

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ 3D ТЕЧЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ ВОДЫ

*С.Р. Кильдибаева<sup>1</sup>, И.К. Гималтдинов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Российская Федерация

<sup>2</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Российская Федерация

В работе рассматривается течение затопленной струи, состоящей из капель нефти, пузырьков газа, пузырьков гидрата и вовлеченной в струю воды. Для моделирования струи используется интегральный лагранжевый метод контрольного объема, согласно которому струя рассматривается в виде последовательности элементарных контрольных объемов, содержащих сведения о массе, плотности, скорости и температуре компонентов струи. Зная эти параметры для контрольного объема, можно получить сведения о струе. Вследствие того, что рассматривается разлив на глубине 1500 м, что соответствует глубоководной добыче, существует риск распространения углеводородов в толще воды и загрязнения водоема как это было при аварии в Мексиканском заливе в 2010 г. Для быстрого и качественного предотвращения таких разливов необходимо разрабатывать способы прогнозирования течения углеводородов. В условиях стабильного существования гидрата на поверхности пузырьков образуется гидратная оболочка, которая превращает газовый пузырек в гидратный. Для моделирования гидратообразования принята схема, когда процесс лимитируется диффузией газа. На струю действует течение окружающей воды, под действием которого струя искривляется. В работе впервые рассмотрен случай, когда на струю действует трехмерное течение окружающей воды. Получены траектория струи, зависимость температуры, скорости и плотности струи от вертикальной координаты. Разработан интегральный лагранжевый метод контрольного объема, а также определено влияние трехмерного течения затопленной струи на ее параметры.

*Ключевые слова:* затопленная струя; гидратообразование; разлив углеводородов; нефть; метан.

### Введение

Разработка глубоководных газовых и нефтяных месторождений Мирового океана расширяет масштабы доступных к разработке запасов углеводородного сырья, но увеличивает вероятность загрязнения океанов. Яркими примерами таких разливов являются аварии на нефтедобывающих платформах Ixtoc-1, Deepwater Horizon в Мексиканском заливе [1, 2]. В таких случаях необходимо знать, каким образом будет происходить распространение затопленной струи в форме которой распространяются углеводороды, чтобы предупредить загрязнение водоема. Немаловажную роль играет течение окружающей среды, которое действует на затопленную струю. Под действием этого течения струя может отклоняться, изменяя свою траекторию, радиус и концентрацию веществ, входящих в струю. В работе рассмотрим многофазную затопленную струю, состоящую из капель нефти, пузырьков газа, гидратных пузырьков и воды, которая вовлекается в струю из окружающей воды. Будем рассматривать общий случай, когда струя распространяется в условиях стабильного существования гидрата. Тогда на поверхности пузырьков начинают образовываться гидратные

оболочки вплоть до момента, когда весь газ в пузырьке не перейдет в гидратное состояние. Тогда газовый пузырек станет гидратным. При распространении затопленной струи изменяются следующие параметры: траектория струи, температура, скорость, плотность, объемные содержания компонент, входящих в струю. Анализ этих параметров позволит получить исчерпывающие сведения относительно особенностей распространения струи в толще воды. Впоследствии эти данные помогут в разработке математических моделей работы устройств для ликвидации последствий нефтяных разливов [3, 4].

## 1. Постановка задачи

Пусть на дне водоема существует некоторый источник радиуса  $r$ , из которого с известной начальной температурой  $T^e$  и объемными расходами  $Q_o^e$  и  $Q_g^e$  вытекает смесь нефти и газа. Также известна температура  $T_w$  и скорость  $\vec{V}_w$  окружающей воды. Нефть распространяется в виде капель, а газ – в виде пузырьков, которые в начальный момент находятся в центре струи.

Из-за течения окружающей воды струя может отклоняться, а пузырьки покидать пределы струи. Если струя распространяется в условиях стабильного существования гидрата, пузырьки газа начинают покрываться гидратной оболочкой, превращаясь в гидратные пузырьки. Для моделирования течения затопленной струи будем использовать интегральный Лагранжевый метод контрольного объема (ИЛМКО), предложенный в работах [5, 6]. Согласно этому методу струя (рис. 1) состоит из последовательных контрольных объемов (КО) – цилиндров, характеризующихся высотой  $h$ , радиусом  $b$  и пространственными координатами  $(x, y, z)$ , соответствующими центру осевого сечения цилиндра.

Каждый КО также характеризуется средней скоростью, температурой, плотностью и концентрацией веществ, входящих в состав струи. Турбулентное вовлечение окружающей жидкости в КО вычисляется на каждом шаге по времени. Координаты центра КО совпадают с траекторией центра струи, поэтому, зная характеристики КО, будем знать характеристики струи.

Уравнение сохранения массы КО:

$$\frac{dM}{dt} = \rho_w Q_w - \rho_{com} Q^f, \quad \rho = \sum_i \alpha_i \rho_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1, \quad (1)$$

где  $M = \sum_i M_i$  – масса КО;  $Q^f = Q_g^f + Q_h^f$  – объемный поток пузырьков, «покидающих» КО в связи с искривлением струи,  $\alpha_i$  – объемные содержания соответствующих компонент в КО,  $\rho_{com}$  – плотность пузырька, который может быть газовым, газовым с гидратной оболочкой или полностью гидратным. Здесь и далее нижние индексы  $o, g, h, w$  относятся соответственно к параметрам нефти, газа, гидрата и воды.

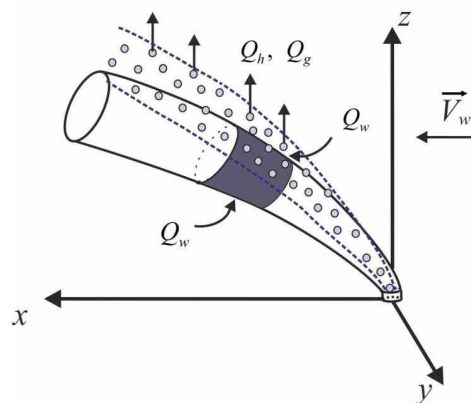


Рис. 1. Схема затопленной струи

Начальные значения размеров контрольного объема соответствуют радиусу скважины  $r$ , откуда поступают углеводороды:  $h_0 = r$ ,  $b_0 = r$ .

Вследствие образования гидратных оболочек на поверхности пузырьков газа, массы газа, гидрата и воды будут изменяться следующим образом:

$$\frac{dM_g}{dt} = -J_g - \rho_g Q_g^f, \quad \frac{dM_h}{dt} = J_h - \rho_h Q_h^f, \quad \frac{dM_w}{dt} = \rho_w Q_w - J_w, \quad (2)$$

где  $M_i$ ,  $\rho_i$  ( $i = o, g, h, w$ ) – масса и плотность соответствующих компонентов в КО;  $Q_w$  – объемный расход вовлеченной в струю окружающей воды;  $J_w$ ,  $J_g$  – соответственно интенсивности расхода воды и газа при образовании гидрата;  $J_h$  – интенсивность образования газогидрата.

Интенсивности расходов газа, воды и гидрата связаны следующими соотношениями:

$$J_g = G \cdot J_h \quad J_w = (1 - G) J_h \quad J_h = N 4\pi a_{gh}^2 j_h, \quad (3)$$

где  $G$  – гидратное число,  $N$  – количество пузырьков в КО,  $a_{gh}$  – радиус композитных пузырьков, состоящих из газового ядра и гидратной оболочки,  $j_h$  – интенсивность образования гидрата, отнесенная к площади поверхности пузырька.

Уравнения сохранения импульсов для КО записаны с учетом действия на струю 3D течения окружающей среды и имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Mu) &= u_w \rho_w Q_w - u \rho_{com} Q^f, \\ \frac{d}{dt}(Mv) &= v_w \rho_w Q_w - v \rho_{com} Q^f, \\ \frac{d}{dt} [(M_w + M_o) w + (M_g + M_h) \cdot (w + w_b)] &= w_w \rho_w Q_w - (w + w_b) \rho_{com} Q^f + \\ &+ (\rho_w - \rho_l) \pi b^2 h (\alpha_w + \alpha_o) g + (\rho_w - \rho_{com}) \pi b^2 h (\alpha_g + \alpha_h) g, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u, v, w$  – компоненты скорости КО  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ ,  $u_w, v_w, w_w$  – компоненты скорости течения воды, окружающей КО  $\vec{V}_w = u_w\vec{i} + v_w\vec{j} + w_w\vec{k}$ ,  $g$  – модуль ускорения силы тяжести,  $\rho_l = \alpha_w \rho_w + \alpha_o \rho_o$  – плотность жидкой составляющей в КО.

Координаты КО определяются следующими выражениями:

$$\frac{dz}{dt} = w, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v. \quad (5)$$

Уравнение сохранения энергии КО имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(cMT) = c_w T_w \rho_w Q_w + J_h L - J_w c_w T_{hs}, \quad c = \sum \chi_{ii}, \quad (6)$$

где  $c, c_w, T, T_w$  – теплоемкость и температура КО и воды,  $L$  – теплота фазовых переходов,  $c_i, \chi_i$  ( $i = o, g, h, w$ ) – теплоемкость и массовое содержание нефти, газа, гидрата и воды в КО.

Процессы отделения пузырьков из струи, образования гидрата на поверхности пузырьков и вовлечения окружающей воды в струю более подробно описаны в работе [6]. В данной работе будет рассматривать только случай, когда гидратообразование лимитируется диффузией газа через гидратную оболочку [7, 8].

## 2. Результаты расчетов

При расчетах будем рассматривать случай, когда на дне водоема есть некоторый источник (с известным радиусом), из которого происходит непрерывный выброс газа и нефти. Условия окружающей воды таковы, что на поверхности газовых пузырьков может образовываться гидратная оболочка.

Параметры системы:  $r = 0,23$  м,  $Q_o^e = 0,05$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_g^e = 0,45$  м<sup>3</sup>/с,  $T_w = 4^0$  С,  $T^e = 80^0$  С,  $p = 15$  МПа,  $\rho_w = 1030$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_o = 650$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_g = 99,4$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_h = 910$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varphi = 90^0$ ,  $\theta = 0^0$ ,  $u_w = 3$  м/с,  $v_w = 2$  м/с,  $w_w = 0$  м/с,  $c_o = 2090$  Дж/(кг·К),  $c_g = 2365$  Дж/(кг·К),  $c_h = 2100$  Дж/(кг·К),  $c_w = 4200$  Дж/(кг·К),  $\lambda_w = 0,58$  Вт/(м·К),  $\mu_w = 1,57$  Па·с,  $L = 5 \cdot 10^5$  Дж/кг,  $G = 0,12$ ,  $D^* = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

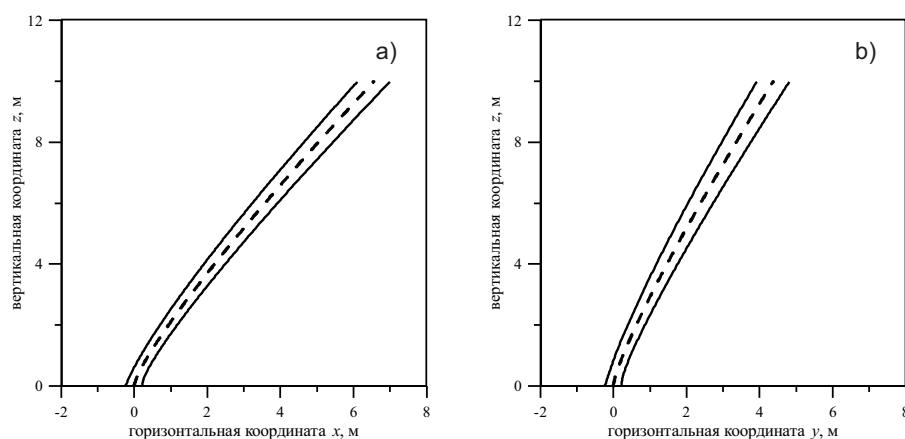


Рис. 2. Траектория струи

На рис. 2 приведены проекции траектории струи на плоскость  $XOZ$  (рис. 2 а) и плоскость  $YOZ$  (рис. 2 б). Из графиков видим, что под действием течения окружающей среды струя достаточно сильно отклоняется. Вследствие вовлечения окружающей воды в струю, происходит расширение струи. Время, за которое струя достигает высоты 10 м составляет  $t=193$  с.

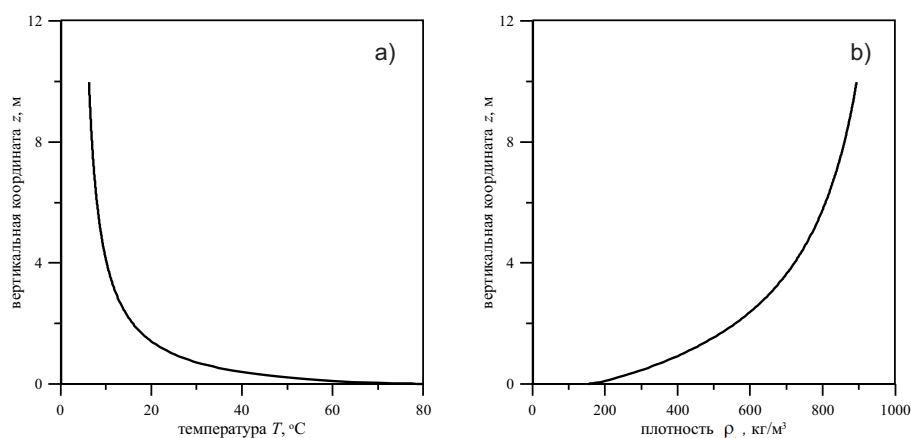
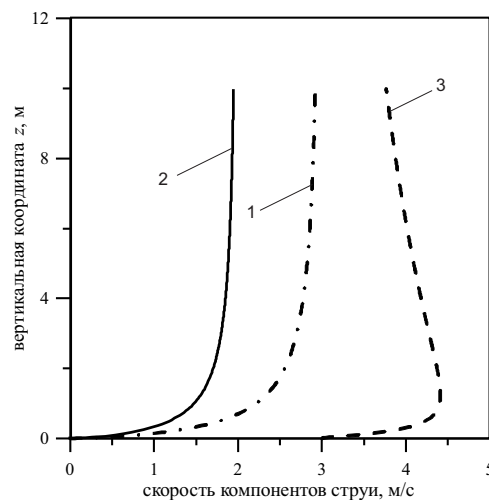


Рис. 3. Зависимость а) температуры КО; б) плотности струи от вертикальной координаты

На рис. 3 а) представлена зависимость температуры струи для случая, когда гидратообразование лимитируется диффузией газа. Температура струи убывает в

связи с вовлечением холодной окружающей воды в струю и достигает равновесной температуры гидратообразования  $T_{hs}$  на высоте  $z = 1,7$  м. На рис. 3 б) представлена зависимость плотности струи от вертикальной координаты. На начальном этапе струя состоит только из капель нефти и пузырьков газа. Затем в струю начинает поступать окружающая вода, вследствие чего плотность струи возрастает.

На рис. 4 представлены зависимости компонент скорости КО от вертикальной координаты  $z$ . Компоненты скорости струи  $u$ ,  $v$  увеличиваются в связи с действием на струю течения окружающей воды. Компонента скорости струи  $w$  сначала возрастает, затем убывает. Такое поведение объясняется тем, что в начальный момент на струю действует начальный импульс, который со временем затухает. Затухание связано с захватом окружающей воды струей и ее дальнейшим утяжелением.



**Рис. 4.** Зависимость скорости КО от вертикальной координаты  $z$ . Цифры 1, 2, 3 соответствуют компонентам скорости КО  $u$ ,  $v$ ,  $w$

## Заключение

В работе дополнена математическая модель течения многофазной затопленной струи с учетом влияния трехмерного течения окружающей среды. Исследовано влияние трехмерного течения на параметры струи, в том числе на компоненты скорости струи по различным координатам. Для случая, когда на струю действует течение, впервые получены такие параметры, как: траектория струи, зависимость температуры, скорости и плотности струи от вертикальной координаты.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-31-00264 мол\_а).*

## Литература

1. Богоявленский, В.И. Катастрофа в мексиканском заливе на месторождении Ixtoc комплекса Cantarell / В.И. Богоявленский, П.С. Баринев, И.В. Богоявленский // Бурение и нефть. – 2018. – № 1. – С. 3–13.
2. Лаврова, О.Ю. Катастрофический разлив нефти в мексиканском заливе в апреле–мае 2010 года / О.Ю. Лаврова, А.Г. Костяной // Исследование Земли из космоса. – 2010. – № 6. – С. 67–72.
3. Гималтдинов, И.К. К теории накопления углеводородов в куполе, применяемом для ликвидации техногенного разлива на дне океана / И.К. Гималтдинов, С.Р. Кильдибаева // Инженерно-физический журнал. – 2018. – № 1. – С. 260–265.
4. Гималтдинов, И.К. К теории начального этапа накопления нефти в куполе-сепараторе / И.К. Гималтдинов, С.Р. Кильдибаева // Инженерно-физический журнал. – 2015. – № 3. – С. 401–406.

5. Yapa, P.D. Simulation of Oil Spills from Underwater Accidents I: Model Development / P.D. Yapa, L. Zheng // Journal of Hydraulic Research, International Association of Hydraulic Research. – 1997. – № 5. – С. 673–688.
6. Гималтдинов, И.К. Модель затопленной струи с учетом двух предельных схем гидратообразования / И.К. Гималтдинов, С.Р. Кильдибаева // Теплофизика и аэромеханика. – 2018. – № 1. – С. 79–88.
7. Шагапов, В.Ш. Образование и разложение газогидратных включений при миграции в воде / В.Ш. Шагапов, Б.И. Тазетдинов // Теплофизика и аэромеханика. – 2014. – № 3. – С. 355–364.
8. Шагапов, В.Ш. О механизмах роста гидратной оболочки на поверхности всплывающих газовых пузырьков / В.Ш. Шагапов, А.С. Чиглинцева, А.А. Русинов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – № 3. – С. 73–86.

Светлана Рустамовна Кильдибаева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Прикладная информатика и программирование», Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (г. Стерлитамак, Российская Федерация), freya.13@mail.ru.

Ильяс Кадинович Гималтдинов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Физика», Уфимский государственный нефтяной технический университет (г. Уфа, Российская Федерация), iljas\_g@mail.ru.

*Поступила в редакцию 3 сентября 2018 г.*

---

MSC 93A30

DOI: 10.14529/mmp190112

**MATHEMATICAL MODEL OF THE SUBMERGED JET TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF 3D FLOW OF THE AMBIENT WATER**

*S.R. Kildibaeva<sup>1</sup>, I.K. Gimaltdinov<sup>2</sup>,*

<sup>1</sup>Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation

<sup>2</sup>Ufa State Oil Technical University, Ufa, Russian Federation,

E-mails: freya.13@mail.ru, iljas\_g@mail.ru

The paper considers the flow of a submerged jet consisting of oil droplets, gas bubbles, hydrate bubbles and water ambiented in the jet. The integral Lagrangian control volume method is used to model the jet. According to this method, the jet is considered as elementary control volumes. Knowing these parameters for the control volume, you can get information about the jet. The article deals with the spill of hydrocarbons at a depth of 1500 m, which corresponds to deep-sea production. There is a risk of hydrocarbon spills into the ocean, as was the case with the Gulf of Mexico accident in 2010. In such cases, it is necessary to develop methods for predicting the flow of hydrocarbons. Under the conditions of stable hydrate existence, a hydrate shell is formed on the surface of the bubbles, thus the gas bubble turns into a hydrate bubble. To simulate hydrate formation, a scheme of hydrate formation is adopted, which is limited by the diffusion of gas through the shell on the surface of the bubble. Under the influence of the flow of the surrounding water jet bends. The paper for the first time considers the case when a three-dimensional flow acts on the jet. As a result of calculations the jet trajectory, the dependence of temperature, velocity and density of the jet on the vertical coordinate are obtained. The integral Lagrangian control volume method is developed, and the influence of the three-dimensional flow of the submerged jet on its parameters is determined.

*Keywords: submerged jet; gas hydrate formation; hydrocarbon spill; oil; methane.*

## References

1. Bogoyavlenskii V.I., Barinov P.S. [Disaster in the Gulf of Mexico at the Ixtoc Field of the Cantarell Complex]. *Drilling and Oil*, 2018, no. 1, pp. 3–13. (in Russian)
2. Lavrova O.Yu., Kostyanoy A.G. Catastrophic Oil Spill in the Gulf of Mexico in April–May 2010. *The Study of Earth from Space*, 2010, no. 6, pp. 67–72. (in Russian)
3. Gimaltdinov I.K., Kildibaeva S.R. On the Theory of Accumulation of Hydrocarbons in a Dome Used to Eliminate a Technogenic Spill at the Bottom of the Ocean. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2018, no. 1, pp. 246–251. DOI: 10.1007/s10891-018-1743-x
4. Gimaltdinov I.K., Kildibaeva S.R. About the Theory of Initial Stage of Oil Accumulation in a Dome-Separator. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2015, no. 3, pp. 387–392. DOI: 10.1134/S0869864315030130
5. Yapa P.D., Zheng L. Simulation of Oil Spills from Underwater Accidents I: Model Development. *Journal of Hydraulic Research, International Association of Hydraulic Research*, 1997, no. 5, pp. 673–688.
6. Gimaltdinov I.K., Kildibaeva S.R. Model of a Submerged Jet Accounting for Two Limiting Schemes of Hydrate Formation. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2018, no. 1, pp. 75–83. DOI: 10.1134/S0869864318010079
7. Shagapov V.Sh., Tazetdinov B.I. Formation and Dissociation of Gas Hydrate Inclusions During Migration in Water. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2014, no. 3, pp. 337–345. DOI: 10.1134/S086986431403007X
8. Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. On Migration of Bubbles Under Hydrate-Formation Conditions. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 2, pp. 43–52.

*Received September 3, 2018*