

СТАЦИОНАРНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

А.М. Блохин^{1,2}, Р.Е. Семенко^{1,2}

¹Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

В работе исследуется задача о магнитогидродинамическом течении несжимаемой проводящей полимерной жидкости в плоском канале, помещенном в магнитное поле. По стенкам канала пропущен электрический ток проводимости, а на самих стенках поддерживается разная температура. За основу математической модели магнитной гидродинамики жидких полимеров, рассмотренной в работе, берется обобщенная реологическая модель Покровского – Виноградова с привлеченными к ней уравнениями Максвелла. Для полученной краевой задачи изучаются стационарные решения специального вида, являющиеся аналогами известных вязких течений Пуазейля и Куэтта. Задача для таких решений сводится к краевой задаче для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Эту задачу мы преобразуем в систему интегральных уравнений, решения которой находим методом простой итерации. Проводится анализ решений для различных параметров задачи, и изучается характер влияния этих параметров на режим течения. Результаты работы демонстрируют возможность контроля за течением жидкого полимера в плоском канале при помощи внешнего магнитного поля и неравномерного нагрева.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика; вязкоупругость; полимерная жидкость; стационарное решение.

*Посвящается В.Ф. Чистякову
в связи с его семидесятилетием.*

Введение

Растворы и расплавы полимеров являются сложными текучими системами, состоящими из длинных перепутанных макромолекул. Такая молекулярная структура является причиной определенных трудностей в построении математических моделей жидких полимеров. Стремление отразить молекулярный характер жидкости привело к серии моделей, полученных методами статистической физики, то есть путем усреднения вероятностных законов взаимного движения молекул различной формы. Среди них стоит отметить модели рептаций [1, 2], описывающие динамику макромолекулы, как возвратно-поступательное ее движение внутри трубки случайной формы, образованной соседними молекулами; модель Кертисса – Берда [3], не использующую понятие трубки, но предполагающую сохранение общей ориентации молекул по времени в усредненном смысле; модель Ром-Ром [4, 5], сфокусированную на моделировании полимерных жидкостей, макромолекулы которых имеют разветвленную форму, и

другие. По понятным причинам, такие модели математически довольно сложны, что затрудняет их применение к реальным задачам гидродинамики жидких полимеров. Помимо такого микроструктурного подхода, широко применяется феноменологический подход к построению моделей полимеров, в значительной мере игнорирующий реальную молекулярную структуру вещества и заменяющий ее определенными макроскопическими соотношениями, сформулированными на основе эмпирических данных [6, 7]. Такой подход позволяет получить более простые модели, но при нем трудно отразить микрохарактеристики конкретных полимеров, а значит и правильно сформулировать задачи о течениях реальных полимерных жидкостей. Очевидно, что ни один из этих подходов нельзя считать единственно верным, и что для конкретных задач лучше будут себя проявлять разные модели.

Попытка в определенном смысле объединить оба подхода предпринимается в мезоскопических моделях. Так, в данной работе будут приведены уравнения, полученные на основе обобщенной реологической модели Покровского – Виноградова [8, 9]. Идея этой модели заключается в том, что динамика полимерной жидкости сводится к закону движения одной макромолекулы в некоторой анизотропной жидкости, являющейся усредненным аналогом соседних молекул полимера. Таким образом, с одной стороны используется стохастическое уравнение типа уравнения Ланжевена для динамики молекулы, подобно известной статистической модели Рауза [2], но с другой используются феноменологические приемы для моделирования анизотропного взаимодействия этой молекулы с соседними, для чего в модель вводится макроскопический тензор анизотропии. Теоретически такой подход позволяет получить более точные результаты, чем феноменологический подход, но при этом удается сохранить относительную простоту используемых математических соотношений. Однако данная модель является сравнительно новой, и пока она недостаточно изучена с математической точки зрения. Для более глубокого изучения ее свойств необходимо рассмотреть поведение модели для различных типов течений полимерных жидкостей.

Нужно отметить, что задачи о течениях жидких полимеров в каналах различной формы вызывают значительный интерес в настоящее время в связи с широким применением полимерных материалов в самых разных областях промышленности. В частности, точный контроль за потоком полимера необходим для производства полимеров и для быстро набирающей популярность технологии 3D печати. Такой контроль может осуществляться при помощи формы канала с неподвижными и подвижными стенками, неравномерного нагрева полимера, электромагнитных полей, воздействующих на проводящую жидкость, и многими другими. Магнитная гидродинамика полимерной жидкости также интересна, как возможная основа для магнитогидродинамических генераторов. Существует ряд моделей, посвященных магнитогидродинамическому движению жидких полимеров (например, [10, 11]), однако в модели Покровского – Виноградова магнитная гидродинамика пока подробно не исследовалась.

Целью настоящей работы является изучения двумерного неизотермического движения проводящей полимерной жидкости в плоском канале, ограниченном электродами с пропущенными по ним токами проводимости. Для этого приводится магнитогидродинамическая модель жидких полимеров, формулируется краевая задача для стационарных течений. Приводятся примеры стационарных течений, найденные численно для различных значений параметров задачи.

1. Предварительные сведения. Модель магнитогидродинамики полимерной жидкости

Следуя монографиям [9, 12–15] и работе [16], сформулируем математическую модель, которая описывает магнитогидродинамические течения несжимаемой полимерной жидкости. Ниже мы рассмотрим вариант вышеупомянутой математической модели, в котором в уравнении, описывающем изменение внутренней энтропии (уравнение притока тепла) несжимаемой полимерной жидкости, диссипативные слагаемые введены по аналогии с работой [17]. В обезразмеренном виде этот вариант запишется так (далее мы будем придерживаться обозначений, принятых в [16]):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = u_x + v_y = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = L_x + M_y = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla P = \operatorname{div}(Z\Pi) + \sigma_m(\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{H} + \operatorname{Ga}(Z - 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1u_x - 2a_{12}u_y + \mathcal{L}_{11} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2A_2v_y - 2a_{12}v_x + \mathcal{L}_{22} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{da_{12}}{dt} - A_1v_x - A_2u_y + \frac{\tilde{K}_I a_{12}}{\bar{\tau}_0(Z)} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \Delta_{x,y} Z + \frac{A_r}{\operatorname{Pr}} Z D + \frac{A_m}{\operatorname{Pr}} \sigma_m D_m, \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} - (\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{u} - b_m \Delta_{x,y} \mathbf{H} = 0. \quad (8)$$

Здесь t – время, $u, v, L, (1 + M)$ – компоненты вектора скорости \mathbf{u} и вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} в декартовой системе координат x, y ; $P = p + \sigma_m(L^2 + (1 + M)^2)/2$, p – давление, a_{11}, a_{22}, a_{12} – компоненты симметрического тензора анизотропии второго ранга; $\Pi = \{a_{ij}\}/\operatorname{Re}$, $i, j = 1, 2$;

$$\mathcal{L}_{ii} = \frac{K_I a_{ii} + \beta(a_{ii}^2 + a_{12}^2)}{\bar{\tau}_0(Z)}, \quad i = 1, 2;$$

$K_I = W^{-1} + \bar{k}I/3$, $\bar{k} = k - \beta$, $I = a_{11} + a_{22}$ – первый инвариант тензора анизотропии, k, β ($0 < \beta < 1$) – феноменологические параметры реологической модели [9], $A_i = W^{-1} + a_{ii}$, $i = 1, 2$; $Z = T/T_0$, T – температура, T_0 – комнатная температура (далее будем полагать $T_0 = 300^\circ\text{K}$), $\tilde{K}_I = K_I + \beta I$, $\bar{\tau}_0(Z) = 1/(ZJ(Z))$, $J(Z) = \exp(\bar{E}_A(Z - 1)/Z)$, $\bar{E}_A = E_A/T_0$, E_A – энергия активации, $\operatorname{Re} = (\rho u_H l)/\eta_0^*$ – число Рейнольдса, $W = (\tau_0^* u_H)/l$ – число Вайсенберга, $\operatorname{Ga} = \operatorname{Ra}/\operatorname{Pr}$ – число Грасгофа, $\operatorname{Pr} = l u_H \rho c_v / \kappa = c_v \eta_0^* \operatorname{Re} / \kappa$ – число Прандтля, $\operatorname{Ra} = l b g T_0 \operatorname{Pr} / u_H^2$ – число Рэлея,

$$A_r = \frac{\alpha u_H^2 \operatorname{Pr}}{\operatorname{Re} T_0 c_v} = \frac{\alpha u_H^2 \eta_0^*}{T_0 \kappa}, \quad A_m = \frac{\alpha_m u_H^2 \operatorname{Pr}}{T_0 c_v},$$

$D = a_{11}u_x + (v_x + u_y)a_{12} + a_{22}v_y$, $D_m = L^2u_x + L(1 + M)(v_x + u_y) + (1 + M)^2v_y$, $\rho = \operatorname{const}$ – плотность среды, κ – коэффициент теплопроводности полимерной жидкости, b – коэффициент теплового расширения полимерной жидкости, g – величина ускорения

свободного падения, η_0^*, τ_0^* – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации при комнатной температуре T_0 [9,16]; l – характерная длина, u_H – характерная скорость, $\sigma_m = (\mu\mu_0 H_0^2)/(\rho u_H^2)$ – коэффициент магнитного давления, $b_m = 1/\text{Re}_m$, $\text{Re}_m = \sigma\mu\mu_0 u_H l$ – магнитное число Рейнольдса, μ_0 – магнитная проницаемость в вакууме, μ – магнитная проницаемость полимерной жидкости, σ – электропроводность среды, α – термический эквивалент работы [18], α_m – магнетотермический эквивалент работы, c_v – теплоемкость,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Delta_{x,y} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{оператор Лапласа.} \end{aligned} \quad (9)$$

Переменные $t, x, y, u, v, p, a_{11}, a_{22}, a_{12}, L, M$ в системе и (1) – (8) отнесены к характерным величинам $l/u_H, l, u_H, \rho u_H, \rho u_H^2, W/3, H_0$ соответственно, где H_0 – характерная величина напряженности магнитного поля (рис. 1).

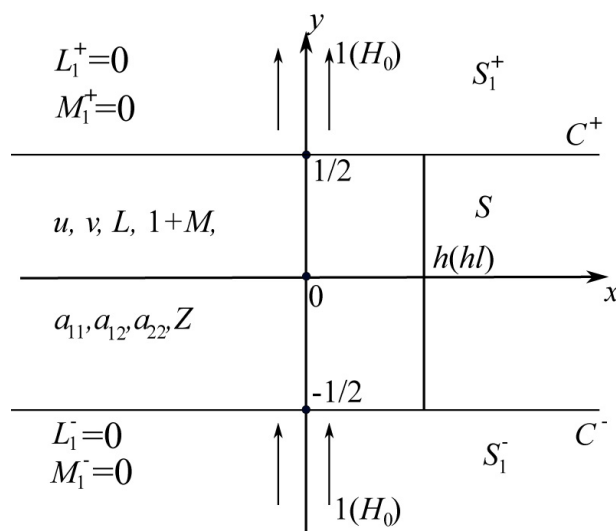


Рис. 1. Плоский канал

Замечание 1. Магнитогидродинамические уравнения (1) – (8) выведены с привлечением системы уравнений Максвелла [12,14], причем вектор магнитной индукции \mathbf{B} берется в виде

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} = (1 + \chi)\mu_0 \mathbf{H}, \quad (10)$$

где χ – магнитная восприимчивость, при этом [19, 20] $\chi = \chi_0/Z$, χ_0 – магнитная восприимчивость при комнатной температуре $T_0 = 300^\circ\text{K}$. Далее мы будем полагать, что для полимерной жидкости $\mu \equiv 1$ ($\chi_0 = 0$).

Замечание 2. В качестве основной проблемы мы будем рассматривать задачу о нахождении решений математической модели (1) – (8), описывающих магнитогидродинамическое течение несжимаемой полимерной жидкости в плоском канале толщиной $1(l)$, ограниченной горизонтальными стенками – электродами C^+ и C^- , вдоль которых пропущены электрические токи проводимости с силой тока J^+ и J^- соответственно (рис. 1). Канал помещен в однородное внешнее магнитное поле $L = 0, M = 0$, т.е. $1 + M = 1(H_0)$ (рис. 1).

Внешние по отношению к каналу области S_1^+ , S_1^- – тоже магнетики с магнитными восприимчивостями χ_1^+ , χ_1^- . На стенках канала выполнены граничные условия:

$$\begin{cases} y = \pm 1/2 : \mathbf{u} = 0 \text{ (условие прилипания),} \\ y = 1/2 : Z = 1 \text{ т.е. } T = T_0 \text{ в области } S_1^+ \text{ и на электроде } C^+, \\ y = -1/2 : Z = 1 + \bar{\theta}, \bar{\theta} = \theta/T_0, \theta = T - T_0, \text{ т.е. при } \bar{\theta} > 0 \\ \text{будет нагрев снизу (} T \text{ – температура в области } S_1^- \text{ и на электроде} \\ C^-), \text{ при } \bar{\theta} < 0 \text{ – нагрев сверху.} \end{cases} \quad (11)$$

В силу (11) и (10):

$$\chi_1^+ = \chi_0^+, \chi_1^- = \chi_0^- / (1 + \bar{\theta}).$$

Замечание 3. Далее мы будем полагать соотношение $k = 1, 2\beta$, как наилучшим образом соответствующие экспериментальным данным [9].

Замечание 4. Границы C^+ и C^- – это границы раздела двух однородных изотропных магнетиков. Следовательно, на границах C^+ и C^- выполняются следующие краевые условия [19, 21]:

$$\begin{cases} y = 1/2 (C^+) : L = -J^+, M = \chi_0^+, \\ y = -1/2 (C^-) : L = -J^-, M = \chi_0^- / (1 + \bar{\theta}). \end{cases} \quad (12)$$

Настоящая работа посвящена нахождению характерных режимов стационарного течения несжимаемой полимерной жидкости, близких по своим качественным свойствам к известному течению Пуазейля или Куэтта для системы уравнений Навье – Стокса [13, 18].

Замечание 5. Еще раз отметим, что в отличие от, например, работы [16], уравнение (7), описывающее изменение внутренней энергии (уравнение притока тепла), содержит диссипативные слагаемые, характеризующие поток тепла, возникающий при ненулевых градиентах скорости.

Замечание 6. Если верхняя стенка (электрод C^+) движется горизонтально с безразмерной скоростью, равной единице, то при

$$y = 1/2 : u = 1, v = 0. \quad (13)$$

Замечание 7. Отметим одну важную особенность математической модели (1) – (8). В отличие от математической модели из [16], для которой случай $\bar{\theta} = 0$ соответствует изотермическому варианту $Z \equiv 1$, $\bar{\tau}_0(Z) \equiv 1$, наличие диссипативных слагаемых в (7) приводит к тому, что неизотермичность имеет место и при $\bar{\theta} = 0$. Так и должно быть, поскольку приток тепла будет происходить за счет работы компонент тензора анизотропии a_{11} , a_{12} , a_{22} .

2. Магнитогидродинамические стационарные течения в плоском канале

Введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{U}(t, x, y) = (u, v, a_{11}, a_{12}, a_{22}, Z, L, M)^\top.$$

Будем искать у системы (1) – (8) частное решение следующего вида:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(t, x, y) = \hat{\mathbf{U}}(y), \\ p(t, x, y) = \hat{\mathcal{P}}(y) + \hat{p}_0 - \hat{A}x, \end{cases}$$

соответствующее стационарному течению несжимаемой полимерной жидкости в плоском бесконечном канале (рис. 1) под действием постоянного перепада давления вдоль оси канала $y = 0$. Здесь

$$\hat{\mathbf{U}}(y) = (\hat{u}(y), 0, \hat{a}_{11}(y), \hat{a}_{12}(y), \hat{a}_{22}(y), \hat{Z}(y), \hat{L}(y), \hat{M}(y))^T,$$

$\hat{\mathcal{P}}(y)$ – некоторая функция, подлежащая дальнейшему определению, $\hat{\mathcal{P}}(0) = 0$, \hat{p}_0 – значение давления на оси канала при $y = 0$, $x = 0$; $\hat{A} = \hat{\Delta}p/(\rho u_H^2 h)$, $(-\hat{\Delta}p/(\rho u_H^2 h))$ – безразмерный перепад давления а отрезке h , причем размерная величина $\hat{\Delta}p > 0$ (рис. 1).

Для определения функций $\hat{u}(y)$, $\hat{a}_{11}(y)$, $\hat{a}_{12}(y)$, $\hat{a}_{22}(y)$, $\hat{Z}(y)$, $\hat{L}(y)$, $\hat{M}(y)$, $\hat{\mathcal{P}}(y)$ из (1) – (8), (11), (12) получаем следующие соотношения:

$$\frac{d}{dy}(\hat{Z}\hat{a}_{12} + (1 + \hat{\lambda})\sigma_m \text{Re}\hat{L}) = (\hat{Z}\hat{a}_{12} + (1 + \hat{\lambda})\sigma_m \text{Re}\hat{L})' = -\hat{D}, \quad \hat{D} = \text{Re}\hat{A}, \quad (14)$$

$$\left(\hat{\mathcal{P}} + \sigma_m \frac{\hat{L}^2}{2} - \frac{\hat{Z}\hat{a}_{22}}{\text{Re}} \right)' = \text{Ga}(\hat{Z} - 1), \quad \hat{\mathcal{P}}(0) = 0, \quad (15)$$

$$\hat{u}' = \frac{\tilde{K}_f J(\hat{Z})\hat{Z}\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2}, \quad \hat{u}(1/2) = \hat{u}(-1/2) = 0, \quad \hat{I} = \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22}, \quad (16)$$

$$K_f \hat{a}_{22} + \beta(\hat{a}_{12}^2 + \hat{a}_{22}^2) = 0, \quad (17)$$

$$K_f \hat{a}_{11} + \beta(\hat{a}_{12}^2 + \hat{a}_{11}^2) - 2\hat{a}_{12}^2 \frac{\tilde{K}_f}{\hat{A}_2} = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}'' + (A_r \hat{Z}\hat{a}_{12} + A_m \sigma_m (1 + \hat{\lambda})\hat{L})\hat{u}' &= 0, \\ \hat{Z}(1/2) = 1, \quad \hat{Z}(-1/2) &= 1 + \bar{\theta}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$b_m \hat{L}'' + (1 + \hat{\lambda})\hat{u}' = 0, \quad \hat{L}(\pm 1/2) = -J^\pm, \quad (20)$$

$$\hat{M}'' = 0, \quad \hat{M}' = 0, \quad \text{т.е. } \hat{M} = \hat{\lambda} = \chi_0^+ = \frac{\chi_0^-}{1 + \bar{\theta}} = \text{const} \quad (12). \quad (21)$$

Из (14) следует:

$$\hat{Z}(y)\hat{a}_{12}(y) = R(y, \bar{C}), \quad (22)$$

где

$$R(y, \bar{C}) = -(1 + \hat{\lambda})\text{Re}\sigma_m(\hat{L}(y, \bar{C}) + J^+) + \hat{D}\left(\frac{1}{2} - y\right) + \bar{C} = R_1(y, \bar{C}) + \bar{C}.$$

Здесь $\bar{C} (= \hat{a}_{12}(1/2))$ – постоянная, подлежащая дальнейшему определению.

Замечание 8. Заметим, что в (22) можно взять $\hat{D} = 1$ за счет выбора характерного параметра $u_H = l\hat{\Delta}p/(h\eta_0^*)$.

Полагая $\hat{Z}(y, \bar{C}) = \hat{Q}(y, \bar{C}) + 1 + \bar{\theta}(1/2 - y)$, сведем задачу (19) к такой:

$$\hat{Q}'' + \hat{q}(y, \bar{C})R(y, \bar{C})\mathcal{F}(y, \bar{C}) = 0, \quad \hat{Q}(\pm 1/2) = 0. \quad (23)$$

Здесь $\hat{q}(y, \bar{C}) = A_r R(y, \bar{C}) + A_m \sigma_m (1 + \hat{\lambda}) \hat{L}(y, \bar{C})$, $\mathcal{F}(y, \bar{C}) = (\tilde{K}_{\hat{I}} J(\hat{Z}))/\hat{A}_2$.

Рассмотрим теперь уравнения (17), (18). Вычтем из (18) соотношение (17). В итоге получим

$$\tilde{K}_{\hat{I}}(\hat{a}_{11} - \hat{a}_{22} - \frac{2\hat{a}_{12}^2}{\hat{A}_2}) = 0,$$

т.е. при $\tilde{K}_{\hat{I}} \neq 0$ имеем

$$\hat{a}_{11} = \hat{a}_{22} + \frac{2\hat{a}_{12}^2}{\hat{A}_2}, \quad \hat{I} = 2 \left(\hat{a}_{22} + \frac{\hat{a}_{12}^2}{\hat{A}_2} \right). \quad (24)$$

С учетом (24), из (17) получаем кубическое уравнение для \hat{a}_{22} :

$$\left(\frac{2\bar{k}}{3} + \beta \right) \hat{a}_{22}^3 + W^{-1} \left(1 + \frac{2\bar{k}}{3} + \beta \right) \hat{a}_{22}^2 + \left(\frac{2\bar{k}\hat{a}_{12}^2}{3} + W^{-2} + \beta\hat{a}_{12}^2 \right) \hat{a}_{22} + \beta\hat{a}_{12}^2 W^{-1} = 0. \quad (25)$$

Из соотношения (16) получаем:

$$\hat{u}(y, \bar{C}) = J_1(y, \bar{C}) + \bar{C}J_0(y, \bar{C}), \quad (26)$$

где

$$J_0(y, \bar{C}) = \int_{-1/2}^y \mathcal{F}(s, \bar{C}) ds, \quad J_1(y, \bar{C}) = \int_{-1/2}^y R_1(s, \bar{C}) \mathcal{F}(s, \bar{C}) ds, \quad (27)$$

с учетом (24),

$$\mathcal{F}(y, \bar{C}) = \frac{J(\hat{Z})(1 + 2\hat{k}W(\hat{a}_{22} + \hat{a}_{12}^2/\hat{A}_2)/3)}{1 + W\hat{a}_{22}}, \quad \hat{k} = 3, 2\beta.$$

Привлекая граничное условие (16), получим следующее определяющее соотношение для нахождения \bar{C} :

$$\bar{C} = -\frac{J_1(1/2, \bar{C})}{J_0(1/2, \bar{C})}. \quad (28)$$

Из (20) следует:

$$\begin{aligned} \hat{L}(y, \bar{C}) &= \left(y + \frac{1}{2} \right) (J^- - J^+) - J^- + \left(y + \frac{1}{2} \right) \frac{1 + \hat{\lambda}}{b_m} V\left(\frac{1}{2}, \bar{C}\right) - \\ &\quad - \frac{1 + \hat{\lambda}}{b_m} V(y, \bar{C}), \quad V(y, \bar{C}) = \int_{-1/2}^y \hat{u}(s, \bar{C}) ds, \end{aligned} \quad (29)$$

причем

$$V(y, \bar{C}) = - \int_{-1/2}^y J_1(s, \bar{C}) ds + \bar{C} \int_{-1/2}^y J_0(s, \bar{C}) ds.$$

Наконец, рассматривая задачу (23), получим

$$\hat{Q}(y, \bar{C}) = -S(y, \bar{C}) + S(1/2, \bar{C}) \left(y + \frac{1}{2} \right).$$

Здесь

$$S(y, \bar{C}) = \int_{-1/2}^y (y-s) \hat{q}(s, \bar{C}) R(s, \bar{C}) \mathcal{F}(s, \bar{C}) ds.$$

Замечание 9. В случае граничных условий (13) вместо (28) будем иметь

$$\bar{C} = \frac{1 - J_1(1/2, \bar{C})}{J_0(1/2, \bar{C})}. \quad (30)$$

Для нахождения искомых величин будем использовать метод простой итерации. Требуемые интегралы вычисляются по формулам прямоугольника на равномерной сетке с N узлов. Константа \bar{C} вычисляется согласно закону (28):

$$\bar{C}_j = -\frac{J_1(1/2, \bar{C}_{j-1})}{J_0(1/2, \bar{C}_{j-1})}, \quad (31)$$

или аналогичному закону (30) в случае соответствующих граничных условий (будем называть их первым и вторым граничным условием соответственно). Здесь $j = 0, 1, 2, \dots$ – итерационный индекс для \bar{C} . Для каждого фиксированного j неизвестные искомые функции задачи определяются внутренними итерациями по формулам, приведенным ниже.

$$\hat{Q}_{n+1}(y, \bar{C}_j) = -S_n(y, \bar{C}_j) + S_n(1/2, \bar{C}_j)(y + 1/2),$$

где

$$\begin{aligned} S_n(y, \bar{C}_j) &= \int_{-1/2}^y (y-s) \hat{q}_n(s, \bar{C}_j) R_n(s, \bar{C}_j) \mathcal{F}_n(s, \bar{C}_j) ds, \\ \hat{q}_n(y, \bar{C}_j) &= A_r R_n(y, \bar{C}_j) + A_m \sigma_m (1 + \hat{\lambda}) \hat{L}_n(y, \bar{C}_j), \\ R_n(y, \bar{C}_j) &= -(1 + \hat{\lambda}) \text{Re} \sigma_m (\hat{L}_n(y, \bar{C}_j) + J^+) + \hat{D} \left(\frac{1}{2} - y \right) + \bar{C}_j = \bar{R}_n + \bar{C}_j, \\ \mathcal{F}_n(y, \bar{C}_j) &= \frac{J(\hat{Z}_n) (1 + 2\hat{k}W(\hat{a}_{22n} + \hat{a}_{12n}^2/\hat{A}_{2n})/3)}{1 + W\hat{a}_{22n}}, \\ \hat{Z}_n(y, \bar{C}_j) &= \hat{Q}_n(y, \bar{C}_j) + 1 + \bar{\theta}(1/2 - y), \quad \hat{A}_{2n} = \hat{a}_{22n} + W^{-1}, \\ \hat{a}_{12n}(y, \bar{C}_j) &= R_n(y, \bar{C}_j) / \hat{Z}_n(y, \bar{C}_j). \end{aligned}$$

Функция \hat{L} находится по итерационному аналогу формулы (29):

$$\begin{aligned} \hat{L}_{n+1}(y, \bar{C}_j) &= \left(y + \frac{1}{2} \right) (J^- - J^+) - J^- + \left(y + \frac{1}{2} \right) \frac{1 + \hat{\lambda}}{b_m} V_n \left(\frac{1}{2}, \bar{C}_j \right) - \frac{1 + \hat{\lambda}}{b_m} V_n(y, \bar{C}_j), \\ V_n(y, \bar{C}_j) &= - \int_{-1/2}^y J_{1n}(s, \bar{C}_j) ds + \bar{C}_j \int_{-1/2}^y J_{0n}(s, \bar{C}_j) ds, \\ J_{0n}(y, \bar{C}_j) &= \int_{-1/2}^y \mathcal{F}_n(s, \bar{C}_j) ds, \quad J_{1n}(y, \bar{C}_j) = \int_{-1/2}^y \bar{R}_n(s, \bar{C}_j) \mathcal{F}_n(s, \bar{C}_j) ds. \end{aligned}$$

Наконец, для определения \hat{a}_{22} используем уравнение (25):

$$\left(\frac{2\bar{k}}{3} + \beta\right) \hat{a}_{22(n+1)}^3 + W^{-1} \left(1 + \frac{2\bar{k}}{3} + \beta\right) \hat{a}_{22(n+1)}^2 + \left(\frac{2\bar{k}\hat{a}_{12n}^2}{3} + W^{-2} + \beta\hat{a}_{12n}^2\right) \hat{a}_{22(n+1)} + \beta\hat{a}_{12n}^2 W^{-1} = 0.$$

Здесь из всех решений выбираются непрерывные по y вещественные ветви корней кубического уравнения (при наличии таковых). Индекс $n = 0, 1, 2, \dots$ – индекс внутренних итераций. Итерации по n останавливаем, когда

$$\max_{|y| \leq 1/2} \|F_{n+1} - F_n\| \leq \delta,$$

где $F_n = (\hat{Q}_n, \hat{L}_n, \hat{a}_{22n})$, $\delta > 0$ – некоторая постоянная. Вычисляя установившиеся значения функций, находим величины J_0 и J_1 по формулам (27) и используем их для итерационного шага по j , следуя формуле (31). Итоговые итерации по j также прекращаем, когда $|\bar{C}_{j+1} - \bar{C}_j| \leq \delta$. После завершения итерационного процесса, мы находим оставшиеся неизвестные величины \hat{u} , \hat{a}_{11} , \hat{M} , \hat{P} по формулам (15), (21), (24), (26).

Ниже приведены примеры численных расчетов по описанному методу для различных значений параметров задачи. Проиллюстрированы графики решений для компоненты скорости \hat{u} , температуры \hat{Z} и компоненты напряженности магнитного поля \hat{L} . За базовые значения параметров выбраны $\hat{A} = 1$, $\hat{\lambda} = 1$, $\sigma_m = 1$, $\text{Re} = 1$, $W = 1$, $\beta = 0,5$, $A_r = 1$, $A_m = 1$, $\bar{\theta} = 1$, $b_m = 1$, $\bar{E}_A = 1$, $J^+ = 2$, $J^- = 1$. Параметры численного метода: $N = 500$, $\delta = 10^{-4}$. Если какие-либо значения параметров отличаются от перечисленных, то это указывается в описании к рисункам.

Рис. 2 показывает решения с базовыми значениями параметров для двух граничных условий на скорость \hat{u} . Можно заметить, что профиль скорости вытянут против градиента давления за счет магнитного поля. На рис. 3 градиент давления увеличен, в результате профиль скорости развернулся вправо. Рис. 4 иллюстрирует случай, когда перепад давления снова невелик, но направление тока на верхнем электроде изменено на противоположное. За счет этого скорость снова стала направлена в положительную сторону. Наконец, на рис. 5 показано решение с сильным охлаждением нижней границы канала, в результате чего скорость жидкости в нижней области стала практически нулевой.

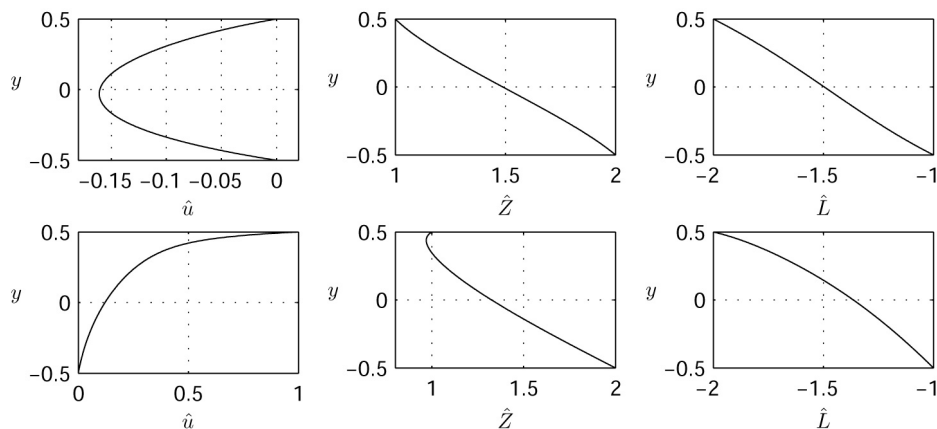


Рис. 2. Решения для базовых значений параметров. Верхний ряд – первое граничное условие, нижний – второе граничное условие

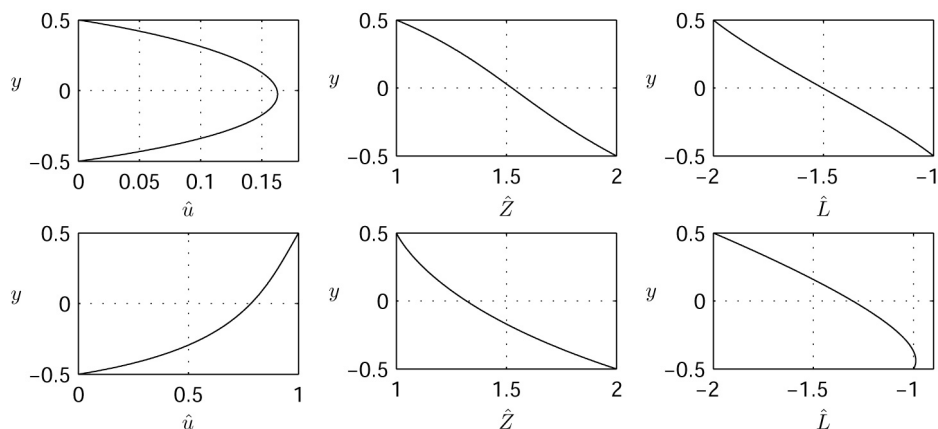


Рис. 3. Решение для $\hat{A} = 3$. Верхний ряд – первое граничное условие, нижний – второе граничное условие

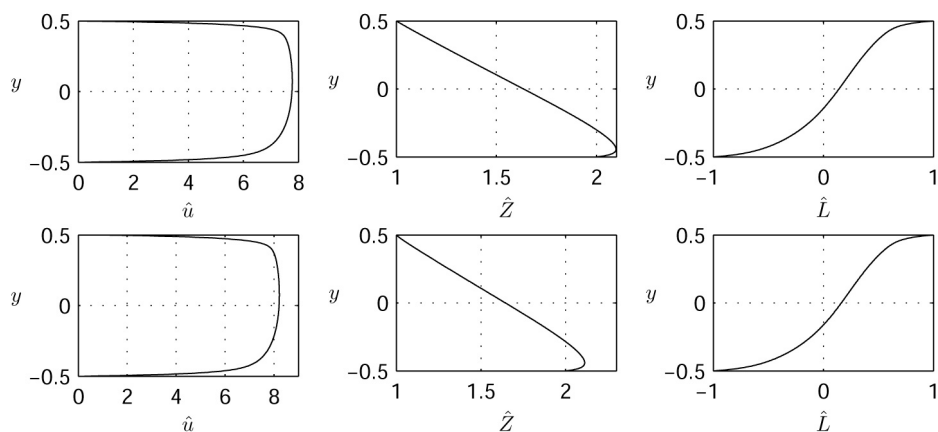


Рис. 4. Решение для $J^+ = -1$. Верхний ряд – первое граничное условие, нижний – второе граничное условие

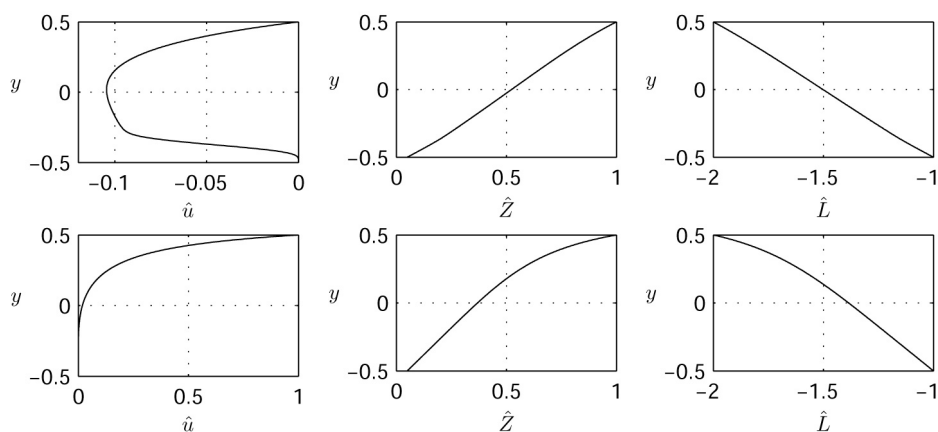


Рис. 5. Решение для $\bar{\theta} = -0,95$. Верхний ряд – первое граничное условие, нижний – второе граничное условие

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-01-00791А и при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5., проект № 0314-2016-0013.

Литература

1. De Gennes, P.G. Concepts in Polymer Physics / P.G. De Gennes. – New York: Cornell University Press, 1979.
2. Doi, M. The Theory of Polymer Dynamics / M. Doi, S.F. Edwards. – Clarendon: Oxford, 1986.
3. Bird, R.B. Dynamics of Polymeric Liquids. V. 2 / R.B. Bird, C.F. Curtiss, R.C. Armstrong, O. Hassager. – New York: Wiley, 1987.
4. McLeish, T.C.B. Molecular Constitutive Equations for a Class of Branched Polymers: the Pom-Pom Polymer / T.C.B. McLeish, R.G. Larson // Journal of Rheology. – 1998. – V. 42, № 1. – P. 81–110.
5. Verbeeten, W.M.H. Differential Constitutive Equations for Polymer Melt: the Extended Pom-Pom Model / W.M.H. Verbeeten, G.W.M. Peters, F.P.T. Baaijens // Journal of Rheology. – 2001. – V. 45, № 4. – P. 821–841.
6. Oldroyd, J.G. On the Formulation of Rheological Equations of State / J.G. Oldroyd // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1950. – V. 200, № 1063. – P. 523–541.
7. Leonov, A.I. Nonlinear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids / A.I. Leonov, A.N. Prokunin. – New York: Chapman and Hall, 1994.
8. Pokrovskii, V.N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics / V.N. Pokrovskii. – New York; Dordrecht; Heidelberg, 2010.
9. Алтухов, Ю.А. Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем / Ю.А. Алтухов, А.С. Гусев, Г.В. Пышнограй. – Барнаул: АлтГПА, 2012.
10. Bala Anki Reddy, P. Numerical Study of Magnetohydrodynamics (MHD) Boundary Layer Slip Flow of a Maxwell Nanofluid over an Exponentially Stretching Surface with Convective Boundary Condition / P. Bala Anki Reddy, S. Suneetha, N. Bhaskar Reddy // Propulsion and Power Research. – 2017. – V. 6, № 4. – P. 259–268.
11. Ellahi, R. The Effects of MHD and Temperature Dependent Viscosity on the Flow of Non-Newtonian Nanofluid in a Pipe: Analytical Solutions / R. Ellahi // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – V. 37, № 3. – P. 451–467.
12. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1 / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1970.
13. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978.
14. Ватажин, А.Б. Магнитогидродинамические течения в каналах / А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов, С.А. Регирер. – М.: Наука, 1970.
15. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости / Бай Ши-и. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962.
16. Блохин, А.М. Стационарные решения уравнений, описывающих неизотермическую электроконвекцию слабопроводящей несжимаемой полимерной жидкости / А.М. Блохин, А.С. Рудометова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 3–13.
17. Shibata, Y. On the R-Boundedness for the Two Phase Problem with Phase Transition: Compressible-Incompressible Model Problem / Y. Shibata // Funkcialaj Ekvacioj. – 2016. – V. 59, № 2. – P. 243–287.
18. Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. – М.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1955.

19. Ахиезер, А.И. Электромагнетизм и электромагнитные волны / А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер. – М.: Высш. шк., 1985.
20. Нордлинг, К. Справочник по физике для ученого и инженера / К. Нордлинг, Д. Остерман. – СПб: БХВ-Петербург, 2011.
21. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.

Александр Михайлович Блохин, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, кафедра «Дифференциальные уравнения», Новосибирский государственный университет; заведующий лабораторией, лаборатория «Вычислительные проблемы задач математической физики», Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), blokhin@math.nsc.ru.

Роман Евгеньевич Семенко, кандидат физико-математических наук, ассистент, кафедра «Дифференциальные уравнения», Новосибирский государственный университет; научный сотрудник, лаборатория «Вычислительные проблемы задач математической физики», Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), r.semenko@g.nsu.ru.

Поступила в редакцию 13 августа 2018 г.

MSC 76A10, 76W05

DOI: 10.14529/mmp180403

**STATIONARY MAGNETOHYDRODYNAMICAL FLOWS
OF NON-ISOTHERMAL POLYMERIC LIQUID
IN THE FLAT CHANNEL**

A.M. Blokhin^{1,2}, R.E. Semenko^{1,2}

¹Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

²Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation

E-mails: blokhin@math.nsc.ru, r.semenko@g.nsu.ru

This paper studies the problem of the magnetohydrodynamical flow of incompressible conductive polymeric liquid inside the flat channel in the magnetic field. There is an electric current flowing on the walls of the channel. The walls themselves have different constant temperature. The magnetohydrodynamical model we use in the paper is based on the modified rheological Pokrovskii–Vinogradov model with additional Maxwell equations. We obtain the boundary value problem for this model and look for specific steady-state solutions which are alike the well-known viscous flows of Poiseuille and Couette. The problem for such solutions is reduced to a boundary value problem for a system of nonlinear ordinary differential equations, which in turn is transformed to the system of integral equation. We solve this system by fixed-point iterations. We examine the solutions for various values of parameters and study the influence of these parameters at the flow regime. The results of the paper show that is possible to control the flow of liquid polymer in a flat channel using an external magnetic field and non-inform heating.

Keywords: magnetohydrodynamics; viscoelasticity; polymeric liquid; stationary solution.

References

1. De Gennes P.G. *Concepts in Polymer Physics*. Cornell, Cornell University Press, 1979.
2. Doi M., Edwards S.F. *The Theory of Polymer Dynamics*. Clarendon, Oxford, 1986.
3. Bird R.B., Curtiss C.F., Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 2*. N.Y., Wiley, 1987.
4. McLeish T.C.B., Larson R.G. Molecular Constitutive Equations for a Class of Branched Polymers: the Pom-Pom Polymer. *Journal of Rheology*, 1998, vol. 42, no. 1, pp. 81–110. DOI: 10.1122/1.550933
5. Verbeeten W.M.H., Peters G.W.M., Baaijens F.P.T. Differential Constitutive Equations for Polymer Melt: the Extended Pom-Pom Model. *Journal of Rheology*, 2001, vol. 45, no. 4, pp. 821–841. DOI: 10.1122/1.1380426
6. Oldroyd J.G. On the Formulation of Rheological Equations of State. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1950, vol. 200, no. 1063, pp. 523–541. DOI: 10.1098/rspa.1950.0035
7. Leonov A.I., Prokunin A.N. *Nonlinear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids*. N.Y., Chapman and Hall, 1994. DOI: 10.1007/978-94-011-1258-1
8. Pokrovskii V.N. *The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics*. N.Y., Dordrecht, Heidelberg, 2010. DOI: 10.1007/978-90-481-2231-8
9. Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Pyshnograï G.V. *Vvedeniye v mezoskopicheskuyu teoriyu tekuchikh polimernykh sistem* [Mesoscopic Theory of the Liquid Polymeric Systems]. Barnaul, AltGPA, 2012. (in Russian)
10. Bala Anki Reddy P., Suneetha S., Bhaskar Reddy N. Numerical Study of Magnetohydrodynamics (MHD) Boundary Layer Slip Flow of a Maxwell Nanofluid Over an Exponentially Stretching Surface with Convective Boundary Condition. *Propulsion and Power Research*, 2017, vol. 6, no. 4, pp. 259–268. DOI: 10.1016/j.jprr.2017.11.002
11. Ellahi R. The Effects of MHD and Temperature Dependent Viscosity on the Flow of Non-Newtonian Nanofluid in a Pipe: Analytical Solutions. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 3, pp. 451–1467. DOI: 10.1016/j.apm.2012.04.004
12. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. T. 1* [Mechanics of Continuous Media. Vol. 1]. Moscow, Nauka, 1997. (in Russian)
13. Loitsanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquid and Gas]. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)
14. Vatazhin A.B., Lyubimov G.A., Regirer S.A. *Magnitogidrodinamicheskiye techeniya v kanalakh* [Magnetohydrodynamical Flows in Channels]. Moscow, Nauka, 1970. (in Russian)
15. Bai Shiyi. *Introduction to the Theory of Compressible Flow*. N.Y., Van Nostrand. 1959.
16. Blokhin A.M., Rudometova A.S. [Stationary Solutions of the Equations for Nonisothermal Electroconvection of a Weakly Conducting Incompressible Polymeric Liquid]. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2015, vol. 9, no. 2, pp. 147–156. DOI: 10.1134/S1990478915020015
17. Shibata Y. [On the R-Boundedness for the Two Phase Problem with Phase Transition: Compressible-Incompressible Model Problem]. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2016, vol. 59, no. 2, pp. 243–287. DOI: 10.1619/fesi.59.243
18. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoy nezshimaemoy zhidkosti* [Dynamics of Viscous Incompressible Liquid]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. (in Russian)

19. Akhiezer A.I., Akhiezer I.A. *Electromagnetizm i elektromagnitnye volny* [Electromagnetism and Electromagnetic Waves]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1985. (in Russian)
20. Nordling C., Osterman D. *Spravochnik po fizike dlya uchenogo i inzhenera* [Physics Handbook for Science and Engineering]. St. Petersburg, Professional Pub Service, 2004. (in Russian)
21. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1960. (in Russian)

Received August 13, 2018