP_k вместо P_k .

Согласно [22, лемма 11.1.1], для эрмитовой матрицы δP_0 ранга α существует разложение вида $\delta P_0 = P_1 - P_0 = L_0 M_0 L_0^\top$, где $M_0 \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ – эрмитова невырожденная матрица. Тогда матрицы δP_k можно представить в виде $\delta P_k = L_k M_k L_k^\top$, $k \geq 0$, где $M_k \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ – эрмитова невырожденная матрица. Для L_k и M_k справедливы следующие рекуррентные соотношения ($k \geq 0$): $L_{k+1} = (F - K_k R_{e,k}^{-1} H) L_k$, $M_{k+1} = M_k - M_k L_k^\top H^\top R_{e,k+1}^{-1} H L_k M_k$.

Отметим, что в классе быстрых алгоритмов разложение $\delta P_0 = L_0 M_0 L_0^\top$ осуществляется только один раз для поиска начальных значений L_0 и M_0 ³. Далее вычисление разностного уравнения Риккати уже не требуется, поскольку в алгоритме обновляются матрицы меньшего размера L_k, M_k , где $L_k \in \mathbb{R}^{n \times \alpha}$, $M_k \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$. По ним всегда можно восстановить матрицу ковариации P_{k+1} для любого $k = 1, \dots, K$. В общем случае быстрый алгоритм фильтрации задается рекуррентными уравнениями [22, гл. 11], где показано, что в случае $m \leq n, q \leq n$, который часто встречается на практике, сложность алгоритма фильтрации сокращается с $O(n^3)$ до $O(\alpha n^2)$. Как правило, $\alpha \ll n$ для систем большой размерности.

1.2. Численная неустойчивость фильтра Калмана

Фильтр Калмана практически сразу же после своего появления завоевал большую популярность среди специалистов в области параметрического оценивания, поскольку представлял собой вычислительный алгоритм, идеальный для реализации на ЭВМ. Однако, он имеет один существенный недостаток, а именно, *неустойчивость* к ошибкам машинного округления. В теории вычислительные свойства фильтра Калмана характеризуются ковариационной матрицей ошибки оценивания, которая является решением матричного дифференциального или разностного уравнения Риккати. С момента первых реализаций фильтра Калмана на ЭВМ сразу же было обнаружено, что вычисленные среднеквадратические ошибки оценивания часто существенно отличаются от теоретических значений. В некоторых случаях полученное решение уравнения Риккати имело отрицательные диагональные элементы, что теоретически невозможно. Проблема заключалась в ошибках машинного округления.

Данная проблема хорошо известна специалистам в области оптимальной дискретной фильтрации. Теоретический численный анализ фильтра Калмана проведен в известной работе [15]. Во многих работах на практических примерах показана численная неустойчивость ФК, см. например, подробный анализ в [23, р. 205, example 6.2]. Обсуждение указанной проблемы можно найти в [6, 13, 17, 22, 23, 28].

³ Данное разложение можно найти с помощью алгоритма Bunch–Kaufman [24].

Ошибки машинного округления, которые неизбежно возникают из-за ограниченности разрядной сетки при реализации арифметики с плавающей запятой, характеризуются *единичной ошибкой округления* $\varepsilon_{\text{окр}}$ ⁴. При реализации алгоритма Калмана на ЭВМ были обнаружены проблемы вычислений, связанные с ошибками машинного округления. Для того, чтобы программная реализация ФК давала правильный результат, теоретическое решение уравнения Риккати, согласно которому обновляется матрица ковариаций ошибок оценивания P_k , должно совпадать с вычисленным на ЭВМ значением. Если это условие не выполняется, соответствующая задача является *плохо обусловленной*. В [23] авторы приводят несколько причин численной неустойчивости ФК, среди которых неопределенности в параметрах системы (ошибки моделирования), большой диапазон фактических значений параметров системы вследствие неудачно построенной математической модели, плохая обусловленность ковариационной матрицы невязки измерений, низкая точность представления вещественных чисел в ЭВМ и др. В [17] указан ряд причин потери точности при программной реализации ФК, в том числе потеря свойства положительной определенности ковариационными матрицами ошибок оценивания, плохая обусловленность матриц, требующих операции обращения, при точных измерениях, а также при проведении в относительно короткое время ряда неточных измерений с примерно одинаковым вкладом их в пересчет оценки вектора состояния.

Перечисленные выше причины нередко появляются при решении практических задач. Различия между теоретическими и вычисленными значениями в алгоритме Калмана зачастую становятся настолько существенными, что возникает вопрос о целесообразности использования полученных результатов.

К сожалению, окончательно избавиться от проблемы ошибок машинного округления в настоящее время еще невозможно ввиду ограниченности разрядной сетки компьютера. Но можно существенно уменьшить их влияние с помощью *численно эффективных* модификаций фильтра Калмана. Численная эффективность означает, в первую очередь, устойчивость по отношению к ошибкам машинного округления, сокращение объема вычислений, а также наличие эффективных (компактных и однородных) структур данных, поступающих для обработки в алгоритм фильтрации.

Первые численно эффективные модификации ФК появились уже вскоре после его открытия. Основной идеей построения таких алгоритмов является применение методов факторизации ковариационных матриц ошибок оценок, участвующих в уравнениях фильтра. Первым таким алгоритмом был квадратно-корневой алгоритм Поттера [2], который принято считать отправной точкой для развития целого направления в области линейного оценивания и управления, которое продолжает активно развиваться и сейчас. Данный факт подтверждается большим количеством научных публикаций. Отметим хорошо известные авторам монографии, содержащие описание численно эффективных модификаций ФК: зарубежные [13, 22, 23, 28] и отечественные [17, 29, 30]. Основные направления в теории устойчивых методов оптимальной дискретной фильтрации приведены в [23] и на русском языке в недавней работе [31].

Численно эффективные реализации фильтра Калмана широко используются в мире для решения практических задач, о чем свидетельствует большое количество

⁴ Величина $\varepsilon_{\text{окр}}$ определяется как наибольшее число такое, что с учетом машинного округления в операциях с вещественными числами $1 + \varepsilon_{\text{окр}} \equiv 1$ или $1 + \varepsilon_{\text{окр}}/2 \equiv 1$. Значение этой ошибки зависит от конкретного способа реализации машинной арифметики.

зарубежных научных публикаций, в том числе за последние годы, например, управление движением мобильных роботов [26], задачи слежения за техническими объектами [27], обработка цифровых сигналов [35], оценивание волатильности курсов валют [32], задачи судовождения [33]. В то же время в данной области исследований отечественных публикаций значительно меньше. Авторы надеются, что данная статья сможет в некоторой степени восполнить образовавшийся пробел о мировых достижениях в области численно эффективных методов оптимальной дискретной фильтрации.

2. Современные ортогонализированные алгоритмы

В настоящее время наиболее предпочтительными для решения практических задач являются численно эффективные ортогонализированные алгоритмы⁵ [22].

Согласно [37], *ортогонализированным алгоритмом* назовем «алгебраически эквивалентный дискретному фильтру Калмана алгоритм вычисления оценок \hat{x}_k и/или $\hat{x}_{k|k}$ вектора состояния дискретной линейной стохастической системы (1), (2) и ковариационной матрицы ошибки оценивания P_k и/или $P_{k|k}$, основанный на матрично-блочном представлении разностного уравнения Риккати и матричном ортогональном преобразовании как способе вычисления указанных величин».

Как и все известные устойчивые модификации дискретного фильтра Калмана, ортогонализированные алгоритмы фильтрации обладают двойной точностью вычислений, а использование численно устойчивых ортогональных преобразований на каждом шаге дает дополнительные преимущества⁶. Кроме того, однородная структура современных ортогонализированных алгоритмов идеально подходит для распараллеливания на многопроцессорных ЭВМ [16, 22, 35].

В ортогонализированных алгоритмах вместо ковариационной матрицы ошибки оценивания P_k вычисляют матричные факторы разного вида. Например, квадратно-корневые ортогонализированные алгоритмы основаны на разложении Холецкого матрицы ковариации $P_k = S_{P_k}^T S_{P_k}$ и на матричных ортогональных преобразованиях вида $QA = R$ (либо $QA = L$) как способе обновления матричных факторов S_{P_k} ⁷. Такая организация вычислений сохраняет положительные элементы на диагонали ковариационных матриц P_k и их симметричность. Более того, квадратно-корневые методы обеспечивают вдвое больше точных цифр после десятичной запятой, чем стандартная реализация фильтра Калмана. Увеличение точности вычислений происходит за счет того, что в ортогонализированных алгоритмах применяются ортогональные преобразования для обновления матричных факторов S_{P_k} в соответствии с уравнением Риккати, записанным в блочно-матричной форме

$$Q \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{P_k} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Фактор Холецкого S_{P_k} вычисляют с помощью любого QR-преобразования блочной прямоугольной матрицы. Такая форма матричных уравнений с учетом различных размерностей позволяет строить разные варианты алгоритмов.

⁵В иностранной литературе используют термин «array algorithms for Kalman filtering».

⁶Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в [22].

⁷Разложение Холецкого выполняется только один раз для начальных значений $P_0 > 0$, и далее обновление уравнений фильтра происходит в терминах матричных квадратных корней S_{P_k} .

Первым ортогонализированным алгоритмом принято считать квадратно-корневой информационный фильтр SRIF (Square Root Information Filter) [4]. Ортогонализированные алгоритмы ковариационного и смешанного типов были предложены и развиты Т. Кайлатом и соавторами [20].

Организация вычислений в блочной ортогонализованной форме дает алгоритму следующие преимущества: 1) позволяет обрабатывать данные с двойной точностью; 2) на каждом шаге рекурсии используются численно устойчивые ортогональные преобразования, что гарантирует сохранение специального верхнего/нижнего треугольного вида матриц $S_{P_k} = P_k^{1/2}$; 3) данные методы свободны от операции матричного обращения, чувствительной к ошибкам округления.

Далее рассмотрим современные классы ортогонализированных алгоритмов.

2.1. Квадратно-корневые ортогонализированные алгоритмы

В начале прошлого века А.Л. Холецкий [23, р. 373] предложил оригинальное решение задачи МНК с помощью метода извлечения квадратных корней из неотрицательно-определенной симметрической матрицы, позволяющего представить ее в виде произведения нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной матрицы $U = L^T$. В свою очередь, методы матричных ортогональных преобразований первоначально были разработаны также для решения задачи МНК. В калмановской фильтрации данные методы применяются для вычисления факторов Холецкого ковариационных матриц ошибок оценивания на этапах экстраполяции и фильтрации квадратно-корневого алгоритма.

С. Шмидт [5] впервые предложил использовать метод Холецкого для вычисления матричного квадратного корня S_{P_k} такого, что $S_{P_k} S_{P_k}^T = P_k$. Если $S_{P_{k|k}}$ – фактор Холецкого матрицы $P_{k|k}$, а S_{Q_k} – фактор Холецкого матрицы ковариации шума Q_k , тогда на этапе экстраполяции уравнение для матрицы P_{k+1} можно переписать в виде $S_{P_{k+1}} S_{P_{k+1}}^T = F_k S_{P_{k|k}} S_{P_{k|k}}^T F_k^T + G_k S_{Q_k} S_{Q_k}^T G_k^T$. Метод вычисления матрицы S_{P_k} , предложенный Шмидтом, заключается в ортогональном преобразовании прямоугольной (2×1) -блочной матрицы вида

$$Q \begin{bmatrix} S_{P_{k|k}}^T & F_k^T \\ S_{Q_k}^T & G_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{P_{k+1}}^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где Q – матрица ортогонального преобразования. Шмидт предложил алгоритм для построения матрицы Q , получивший название *модифицированный алгоритм Грама – Шмидта* [23].

П. Каминский [7] предложил новые модификации ковариационных и информационных квадратно-корневых алгоритмов с улучшенными вычислительными свойствами. Учитывая свойство двойственности ковариационных и информационных алгоритмов, он разработал новую вычислительную схему

$$Q \begin{bmatrix} S_{R_k} & H_k S_{P_k} \\ 0 & S_{P_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{R_{e,k}} & 0 \\ \bar{K}_{f,k} & S_{P_{k|k}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

для этапа обработки измерений в дискретном фильтре, где $S_{R_{e,k}}$ – квадратный корень матрицы $R_{e,k}$ ковариации невязки измерений e_k , $\bar{K}_{f,k} = P_k H_k^T R_{e,k}^{-1/2}$ и Q – матрица ортогонального преобразования к нижнему треугольному виду блочной матрицы в

левой части (4). Он также предложил использовать на этапе экстраполяции выражение (3).

Известно, что основной объем вычислений в фильтре Калмана приходится на решение разностного уравнения Риккати. Для его сокращения М. Морф и Т. Кайлат [10] выдвинули идею совмещения в одном ортогонализованном алгоритме этапов экстраполяции и фильтрации. Они предложили вычислять фактор Холецкого $S_{P_{k+1}}$ по известному фактору Холецкого S_{P_k} , полученному на предыдущем шаге алгоритма, с помощью процедуры триангуляризации блочной матрицы

$$Q \begin{bmatrix} S_{R_k}^\top & 0 \\ S_{P_k}^\top H_k^\top & S_{P_k}^\top F_k^\top \\ 0 & S_{Q_k}^\top G_k^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{R_{e,k}}^\top & \bar{K}_{p,k}^\top \\ 0 & S_{P_{k+1}}^\top \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где Q – матрица ортогонального преобразования, приводящего к верхнему треугольному виду матрицу в левой части (5), при этом $\bar{K}_{p,k}^\top \triangleq F_k \bar{K}_{f,k}$.

Изложенные идеи касаются алгоритмов ковариационного типа. Идея квадратно-корневого алгоритма информационного типа принадлежит П. Дайеру и С. МакРейнольдсу [4]. Они построили алгоритмы экстраполяции и фильтрации для информационного фильтра в терминах матричных квадратных корней. Алгоритм SRIF, получивший широкое распространение также, как и квадратно-корневые ковариационные фильтры, обладает улучшенными вычислительными свойствами по сравнению со стандартной реализацией информационного фильтра. Уравнения совмещенного (одностадийного) квадратно-корневого ковариационного алгоритма представлены ниже.

SRCF – Square-Root Covariance Filter	
① Начальные данные	
положить	$\hat{x}_0 = \bar{x}_0, P_0 = \Pi_0 > 0 (R_0 > 0, Q_0 \geq 0)$
вычислить	$S_{\Pi_0}, S_{R_0}, S_{Q_0}$ – нижние треугольные факторы Холецкого
② РЕКУРРЕНТНОЕ ОБНОВЛЕНИЕ ДАННЫХ ($k \geq 0$)	
выполнить $Q_k A_k = R_k$	$Q_k \begin{bmatrix} S_{R_k}^\top & 0 \\ S_{P_k}^\top H_k^\top & S_{P_k}^\top F_k^\top \\ 0 & S_{Q_k}^\top G_k^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{R_{e,k}}^\top & \bar{K}_{p,k}^\top \\ 0 & S_{P_{k+1}}^\top \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
оценка	$\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_k + B_k u_k + \bar{K}_{p,k} \bar{e}_k, \quad \bar{e}_k = S_{R_{e,k}}^{-1} (z_k - H_k \hat{x}_k)$
вычислить	$S_{R_{k+1}}, S_{Q_{k+1}}$

Алгоритм SRCF можно сформулировать в двухстадийной ковариационной форме в виде алгоритма SRCF-TM (Time and Measurement Update SRCF) [22, глава 12]. Сравнение вычислительной сложности квадратно-корневых алгоритмов см. в [15].

2.1.1. Расширенные ортогонализованные алгоритмы

Расширенные алгоритмы являются наиболее подходящими для решения задач на современных вычислительных комплексах с параллельной архитектурой [16, 22]. Основная идея таких реализаций ФК заключается в формировании *пред-массива* (pre-array), который представляет собой блочную матрицу, и последующем его приведении к требуемому нижнему или верхнему (либо их комбинации) треугольному блочному *пост-массиву* (post-array) с помощью матричных ортогональных преобразований. В работе [20, 22] Т. Кайлат и соавторы предложили несколько вариантов расширенных

ортогонализированных алгоритмов. Уравнения расширенного квадратно-корневого одностадийного ковариационного фильтра (алгоритм eSRCF) представлены ниже.

eSRCF – extended Square-Root Covariance Filter	
① НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ	
положить	$\hat{x}_0 = \bar{x}_0, P_0 = \Pi_0 > 0, R_0 > 0, Q_0 \geq 0$
вычислить	$S_{\Pi_0}, S_{R_0}, S_{Q_0}$ – нижние треугольные факторы Холецкого
найти нач. оценку	$\hat{z}_0 = S_{\Pi_0}^{-1} \bar{x}_0$
② РЕКУРРЕНТНОЕ ОБНОВЛЕНИЕ ДАННЫХ ($k \geq 0$)	
выполнить $Q_k A_k = R_k$	$Q_k \begin{bmatrix} S_{R_k}^\top & 0 & -S_{R_k}^{-1} z_k \\ S_{P_k}^\top H_k^\top & S_{P_k}^\top F_k^\top & \hat{z}_k \\ 0 & S_{Q_k}^\top G_k^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{R_{e,k}}^\top & \bar{K}_{p,k}^\top & -\bar{e}_{k+1} \\ 0 & S_{P_{k+1}}^\top & \hat{z}_{k+1} \\ 0 & 0 & \gamma_k \end{bmatrix}$
вычислить	$S_{R_{k+1}}, S_{Q_{k+1}}$

В алгоритме eSRCF в каждый момент времени k доступна оценка вектора состояния $\hat{x}_k = S_{P_k} \hat{z}_k + B_k u_k$. Данный алгоритм можно переформулировать в двухстадийной форме, т.е. разделить вычисления на два этапа: экстраполяции и фильтрации. Такое представление имеет особое значение в случае, когда измерения поступают через неравные промежутки времени. Такой вариант расширенного алгоритма обозначим как eSRCF-TM (eSRCF Time and Measurement Update).

В алгоритмах SRCF, SRCF-TM, SRIF, eSRCF и eSRCF-TM вычисления проводят с помощью матричного ортогонального преобразования $QA = R$, где A – в общем случае прямоугольная блочная матрица, Q – матрица QR-преобразования к *верхней* треугольной блочной матрице R . Аналогично, в [20, р. 897] построен расширенный квадратно-корневой одностадийный информационный фильтр (алгоритм eSRIF).

eSRIF – extended Square-Root Information Filter	
① НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ	
положить	$\bar{x}_0, P_0 = \Pi_0 > 0, R_0 > 0, Q_0 \geq 0, \det F_k \neq 0$
вычислить	$S_{\Pi_0}, S_{R_0}, S_{Q_0}$ – нижние треугольные факторы Холецкого
найти нач. оценку	$\hat{z}_0 = S_{\Pi_0}^{-1} \bar{x}_0$
② РЕКУРРЕНТНОЕ ОБНОВЛЕНИЕ ДАННЫХ ($k \geq 0$)	
выполнить $Q_k A_k = L_k$	$Q_k \begin{bmatrix} S_{R_k}^{-1} & -S_{R_k}^{-1} H_k F_k^{-1} & S_{R_k}^{-1} H_k F_k^{-1} G_k S_{Q_k} & -S_{R_k}^{-1} z_k \\ 0 & S_{P_k}^{-1} F_k^{-1} & -S_{P_k}^{-1} F_k^{-1} G_k S_{Q_k} & \hat{z}_k \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{R_{e,k}}^{-1} & 0 & 0 & -\bar{e}_k \\ -S_{P_{k+1}}^{-1} K_{p,k} & S_{P_{k+1}}^{-1} & 0 & \hat{z}_{k+1} \\ (*) & (*) & (*) & (*) \end{bmatrix}$
вычислить	$S_{R_{k+1}}, S_{Q_{k+1}}$

В нем в каждый момент времени k оценку вектора состояния вычисляют с помощью обратной подстановки в треугольной системе линейных алгебраических уравнений $S_{P_k}^{-1} \hat{x}_k = \hat{z}_k$. Избавиться от этих дополнительных вычислений можно путем добавления четвертого блочного столбца в алгоритм eSRIF [20, р. 898]. Такой алгоритм называют *модифицированным* квадратно-корневым информационным фильтром (алгоритм mSRIF – modified Square-Root Information Filter).

В алгоритмах eSRIF и mSRIF вычисления проводят с помощью матричного ортогонального преобразования $QA = L$, где A – в общем случае прямоугольная блочная

матрица, Q – матрица QL-преобразования к *нижнему* треугольному виду первых трех блочных столбцов матрицы A . Результатом преобразования является блочная матрица L .

2.1.2. Комбинированные ортогонализированные алгоритмы

Сочетание ковариационной и информационной форм в одном ортогонализированном алгоритме обосновано в работе [20]. Ниже приведены уравнения комбинированного квадратно-корневого фильтра cSRF.

cSRF – combined Square-Root Filter	
① Начальные данные	
положить	$\bar{x}_0, P_0 = \Pi_0 > 0$ ($R_0 > 0, Q_0 \geq 0, \det F_k \neq 0$)
вычислить	$S_{\Pi_0}, S_{R_0}, S_{Q_0}$ – нижние треугольные факторы Холецкого
найти нач. оценку	$\hat{z}_0 = S_{\Pi_0}^{-1} \bar{x}_0$
② РЕКУРРЕНТНОЕ ОБНОВЛЕНИЕ ДАННЫХ ($k \geq 0$)	
$Q_k A_k = A_k^\dagger$	$Q_k \left[\begin{array}{ccc ccc} S_{R_k}^\top & 0 & -S_{R_k}^{-1} H_k F_k^{-1} & S_{R_k}^{-1} H_k F_k^{-1} G_k S_{Q_k} & -S_{R_k}^{-1} z_k \\ S_{P_k}^\top H_k^\top & S_{P_k}^\top F_k^\top & S_{P_k}^{-1} F_k^{-1} & -S_{P_k}^{-1} F_k^{-1} G_k S_{Q_k} & \hat{z}_k \\ 0 & S_{Q_k}^\top G_k^\top & 0 & I & 0 \end{array} \right]$ $= \left[\begin{array}{cc cc c} S_{R_{e,k}}^\top & \bar{K}_{p,k}^\top & 0 & 0 & -\bar{e}_k \\ 0 & S_{P_{k+1}}^\top & S_{P_{k+1}}^{-1} & 0 & \hat{z}_{k+1} \\ 0 & 0 & (*) & S_{Q_k}^{-1} & (*) \end{array} \right]$
вычислить	$S_{R_{k+1}}, S_{Q_{k+1}}$

В алгоритме cSRF для блочной матрицы A вычисляют матричное ортогональное преобразование $QA = A^\dagger$ (QR-преобразование первых двух блочных столбцов либо QL-преобразование третьего и четвертого блочных столбца) и получают в результате блочную матрицу A^\dagger .

Комбинированный алгоритм cSRF является «универсальным» в том смысле, что позволяет одновременно вычислить все величины обоих алгоритмов – ковариационного SRCF и информационного SRIF. Вычислительная сложность алгоритма зависит от конкретной задачи и от тех величин фильтра, которые требуются для ее решения.

Алгоритм cSRF можно представить в двухстадийной форме в виде алгоритма cSRF-TM (Time and Measurement Update cSRF) [20, p. 899].

2.2. Алгоритмы на основе методов взвешенной ортогонализации

Второй класс ортогонализированных алгоритмов основан на методах взвешенной ортогонализации [21]. Известны два типа таких алгоритмов: UD-реализации и LD-реализации дискретного фильтра Калмана. Основными преимуществами алгоритмов являются устойчивость по отношению к ошибкам машинного округления, отсутствие операции извлечения квадратного корня, избавление от операции матричного обращения, компактная и однородная структура, ориентированность на параллельные вычисления.

Отличие данного класса алгоритмов заключается в том, что все они используют представление ковариационной матрицы P_k в виде матричного произведения CDC^\top , где C – верхняя треугольная U либо нижняя треугольная L матрица с единицами на диагонали, D – диагональная матрица. Для любой квадратной положительно опреде-

ленной матрицы такое представление существует и может быть получено с помощью модифицированного разложения Холецкого [21]. Первой UD-модификацией дискретного фильтра Калмана был последовательный алгоритм Дж. Бирмана [13]⁸. Затем К. Торнтон [12] модифицировала метод взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта и применила его для вычисления UD-факторов ковариационной матрицы P_k на этапе экстраполяции ФК.

Кратко изложим основную идею построения ортогонализированных алгоритмов на основе модифицированного метода взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта (MWGS – Modified Weighted Gram-Shmidt orthogonalization). Рассмотрим матричное уравнение вида $P = A^T D_1 A + C^T D_2 C$. Если существует матрица MWGS-преобразования B такая, что $\begin{bmatrix} A^T & C^T \end{bmatrix} = UB^T$, где U – верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, то

$$P = \begin{bmatrix} A^T & C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = A^T D_1 A + C^T D_2 C = UDU^T, \quad (6)$$

где $\{U, D\}$ – верхний треугольный и диагональный факторы в UD-разложении матрицы P . Таким образом, класс UD-фильтров основан на обратной процедуре взвешенной ортогонализации при обновлении пары матриц $\{U, D\}$ (6).

Рассмотрим современные ортогонализированные алгоритмы, основанные на взвешенной ортогонализации.

2.2.1. Одностадийный ортогонализированный UD-алгоритм

В [16] авторы предложили ортогонализированный алгоритм этапа фильтрации дискретного ФК, основанный на быстрых вращениях Гивенса [21]. Предположим, что в результате выполнения этапа экстраполяции получены LD-факторы ковариационных матриц $P_k = L_{P_k} D_{P_k} L_{P_k}^T$ и $R_k = L_{R_k} L_{R_k} L_{R_k}^T$. Тогда на этапе фильтрации в алгоритме Калмана LD-факторы $L_{P_{k|k}}$ и $D_{P_{k|k}}$ ковариационной матрицы $P_{k|k}$ можно вычислить с помощью матричного ортогонального преобразования

$$\begin{bmatrix} L_{R_k} & H_k L_{P_k} \\ 0 & L_{P_k} \end{bmatrix} Q_D = \begin{bmatrix} L_{R_{e,k}} & 0 \\ K_k L_{R_{e,k}} & L_{P_{k|k}} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где Q_D – матрица быстрых вращений Гивенса, не содержащих операции извлечения квадратного корня, $L_{R_{e,k}}$ и $D_{R_{e,k}}$ – LD-факторы ковариационной матрицы невязки измерений $R_{e,k}$, K_k – матрица Калмана. В [16] показано, что данный алгоритм алгебраически эквивалентен LD-реализации алгоритма Бирмана для случая скалярных измерений [30, теорема 13.4].

В [23, с. 262] на основе указанных выше преобразований сформулирован одностадийный ортогонализированный UD-алгоритм. Вместо быстрых вращений Гивенса использован метод модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта. Назовем данный алгоритм UD-CF (UD Covariance Filter). Алгоритм UD-CF позволяет вычислить те же величины, что и алгоритм СКФ, но в отличие от последнего, является устойчивым по отношению к ошибкам машинного округления. Вместе с тем, он обладает следующими недостатками: вычисление оценки вектора состояния

⁸ Дж. Бирман не только доказал численную эффективность последовательного UD-фильтра, но и показал, что при соответствующей программной реализации его алгоритм не сложнее, чем обычный алгоритм Калмана, см. [11].

\hat{x}_k происходит отдельно от обработки остальных данных, которые входят в блочные матрицы и обновляются процедурой MWGS-ортогонализации. Таким образом, этот вариант алгоритма имеет неоднородную структуру.

Для преодоления указанных недостатков в недавней работе [34] построен *расширенный ортогонализированный UD-алгоритм*, в котором все данные обрабатываются единообразно с помощью процедуры MWGS-ортогонализации.

2.2.2. Расширенный ковариационный ортогонализированный UD-алгоритм

Идея расширенного ортогонализированного алгоритма заключается в том, что все величины дискретного фильтра помещаются в блочную матрицу и обрабатываются единообразно с помощью взвешенных ортогональных преобразований. Рассмотрим представление ковариационной матрицы в виде $P_k = U_{P_k} D_{P_k} U_{P_k}^T$, где U – верхняя треугольная матрица, D – диагональная матрица. Введем обозначения $\hat{z}_k = (U_{P_k} D_{P_k})^{-1} \hat{x}_k$, $b_k = (U_{R_{e,k}} D_{R_{e,k}})^{-1} e_k$. Также предположим, что в системе (1), (2) вектор управления $u_k \equiv 0$. Уравнения расширенного ортогонализированного UD-фильтра запишем в следующем виде.

eUD-CF – extended UD Covariance Filter	
① Начальные данные	
нач. данные	$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$ ($\Pi_0 > 0, R_0 > 0, Q_0 \geq 0$)
вычислить	$\{U_{\Pi_0}, D_{\Pi_0}\}, \{U_{R_0}, D_{R_0}\}, \{U_{Q_0}, D_{Q_0}\}$ – UD-факторы Холецкого
положить	$\hat{z}_0 = (U_{\Pi_0} D_{\Pi_0})^{-1} \bar{x}_0$ и $U_{P_0} = U_{\Pi_0}, D_{P_0} = D_{\Pi_0}$
② РЕКУРРЕНТНОЕ ОБНОВЛЕНИЕ ДАННЫХ ($k \geq 0$)	
заполнить пред-массивы	$A_k^T = \begin{bmatrix} 0 & \hat{z}_k^T & -z_k^T (U_{R_k} D_{R_k})^{-1} \\ G_k U_{Q_k} & F_k U_{P_k} & 0 \\ 0 & H_k U_{P_k} & U_{R_k} \end{bmatrix},$
выполнить MWGS	$D_k = \text{Diag}\{D_{Q_k}, D_{P_k}, D_{R_k}\}$
получить пост-массивы	$A_k^T = A_k^\dagger B_k^T$, где $B_k^T D_k B_k = D_k^\dagger$
вычислить	$A_k^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & \hat{z}_{k+1}^T & b_k^T \\ 0 & U_{P_{k+1}} & K_{p,k} U_{R_{e,k}} \\ 0 & 0 & U_{R_{e,k}} \end{bmatrix}, D_k^\dagger = \text{Diag}\{\gamma, D_{P_{k+1}}, D_{R_{e,k}}\}$
	$S_{R_{k+1}}, S_{Q_{k+1}}$

Алгоритм eUD-CF легко реализовать в виде программного кода на ЭВМ, поскольку он имеет компактную и однородную структуру, позволяющую единообразно обрабатывать все данные. В алгоритме отсутствует операция извлечения квадратного корня, а вычисление оценки вектора состояния \hat{x}_k не требует операции матричного обращения, которая, как известно, является чувствительной к ошибкам машинного округления.

2.2.3. Другие варианты алгоритмов

Объединяя алгоритм Торнтон для нижних треугольных факторов [30, с. 279] с блочным представлением Кайлата (7), в [38] впервые представлен двухстадийный ортогонализированный алгоритм LD-TM (LD Time and Measurement Update). Здесь на этапе экстраполяции применяют прямую процедуру MWGS-ортогонализации строк матрицы W с весовой матрицей D и получают в результате нижнюю треугольную

блочную матрицу \mathcal{W}^\dagger и блочно-диагональную матрицу \mathcal{D}^\dagger ; вычисления на этапе фильтрации проводят аналогично.

В данном разделе рассмотрены только алгоритмы ковариационного типа. Что касается алгоритмов информационного типа, то авторам известна только одна работа [39], в которой построен один из возможных вариантов информационного UD-фильтра. Однако, этот алгоритм не обладает удобным для реализации блочно-матричным представлением как, например, алгоритм eUD-CF, поскольку в нем все необходимые UD-факторы ковариационных матриц вычисляются по отдельности с помощью MWGS-преобразования и с помощью метода одноранговой модификации. Оценки вектора состояния также вычисляются по отдельным выражениям.

Таким образом, в настоящее время актуальной является задача построения новых ортогонализированных UD-фильтров информационного типа и исследование их вычислительных свойств в сравнении с существующими информационными реализациями ФК.

2.3. J -ортогонализированные быстрые алгоритмы

Третий важный класс ортогонализированных алгоритмов построен на базе J -ортогональных преобразований. Его называют классом быстрых алгоритмов Чандрасекара⁹ [8–10, 19]. Их достоинствами являются устойчивость по отношению к ошибкам округления, свойственная всем ортогонализированным блочным алгоритмам, ориентированность на параллельные вычисления, существенное сокращение вычислительной сложности.

Поскольку применение ортогональных преобразований позволяет строить численно устойчивые модификации фильтра Калмана, ортогонализированные алгоритмы были получены и для класса быстрых алгоритмов. Однако, здесь необходимо обновлять уравнения вида $C^T C = A^T A \pm B^T B$, что невозможно осуществить с помощью обычных ортогональных преобразований. С этой целью используют J -ортогональные преобразования вида $QA = R$, где матрица преобразования Q является J -ортогональной [25].

Рассмотрим ортогонализированную квадратно-корневую форму быстрых алгоритмов [22].

J-SRFF – Square-Root J-orthogonal Fast Filter	
① АПРИОРНЫЕ ДАННЫЕ	
нач. значения	$\hat{x}_{0 0} = \bar{x}_0, P_{0 0} = \Pi_0, \Pi_0 > 0$
вычислить	$\bar{K}_{p,0} = F\Pi_0 H^T R_{e,0}^{-1/2}, R_{e,0} = R + H\Pi_0 H^T$
найти разложение	$\delta P_0 = \bar{L}_0 S \bar{L}_0^T$, где $\bar{L}_0 \in \mathbb{R}^{n \times \alpha}, S \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ – сигнатура матрицы δP_0 и $\alpha = \text{rank}(\delta P_0), \delta P_0 = F\Pi_0 F^T + GQG^T - \bar{K}_{p,0} \bar{K}_{p,0}^T - \Pi_0$
② ОБНОВЛЕНИЕ МАТРИЦ ФИЛЬТРА ($k \geq 0$)	
вычислить	$Q_k \begin{bmatrix} R_{e,k}^{1/2} & \bar{K}_{p,k}^T \\ \bar{L}_k^T H^T & \bar{L}_k^T F^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{e,k+1}^{1/2} & \bar{K}_{p,k+1}^T \\ 0 & \bar{L}_{k+1}^T \end{bmatrix}$
③ ФИЛЬТРАЦИЯ ($k \geq 0$)	
оценка	$\hat{x}_{k+1} = F\hat{x}_k + Bu_k + \bar{K}_{p,k} \bar{e}_k$
ковариация ошибки	$P_{k+1} = \Pi_0 + \sum_{j=0}^k \bar{L}_j \bar{L}_j^T$

⁹От англ.: fast Chandrasekhar-type algorithms. Полное название таких методов Chandrasekhar-Kailath-Morf-Sidhu алгоритмы.

В общем случае, матрицы $R_{r,k}$ не вырождены и не обязательно являются знакоопределенными. Однако они имеют очень важное для построения ортогонализированных квадратно-корневых алгоритмов свойство, а именно, постоянную во времени энергию. Рассмотрим разложение вида $R_{r,k} = -R_{r,k}^{\top/2} S_k R_{r,k}^{1/2}$, $\delta P_k = P_{k+1|k} - P_{k|k-1} = \bar{L}_k S_k \bar{L}_k^\top$, где $\bar{L}_k = L_k R_{r,k}^{-1/2}$, $\bar{L}_k \in \mathbb{R}^{n \times \alpha}$ и $S_k \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ – сигнатура эрмитовой матрицы, т. е. диагональная матрица, в которой количество ± 1 на главной диагонали определено числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы δP_k . В силу закона энергии эрмитовых форм $S_k = S$, $\forall k$ и S – сигнатура матрицы δP_0 . В алгоритме SRFF Q_k – матрица J -ортогонального преобразования (сигнатура $J = I_m \oplus S = \text{diag}\{I_m, S\}$), приводящего к верхнему треугольному виду первый блочный столбец матрицы, стоящей в левой части матричного уравнения шага ② в алгоритме SRFF, т. е. $R_{e,k+1}^{1/2}$ – верхняя треугольная матрица. Теоретическое обоснование данного класса алгоритмов см. в [22, гл. 13].

2.4. Алгоритмы на основе сингулярного разложения

Четвертым классом современных ортогонализированных алгоритмов являются алгоритмы, построенные на основе сингулярного разложения (SVD-преобразования). Главная особенность заключается в том, что для их реализации не требуется строгая положительная определенность и невырожденность матриц ковариаций шумов Q_k и R_k , а также начальной матрицы ковариации ошибки оценки P_0 . Другими словами, если в процессе работы такого алгоритма положительная определенность указанных матриц будет потеряна, это обстоятельство никак не повлияет на работоспособность SVD-фильтра.

Идея построения SVD-фильтра состоит в представлении ковариационных матриц ошибок оценивания в виде $P_k = \Theta_{P_k} D_{P_k} \Theta_{P_k}^\top$, где Θ_{P_k} – ортогональная матрица и D_{P_k} – диагональная матрица, содержащая сингулярные значения матрицы P_k . Уравнения SVD-фильтра позволяют рекуррентно обновлять SVD-факторы матрицы P_k с помощью процедуры SVD-факторизации (сингулярного разложения). Насколько известно авторам данной статьи, впервые SVD-фильтр был построен в [18, р. 1226]. Кроме сингулярного разложения, в уравнениях фильтра использовалось также разложение Холецкого для вычисления квадратно-корневых факторов матриц ковариаций шумов Q_k и R_k . Поэтому назовем данный алгоритм SVD-SRKF. В нем на каждом шаге вычисляют сингулярное разложение прямоугольной блочной матрицы A , в результате получают SVD-факторы \mathfrak{W} , Σ и \mathfrak{V} такие, что $A = \mathfrak{W}\Sigma\mathfrak{V}^\top$. Следует отметить, что алгоритм SVD-SRKF не свободен от недостатков. Во-первых, на этапе фильтрации требуется три операции матричного обращения. Во-вторых, реализация алгоритма требует нахождения разложения Холецкого матриц Q_k и R_k . Если по каким-либо причинам (условия задачи или вычисленные в процессе работы алгоритма значения) эти матрицы потеряют положительную определенность, разложение Холецкого невозможно будет выполнить, и алгоритм SVD-SRKF потеряет работоспособность.

Результатом устранения указанных недостатков стал улучшенный SVD-фильтр, предложенный в недавней работе авторов [36]. Уравнения алгоритма представлены ниже.

SVD-KF – improved SVD Kalman Filter

① НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ	
вычислить SVD	$\Pi_0 = \Theta_{\Pi_0} D_{\Pi_0} \Theta_{\Pi_0}^\top, Q_0 = \Theta_{Q_0} D_{Q_0} \Theta_{Q_0}^\top$
положить	$\hat{x}_{0 0} = \bar{x}_0, \Theta_{P_{0 0}} = \Theta_{\Pi_0}, D_{P_{0 0}}^{1/2} = D_{\Pi_0}^{1/2}$
② ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ($k \geq 0$)	
вычислить SVD	$\begin{bmatrix} D_{P_{k k}}^{1/2} \Theta_{P_{k k}}^\top F_k^\top \\ D_{Q_k}^{1/2} \Theta_{Q_k}^\top G_k^\top \end{bmatrix} = \mathfrak{W}_{TU} \begin{bmatrix} D_{P_{k+1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{P_{k+1}}^\top$
найти оценку	$\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_{k k} + B_k u_k$
вычислить SVD	$Q_{k+1} = \Theta_{Q_{k+1}} D_{Q_{k+1}} \Theta_{Q_{k+1}}^\top, R_{k+1} = \Theta_{R_{k+1}} D_{R_{k+1}} \Theta_{R_{k+1}}^\top$
③ ФИЛЬТРАЦИЯ ($k \geq 0$)	
вычислить SVD	$\begin{bmatrix} D_{R_{k+1}}^{1/2} \Theta_{R_{k+1}}^\top \\ D_{P_{k+1}}^{1/2} \Theta_{P_{k+1}}^\top H_{k+1}^\top \end{bmatrix} = \mathfrak{W}_{MU}^{(1)} \begin{bmatrix} D_{R_{e,k+1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{R_{e,k+1}}^\top$
найти	$\bar{K}_{k+1} = P_{k+1} H_{k+1}^\top \Theta_{R_{e,k+1}}, K_{k+1} = \bar{K}_{k+1} D_{R_{e,k+1}}^{-1} \Theta_{R_{e,k+1}}^\top$
вычислить SVD	$\begin{bmatrix} D_{P_{k+1}}^{1/2} \Theta_{P_{k+1}}^\top (I - K_{k+1} H_{k+1})^\top \\ D_{R_{k+1}}^{1/2} \Theta_{R_{k+1}}^\top K_{k+1}^\top \end{bmatrix} = \mathfrak{W}_{MU}^{(2)} \begin{bmatrix} D_{P_{k+1 k+1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{P_{k+1 k+1}}^\top$
найти оценку	$\hat{x}_{k+1 k+1} = \hat{x}_{k+1} + \bar{K}_{k+1} D_{R_{e,k+1}}^{-1} \bar{e}_{k+1}, \bar{e}_{k+1} = \Theta_{R_{e,k+1}}^\top (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1})$

В отличие от SVD-SRKF, в алгоритме SVD-KF требуется всего одно обращение диагональной матрицы $D_{R_{e,k+1}}^{-1}$. В [36] доказано, что алгоритм SVD-KF алгебраически эквивалентен стандартному представлению фильтра Калмана СКФ-ТМ, но в отличие от последнего, обладает улучшенными вычислительными свойствами, а именно, высокой устойчивостью к ошибкам машинного округления. Алгоритм SVD-KF отличается от других ортогонализированных алгоритмов тем, что в отличие от SR- и UD-алгоритмов он не требует условия положительной определенности матриц ковариаций шумов Q_k и R_k , и в отличие от алгоритмов информационного типа, не требует невырожденности переходной матрицы состояния F_k . Следовательно, данный алгоритм может применяться в качестве численно эффективной реализации фильтра Калмана для широкого класса задач дискретной фильтрации.

Также, как и в предыдущем пункте, здесь рассмотрены SVD-реализации ковариационного типа. Насколько известно авторам данной статьи, для алгоритмов информационного типа SVD-реализаций пока не существует, и эта задача может быть предметом отдельного исследования.

3. Вычислительные аспекты ортогонализированных алгоритмов

Рассмотрим вычислительные аспекты современных ортогонализированных алгоритмов. Традиционно, устойчивые реализации дискретного фильтра Калмана подразделяют на следующие категории: алгоритмы ковариационного и информационного типа (обновляющие на каждом шаге, соответственно, значения ковариационной матрицы P либо значения информационной матрицы Λ); двухстадийные и одностадийные (совмещенные) алгоритмы; расширенные алгоритмы.

В [37] предложена классификация современных ортогонализированных алгоритмов в зависимости от типа матричных ортогональных преобразований (см. таблицу).

Основным критерием классификации является способ построения и численной реализации ортогонализованного алгоритма. Приведенный обзор показал, что каж-

Классификация современных ортогонализированных алгоритмов

Ортогонализированный алгоритм		Тип ортогонального преобразования
АЛГОРИТМЫ КОВАРИАЦИОННОГО ТИПА		
①	SRCF [5–7]	$Q \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$
②	SRCF-TM [5–7]	$Q^{TU} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}; Q^{MU} A_2 = R_2$
③	eSRCF [20, 22]	$Q \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$
④	eSRCF-TM [20, 22]	$Q^{TU} A_1 = R_1; Q^{MU} \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$
⑤	UD-CF [12, 13, 16]	$A^\top = UB^\top$, где $A^\top D_w A = UD_\beta U^\top$
⑥	eUD-CF [23, 34]	$A^\top = UB^\top$, где $A^\top D_w A = UD_\beta U^\top$
⑦	LD-TM [30, 38]	$A^{TU} = L_1 B_1^\top$, где $(A^{TU})^\top D_w^{TU} A^{TU} = L_1 D_{\beta 1} L_1^\top$; $A^{MU} = L_2 B_2^\top$, где $(A^{MU})^\top D_w^{MU} A^{MU} = L_2 D_{\beta 2} L_2^\top$
⑧	J-SRFF [9, 10, 19, 22]	$QA = R$, где $Q^\top JQ = J$
⑨	SVD-SRKF [18]	$A^{TU} = W^{TU} \Sigma V^\top; A^{MU} = W^{MU} \Sigma V^\top$
⑩	SVD-KF [36]	$A^{TU} = W^{TU} \Sigma V^\top$; $A_1^{MU} = W_1^{MU} \Sigma V^\top, A_2^{MU} = W_2^{MU} \Sigma V^\top$
АЛГОРИТМЫ ИНФОРМАЦИОННОГО ТИПА		
①	SRIF [4, 13]	$Q^{TU} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \end{bmatrix}; Q^{MU} A_2 = R_2$
②	eSRIF [20, 22]	$Q \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$
③	mSRIF [20, 22]	$Q \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$
КОМБИНИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ		
①	cSRF [20]	$QA = [R L]$
②	cSRF-TM [20]	$Q^{TU} A = [R L]; Q^{MU} A = [R L]$
Всего: 15 классов алгоритмов		

дый из алгоритмов основан на применении некоторого матричного ортогонального преобразования и не зависит от способа его вычисления.

Таким образом, выбирая различные методы ортогональных преобразований, можно построить целые *семейства* ортогонализированных алгоритмов. Более того, зная принцип построения ортогонализированного алгоритма на основе того или иного матричного ортогонального преобразования, можно построить и теоретически обосновать новые ортогонализированные алгоритмы ковариационного и информационного типов, а также ортогонализированные алгоритмы для других классов дискретных систем, например, для дискретных линейных систем с коррелированными шумами, для нелинейных дискретных систем, для парных марковских моделей систем и других.

3.1. Особенности программной реализации ортогонализированных алгоритмов

В таблице показано, что каждый ортогонализированный алгоритм построен на основе одного из матричных ортогональных преобразований. Следовательно, методы ортогональных преобразований можно рассматривать как *базовые вычислительные технологии* для реализации ортогонализированных алгоритмов. Поэтому технология программной реализации ортогонализированных алгоритмов представляется простой и

понятной [37]. Она состоит из трех основных этапов:

1. Заполнить имеющимися данными блочный(ые) пред-массив(ы) [pred-array(s)].
2. Выполнить матричное ортогональное преобразование одного из типов, представленных в табл.
3. Получить в результате блочный(ые) пост-массив(ы) [post-array(s)] и извлечь из него (из них) в виде матричных блоков искомые результаты.

Общие схемы программной реализации различных классов алгоритмов показаны на рис. 1 и 2 а). Примеры использования этих общих схем показаны на рис. 1 и 2 б).

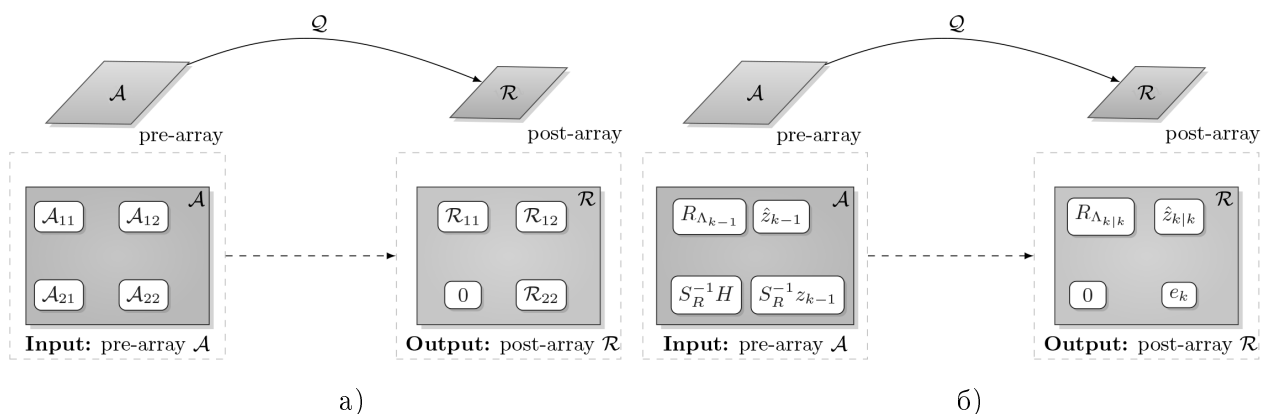


Рис. 1. а) Общая схема программной реализации квадратно-корневых алгоритмов; б) Пример схемы программной реализации алгоритма SRIF (этап фильтрации) на основе QR преобразования

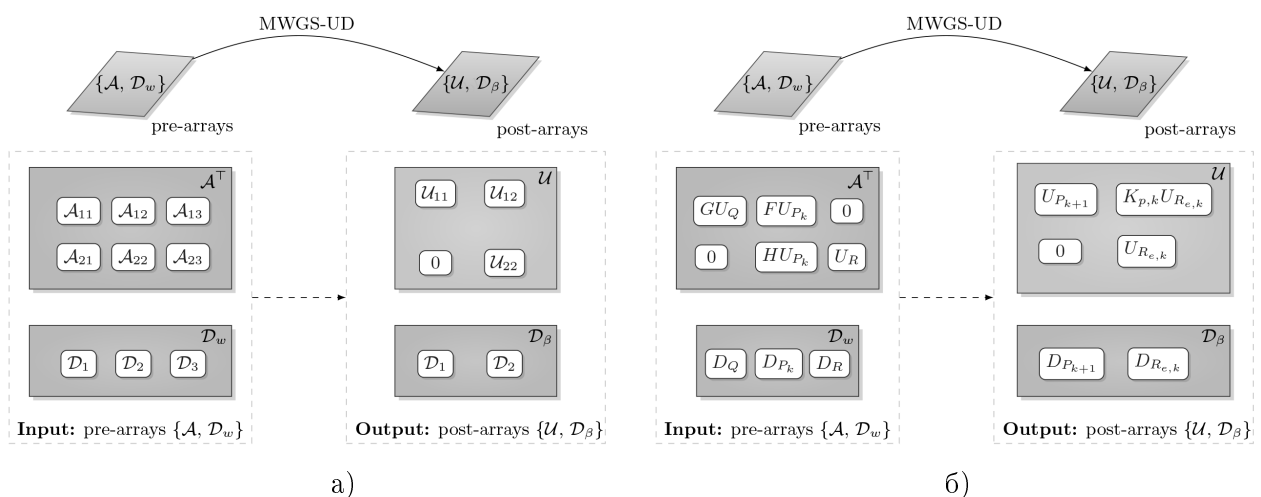


Рис. 2. а) Общая схема программной реализации UD алгоритмов; б) Пример схемы программной реализации алгоритма UD-CF на основе MWGS-UD преобразования

Аналогично можно представить общие схемы для QL-, LD-, JQR- и SVD-преобразований. Заполняя блочные массивы необходимыми данными, получаем конкретный вариант ортогонализованного алгоритма. Рис. 3 содержит пример программного кода этапа фильтрации алгоритма SRIF. Рис. 4 содержит пример программного кода алгоритма UD-CF.

Для реализации метода QR-преобразования использована m -функция `qr` из стандартной библиотеки MATLAB и программная реализация в виде m -функции

```
function [R_L,zx] = SRIF_TM_update(H,S_R,z,R_L,zx)
[m,n] = size(H);
A = [R_L zx; S_R\H S_R\z];
[Q,RR] = qr(A);
R_L = RR(1:n,1:n);
zx = RR(1:n,n+1);
end
```

Рис. 3. Программный код этапа фильтрации алгоритма SRIF

```
function [x,U_P,D_P] = UD_CF(F,B,G,H,U_Q,D_Q,U_R,D_R,U_P,D_P,z,x,u)
[m,n] = size(H);
q = size(G,2);
A = [G*U_Q F*U_P zeros(n,m); zeros(m,q) H*U_P U_R]';
Dw = diag([diag(D_Q); diag(D_P); diag(D_R)]);
[U, Db] = MWGS_UD(A, Dw);
U_P = U(1:n,1:n);
D_P = Db(1:n,1:n);
x = F*x + B*u + U(1:n,n+1:n+m)*U(n+1:n+m,n+1:n+m)\(z-H*x);
end
```

Рис. 4. Программный код алгоритма UD-CF

MWGS_UD обратной процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта [13].

Таким образом, программная реализация ортогонализированных алгоритмов представляет собой применение матричных ортогональных преобразований к блочным массивам данных. Такая однородная структура алгоритмов идеально подходит для распараллеливания вычислений и реализации средствами параллельного программирования.

3.2. Численная устойчивость алгоритмов к ошибкам машинного округления

Проблема влияния ошибок машинного округления на работоспособность стандартного алгоритма Калмана была обозначена выше в разделе 1.2. Покажем на одном практическом примере улучшенные вычислительные свойства современных ортогонализированных алгоритмов по сравнению со стандартным алгоритмом Калмана.

Пример 1. Рассмотрим задачу оценивания параметров спутника, движущегося по круговой орбите [3, р. 1448]. Модель движения описывается разностными уравнениями

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,606 \end{bmatrix} x_k + w_k, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix}, \quad q = 0,63 \cdot 10^{-2} \quad (8)$$

с начальными условиями $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \Pi_0)$, $\Pi_0 = I_4$.

Чтобы показать отличие в вычислительных свойствах алгоритмов дискретной фильтрации, рассмотрим плохо обусловленную схему измерений [23, р. 205]:

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 + \delta \end{bmatrix} x_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, R),$$

где $R = \delta^2 I_2$. Для моделирования ситуации появления ошибок машинного округления предположим, что $\delta^2 < \varepsilon_{\text{окр}}$, но $\delta > \varepsilon_{\text{окр}}$, где $\varepsilon_{\text{окр}}$ – параметр машинного округления.

Для иллюстрации потери точности вычислений стандартным фильтром Калмана в условиях примера 1, приведем здесь результаты сравнительного исследования, проведенного авторами данной статьи и представленного в недавней работе [36].

Вычислительные эксперименты выполнены в системе MATLAB, обеспечивающим представление вещественных чисел с погрешностью 10^{-16} . Параметр машинного округления $\varepsilon_{\text{окр}}$ хранится в переменной `eps`, со значением $\varepsilon_{\text{окр}} = \text{eps}/2 = 1,1102 \cdot 10^{-16}$. Мы провели серию вычислительных экспериментов для различных значений параметра δ таких, что $\delta \rightarrow \varepsilon_{\text{окр}}$. Методика проведения экспериментов следующая. Начиная с начального значения, для $k = 1, \dots, K = 100$ мы провели компьютерное моделирование «истинной» траектории движения объекта в соответствии с (8). В результате были получены наборы значений вектора состояния x_k^{exact} и соответствующих измерений z_k , $k = 1, \dots, K$. Далее, для сравнения различных алгоритмов, с помощью `m`-функций на языке MATLAB мы посчитали значения оценок $\hat{x}_{k|k}$, $k = 1, \dots, K$ вектора состояния системы. Для всех рассмотренных алгоритмов фильтрации условия проведения эксперимента были одинаковыми.

В целом, мы провели серию из $M = 500$ экспериментов. При каждом запуске вычислялась «истинная» траектория движения объекта, x_k^{exact} , $k = 1, \dots, K$, моделировались соответствующие измерения z_k , $k = 1, \dots, K$ и вычислялись значения оценок вектора состояния $\hat{x}_{k|k}$, $k = 1, \dots, K$. По результатам экспериментов для каждого компонента вектора состояния мы вычислили среднеквадратичную ошибку (RMSE) по формуле:

$$\text{RMSE}_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{MK} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K \left(x_{i,k}^{j,\text{exact}} - \hat{x}_{i,k|k}^j \right)^2}, \quad (9)$$

где $M = 500$ – число запусков экспериментов, $K = 100$ – число измерений, $x_{i,k}^{j,\text{exact}}$ и $\hat{x}_{i,k|k}^j$ – i -й компонент «истинного» (модельного) вектора состояния и его оценки, полученной при проведении j -го эксперимента. Результаты экспериментов представлены на рис. 5.

По рис. 5 видно, что стандартный алгоритм Калмана (СКФ) быстро теряет точность вычислений при $\delta \rightarrow \varepsilon_{\text{окр}}$. При $\delta = 10^{-7}$ и далее, стандартный метод уже не пригоден для вычислений, поскольку $\|\text{RMSE}_{x_i}\|_2 = \text{NaN}$, т.е. из-за ошибок машинного округления невозможно получить результат (для наглядности мы отобразили значения NaN на верхней границе графика). Напротив, ортогонализированным алгоритмам удастся поддерживать приемлемую точность вычислений вплоть до значения $\delta = 10^{-14}$. Подробный сравнительный анализ рассмотренных алгоритмов см. в [36].

Таким образом, в примере 1 показано, что современные ортогонализированные алгоритмы являются наименее чувствительными к ошибкам машинного округления, и следовательно, наиболее надежными алгоритмами оптимального линейного оценивания.

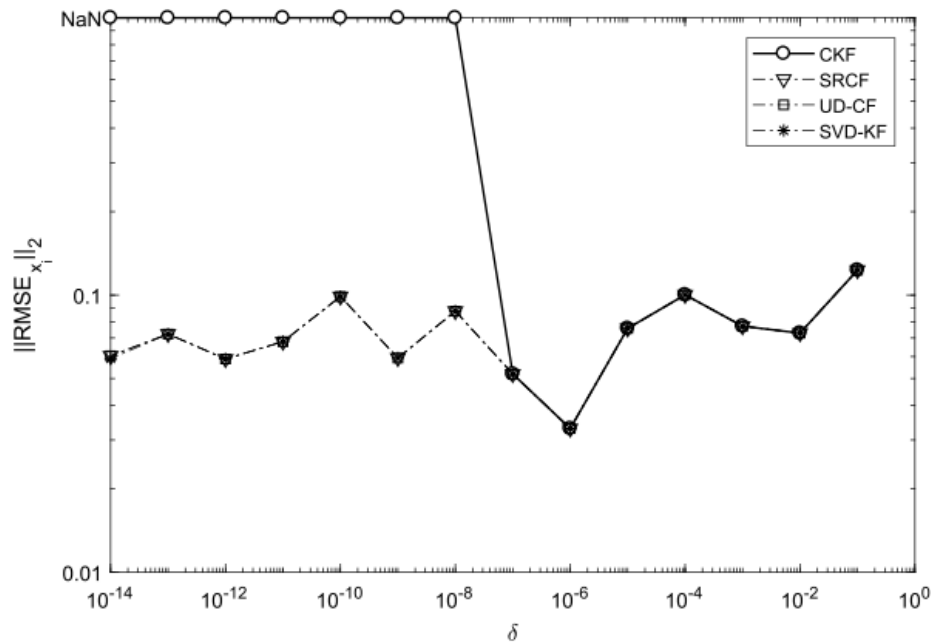


Рис. 5. Норма вектора абсолютных ошибок $\|RMSE_{x_i}\|_2$ (Пример 1)

Заключение

В настоящее время вычислительные методы оптимального оценивания стали самостоятельной областью исследования и получили большое развитие. Современные численно эффективные ортогонализированные алгоритмы привлекательны не только своей устойчивостью к ошибкам машинного округления. Важным качеством, которое отмечается в научной литературе, является приспособленность алгоритмов, использующих различные типы матричных ортогональных преобразований, к программной реализации на параллельных или векторных вычислительных системах, что позволяет разрабатывать новые эффективные информационные технологии, в частности, при решении задач реального времени и при обработке больших данных.

Любая ортогонализированная реализация дискретного фильтра Калмана (как в стандартной, так и в быстрой форме) предполагает использование ортогональных преобразований на каждом шаге алгоритма. Метод ортогонализации и, следовательно, матрицы ортогонального преобразования допускают определенный произвол, т. е. для реализации того или иного алгоритма можно использовать любые ортогональные преобразования, приводящие к желаемому виду блочной матрицы. Следовательно, вычислительная сложность и численная эффективность ортогонализированных алгоритмов определяется в основном сложностью и вычислительными свойствами применяемых методов ортогонализации.

В данной статье дан краткий обзор существующих классов современных ортогонализированных алгоритмов оптимальной дискретной фильтрации. Предложенная классификация алгоритмов по типам матричных ортогональных преобразований позволяет легче понять метод их построения и выбрать способ эффективной программной реализации при решении практических задач оценивания в классе многомерных дискретных линейных стохастических систем.

Все рассмотренные алгоритмы являются алгебраически эквивалентными стандартным реализациям дискретного фильтра Калмана, но существенно превосходят его по своим вычислительным свойствам. Поэтому применение ортогонализированных алгоритмов при решении практических задач позволяет получить численно эффективные и надежные решения.

М.В. Куликова благодарит португальский Фонд науки и технологии (Fundação para a Ciência e a Tecnologia) за оказанную финансовую поддержку в рамках проекта UID/Multi/04621/2013.

Литература

1. Kalman, R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems / R.E. Kalman // Journal of Basic Engineering. – 1960. – V. 82, № 1. – P. 35–45.
2. Potter, J.E. Statistical Filtering of Space Navigation Measurements / J.E. Potter, R.G. Stern // Proceedings 1963 AIAA Guidance and Control Conference. – 1963. – 13 p.
3. Rauch, H.E. Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems / H.E. Rauch, C.T. Striebel, F. Tung // AIAA journal. – 1965. – V. 3, № 8. – P. 1445–1450.
4. Dyer, P. Extension of Square-Root Filtering to Include Process Noise / P. Dyer, S. McReynolds // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1969. – № 3. – P. 444–459.
5. Schmidt, S.F. Computational Techniques in Kalman Filtering / S.F. Schmidt // Theory and Applications of Kalman Filtering. NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARDograph 139. – 1970.
6. Kaminski, P.G. Discrete Square-Root Filtering: A Survey of Current Techniques / P.G. Kaminski, A.E. Bryson, S.F. Schmidt // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1971. – V. 16, № 6. – P. 727–735.
7. Kaminski, P.G. Square Root Filtering and Smoothing for Discrete Processes. Ph.D. Thesis / P.G. Kaminski. – Stanford University, 1971.
8. Kailath, T. Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant Linear System / T. Kailath // IEEE Transactions on Information Theory. – 1973. – V. 19, № 11. – P. 750–760.
9. Morf, M. Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant, Linear Discrete-Time Systems / M. Morf, G.S. Sidhu, T. Kailath // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – V. 19, № 4. – P. 315–323.
10. Morf, M. Square-Root Algorithms for Least-Squares Estimation / M. Morf, T. Kailath // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1975. – V. 20, № 4. – P. 487–497.
11. Thornton, C.L. Numerical Comparison of Discrete Kalman Filtering Algorithms: an Orbit Determination Case Study / C.L. Thornton, G.J. Bierman // JPL Technical Memorandum 33-771. – Pasadena, 1976. – 48 p.
12. Thornton, C.L. Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering. Ph.D. Thesis / C.L. Thornton. – University of California at Los Angeles, 1976.
13. Bierman, G.J. Factorization Methods For Discrete Sequential Estimation / G.J. Bierman. – New York: Academic Press, 1977.
14. Фомин, В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация / В.Н. Фомин. – М.: Наука, 1984.

15. Verhaegen, M. Numerical Aspects of Different Kalman Filter Implementations / M. Verhaegen, P. Van Dooren // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1986. – V. 31, № 10. – P. 907–917.
16. Jover, J.M. A Parallel Architecture for Kalman Filter Measurement Update and Parameter Estimation / J.M. Jover, T. Kailath // *Automatica*. – 1986. – V. 22, № 1. – P. 43–57.
17. Огарков, М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов / М.А. Огарков. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
18. Wang, L. Kalman Filter Algorithm Based on Singular Value Decomposition / L. Wang, G. Libert, P. Manneback // *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, 1992*. – P. 1224–1229.
19. Sayed, A.H. Extended Chandrasekhar Recursions / A.H. Sayed, T. Kailath // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1994. – V. 9, № 3. – P. 619–622.
20. Park, P. New Square-Root Algorithms for Kalman Filtering / P. Park, T. Kailath // *IEEE Transactions on Automatic Control* – 1995. – V. 40, № 5. – P. 895–899.
21. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М.: Мир, 1999.
22. Kailath, T. *Linear Estimation* / T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi. – New Jersey: Prentice Hall, 2000.
23. Grewal, M.S. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB* / M.S. Grewal, A.P. Andrews. – New Jersey: Prentice Hall, 2001.
24. Higham, N.J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* / N.J. Higham. – Philadelphia: SIAM, 2002.
25. Higham, N.J. J-Orthogonal Matrices: Properties and Generalization / N.J. Higham // *SIAM Review*. – 2003. – V. 45, № 3. – P. 504–519.
26. Zhou, B.A. UD Factorization-Based Nonlinear Adaptive Set-Membership Filter for Ellipsoidal Estimation / B. Zhou, J. Han, G. Liu // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. – 2008. – V. 18. – P. 1513–1531.
27. Daowang, F. Square-Root Second-Order Extended Kalman Filter and its Application in Target Motion Analysis / F. Daowang, L. Teng, H.Z. Tao // *Radar, Sonar and Navigation*. – 2010. – V. 4, № 3. – P. 329–335.
28. Gibbs, B.P. *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook* / B.P. Gibbs. – Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons, 2011.
29. Семушин, И.В. Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: коллективная монография / И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова, М.В. Куликова и др. – Ульяновск: УлГУ, 2011.
30. Семушин, И.В. Вычислительные методы алгебры и оценивания / И.В. Семушин. – Ульяновск: УлГТУ, 2011.
31. Семушин, И.В. Устойчивые алгоритмы фильтрации – обзор и новые результаты для систем судовождения / И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова, К.В. Захаров // *Информационные технологии и вычислительные системы*. – 2013. – № 4. – С. 90–112.
32. Kulikova, M.V. Stochastic Volatility Models for Exchange Rates and Their Estimation Using Quasi-Maximum-Likelihood Methods: an Application to the South African Rand / M.V. Kulikova, D.R. Taylor // *Journal of Applied Statistics*. – 2013. – V. 40, № 3. – P. 495–507.
33. Kulikova, M.V. Adaptive Wave Filtering for Marine Vessels within UD-Based Algorithms / M.V. Kulikova, J.V. Tsyganova, I.V. Semushin // *Proceedings of the ECC2016, European Control Conference*. – Aalborg, 2016. – P. 807–812.

34. Цыганова, Ю.В. О методах реализации UD-фильтра / Ю.В. Цыганова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3. – Р. 84–104.
35. Semushin, I.V. Numerically Efficient UD Filter Based Channel Estimation for OFDM Wireless Communication Technology / I.V. Semushin, Yu.V. Tsyganova, A.V. Tsyganov, E.F. Prokhorova // Procedia Engineering. – 2017. – V. 201. – P. 726–735.
36. Kulikova, M.V. Improved Discrete-Time Kalman Filtering within Singular Value Decomposition / M.V. Kulikova, J.V. Tsyganova // IET Control Theory and Applications. – 2017. – V. 11, № 5. – P. 2412–2418.
37. Цыганова, Ю.В. Ортогонализированные блочные методы для параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Ю.В. Цыганова. – Ульяновск, 2017.
38. Semushin, I.V. Numerically Efficient LD-computations for the Auxiliary Performance Index Based Control Optimization under Uncertainties / I.V. Semushin, J.V. Tsyganova, A.V. Tsyganov // Proceedings of the 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018. – Yekaterinburg, 2018. – V. 51. – P. 568–573.
39. D'Souza, Ch. Information Formulation of the UDU Kalman Filter / Ch. D'Souza, R. Zanetti // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 2018.

Юлия Владимировна Цыганова, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Информационные технологии», Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Российская Федерация), tsyganovajv@gmail.com.

Мария Вячеславовна Куликова, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, СЕМАТ, Высший технический институт, Университет Лиссабона (г. Лиссабон, Португалия), maria.kulikova@ist.utl.pt.

Поступила в редакцию 17 августа 2018 г.

MSC 93A30, 93E10

DOI: 10.14529/mmp180401

ON MODERN ARRAY ALGORITHMS FOR OPTIMAL DISCRETE FILTERING

Yu. V. Tsyganova¹, M. V. Kulikova²

¹Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russian Federation

²Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal

E-mails: tsyganovajv@gmail.com, maria.kulikova@ist.utl.pt

Nowadays, computational methods for optimal estimation have become an independent field of research and have received a great progress. Modern numerically efficient array algorithms are attractive not only because of their robustness to machine round-off errors, but additionally because of utilization various types of matrix orthogonal transformations. Thus, their design pattern is well suited for parallel implementations on modern computing systems. These properties allow to develop new efficient information technologies, in particular, the techniques that are applicable for solving real-time problems as well as for processing big data arrays. This paper gives a brief survey of modern array algorithms for optimal linear discrete-time filtering. Four large classes of array algorithms are considered:

square-root array algorithms, array algorithms based on weighted orthogonalization, J -orthogonal array algorithms and methods based on singular value decomposition. We suggest a classification of array algorithms according to the type of the utilized matrix orthogonal transformation on the basis of which these algorithms are designed. Such classification suggests a more simple way for understanding the array filtering methods' design and gives a choice for finding their most effective implementation for estimating multivariable discrete-time linear stochastic systems. The computational aspects of array algorithms are investigated. It includes the numerical stability to machine round-off errors, and discussion of efficient software implementation for the array algorithms under examination. Finally, the array algorithms investigated in this paper are algebraically equivalent to the conventional implementation of the discrete-time Kalman filter, but they possess the significantly improved computational properties. The results of the presented comparative study allow to conclude that the use of array algorithms in solving practical problems helps to obtain numerically efficient and reliable solutions.

Keywords: discrete filtering; linear stochastic systems; Kalman filter; matrix orthogonal transforms; array algorithms.

References

1. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 1960, vol. 82, no. 1, pp. 35–45. DOI: 10.1115/1.3662552
2. Potter J.E., Stern R.G. Statistical Filtering of Space Navigation Measurements. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Cambridge, 1963, 13 p. DOI: 10.2514/6.1963-333
3. Rauch H.E., Striebel C.T., Tung F. Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems. *AIAA journal*, 1965, vol. 3, no. 8, pp. 1445–1450. DOI: 10.2514/3.3166
4. Dyer P., McReynolds S. Extension of Square-Root Filtering to Include Process Noise. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1969, no. 3, pp. 444–459. DOI: 10.1007/BF00929358
5. Schmidt S.F. Computational Techniques in Kalman Filtering Theory and Applications of Kalman Filtering. *NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development*, 1970.
6. Kaminski P.G., Bryson A.E., Schmidt S.F. Discrete Square-Root Filtering: A Survey of Current Techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, no. 6, pp. 727–735. DOI: 10.1109/TAC.1971.1099816
7. Kaminski P.G. *Square Root Filtering and Smoothing for Discrete Processes*. Ph.D. Thesis, Stanford University, 1971.
8. Kailath T. Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant Linear System. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1973, vol. 19, no. 11, pp. 750–760. DOI: 10.1109/TIT.1973.1055104
9. Morf M., Sidhu G.S., Kailath T. Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant Linear Discrete-Time Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, no. 4, pp. 315–323. DOI: 10.1109/TAC.1974.1100576
10. Morf M., Kailath T. Square-Root Algorithms for Least-Squares Estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, vol. 20, no. 4, pp. 487–497. DOI: 10.1109/TAC.1975.1100994
11. Thornton C.L., Bierman G.J. Numerical Comparison of Discrete Kalman Filtering Algorithms: an Orbit Determination Case Study. *JPL Technical Memorandum 33-771*, 1976, 48 p.
12. Thornton C.L. *Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering*. Ph.D. Thesis, University of California at Los Angeles, 1976.

13. Bierman G.J. *Factorization Methods For Discrete Sequential Estimation*. N.Y., Academic Press, 1977.
14. Fomin V.N. *Rekurrentnoe otsenivanie i adaptivnaya fil'tratsiya* [Recurrent Estimation and Adaptive Filtering]. Moscow, Nauka, 1984. (in Russian)
15. Verhaegen M., Van Dooren P. Numerical Aspects of Different Kalman Filter Implementations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, no. 10, pp. 907–917. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104128
16. Jover J.M., Kailath T. A Parallel Architecture for Kalman Filter Measurement Update and Parameter Estimation. *Automatica*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 43–57. DOI: 10.1016/0005-1098(86)90104-4
17. Ogarkov M.A. *Metody statisticheskogo otsenivaniya parametrov sluchajnykh protsessov* [Methods of Statistical Estimation of Parameters of Random Processes]. Moscow, Energoatomizdat, 1990. (in Russian)
18. Wang L., Libert G., Manneback P. Kalman Filter Algorithm Based on Singular Value Decomposition. *Proceedings on the IEEE Conference on Decision and Control*, 1992, pp. 1224–1229. DOI: 10.1109/CDC.1992.371522
19. Sayed A.H., Kailath T. Extended Chandrasekhar Recursions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, vol. 9, no. 3, pp. 619–622. DOI: 10.1109/9.280773
20. Park P., Kailath T. New Square-Root Algorithms for Kalman Filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, vol. 40, no. 5, pp. 895–899. DOI: 10.1109/9.384225
21. Golub G., Van Loan Ch. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996.
22. Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. *Linear Estimation*. New Jersey, Prentice Hall, 2000.
23. Grewal M.S., Andrews A.P. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. New Jersey, Prentice Hall, 2001.
24. Higham N.J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. Philadelphia, SIAM, 2002.
25. Higham N.J. J-Orthogonal Matrices: Properties and Generalization. *SIAM Review*, 2003, vol. 45, no. 3, pp. 504–519. DOI: 10.1137/S0036144502414930
26. Zhou B., Han J., Liu G. A UD Factorization-Based Nonlinear Adaptive Set-Membership Filter for Ellipsoidal Estimation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, vol. 18, pp. 1513–1531. DOI: 10.1002/rnc.1289
27. Daowang F., Teng L., Tao H.Z. Square-Root Second-Order Extended Kalman Filter and Its Application in Target Motion Analysis. *Radar, Sonar and Navigation*, 2010, vol. 4, no. 3, pp. 329–335. DOI: 10.1049/iet-rsn.2008.0070
28. Gibbs B.P. *Advanced Kalman Filtering. Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook*. Hoboken, New Jersey, John Wiley and Sons, 2011.
29. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Kulikova M.V. et al. *Adaptivnye sistemy fil'tracii, upravleniya i obnaruzheniya* [Adaptive Systems of Filtering, Control and Detection]. Ulyanovsk, UIGU, 2011. (in Russian)
30. Semushin I.V. *Vychislitel'nye metody algebrы i otsenivaniya. Uchebnoe posobie* [Computational Methods of Algebra and Estimation]. Ulyanovsk, UISTU Publishers, 2011. (in Russian)
31. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Zakharov K.V. [Robust Filter Algorithms – Survey and New Results for Ship Navigation]. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy*, 2013, no. 4, pp. 90–112. (in Russian)

32. Kulikova M.V., Taylor D.R. Stochastic Volatility Models for Exchange Rates and Their Estimation Using Quasi-Maximum-Likelihood Methods: an Application to the South African Rand. *Journal of Applied Statistics*, 2013, vol. 40, no. 3, pp. 495–507. DOI: 10.1080/02664763.2012.740791
33. Kulikova M.V., Tsyganova J.V., Semushin I.V. Adaptive Wave Filtering for Marine Vessels within UD-Based Algorithms. *Proceedings of the ECC2016, European Control Conference*, Aalborg, 2016, pp. 807–812. DOI: 10.1109/ECC.2016.7810388
34. Tsyganova Yu.V. [On the UD Filter Implementation Methods]. *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, 2013, no. 3, pp. 84–104. (in Russian)
35. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V., Prokhorova E.F. Numerically Efficient UD Filter Based Channel Estimation for OFDM Wireless Communication Technology. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 201, pp. 726–735. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.597
36. Kulikova M.V., Tsyganova J.V. Improved Discrete-Time Kalman Filtering within Singular Value Decomposition. *IET Control Theory and Applications*, 2017, vol. 11, no. 5, pp. 2412–2418. DOI: 10.1049/iet-cta.2016.1282
37. Tsyganova Yu.V. *Orthogonalized Block Methods for Parameter Identification of Discrete Linear Stochastic Systems: D.Sc. Thesis*. Ulyanovsk, Ulyanovsk State University at Ulyanovsk, 2017.
38. Semushin I.V., Tsyganova J.V., Tsyganov A.V. Numerically Efficient LD-computations for the Auxiliary Performance Index Based Control Optimization under Uncertainties. *Proceedings of the 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018*, Yekaterinburg, 2018, vol. 51, pp. 568–573.
39. D'Souza Ch., Zanetti R. Information Formulation of the UDU Kalman Filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018. DOI: 10.1109/TAES.2018.2850379

Received August 17, 2018