

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

*А.В. Боков¹, М.А. Корытова², А.Б. Самаров²*¹Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, г. Пятигорск, Российская Федерация²Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

Целью исследования является построение дискретного аналога обобщенного дифференциального уравнения, описывающего конвекцию в вязкой несжимаемой жидкости в сферических координатах. Математическая модель конвективного теплообмена в вязкой несжимаемой жидкости задается системой дифференциальных уравнений, полученных на основе уравнений гидродинамики, тепло- и массообмена. Эти уравнения подчиняются обобщенному закону сохранения, который описывается дифференциальным уравнением для обобщенной переменной. Для дискретизации дифференциального уравнения используется метод контрольного объема. Расчетная область разбивается на множество непересекающихся контрольных объемов с узловой точкой в каждом из них. Дифференциальное уравнение интегрируется по контрольным объемам. В результате получается дискретный аналог, связывающий значение обобщенной переменной в узловой точке с ее значениями в соседних узлах. Метод гарантирует строгое выполнение законов сохранения как во всей расчетной области, так и в любой ее части. Чтобы применять лучшие аппроксимации профилей обобщенной переменной, находятся точные решения уравнений сохранения отдельно по каждой координате. Кратко поясняется физический смысл точных решений. В итоге строится дискретный аналог для обобщенного дифференциального уравнения с использованием полученных аналитических решений.

Ключевые слова: математическая модель; конвекция; обобщенное дифференциальное уравнение; дискретный аналог; контрольный объем.

Введение

Авторами статьи в работе [1] была решена задача построения дискретного аналога для уравнения конвекции и диффузии в цилиндрических координатах на основе метода контрольного объема. С учетом того, что многие прикладные задачи требуют для численного решения использования криволинейных сеток, представляется целесообразным получение расчетных формул для коэффициентов дискретного аналога обобщенного дифференциального уравнения с использованием аппроксимации профилей функций между узлами сетки в сферических координатах, как это было сделано ранее для цилиндрической системы координат.

1. Математическая модель конвективного теплообмена

Математическая модель конвективного теплообмена в вязкой несжимаемой жидкости определяется системой дифференциальных уравнений, полученных на

основе уравнений гидродинамики, тепло- и массообмена (см., например, [2]):

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{3} \eta \nabla \cdot (\nabla \cdot \bar{u}) + \rho \bar{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0, \quad (2)$$

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla T \right) = \lambda \nabla^2 T. \quad (3)$$

Здесь (1) – уравнение Навье – Стокса для несжимаемой жидкости, (2) – уравнение неразрывности, (3) – уравнение теплопереноса (уравнение массопереноса имеет вид, аналогичный уравнению (3), с заменой температуры T на массовую концентрацию химической компоненты). Дифференциальные уравнения (1) – (3) описывают процессы переноса количества движения, массы и энергии. Используются обозначения: \bar{u} – скорость (векторная величина), p – давление, T – температура, ρ – плотность, η – динамическая вязкость, λ – теплопроводность, c – удельная теплоемкость, \bar{g} – напряженность гравитационного поля, t – время.

Систему уравнений для компонент вектора скорости получим, решая совместно (1), (2):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \nabla \cdot (\rho \bar{u} u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nabla \cdot (\eta \nabla u_i) + B_i + V_i, \quad (4)$$

где u_i – i -я компонента вектора скорости ($i = 1, 2, 3$), B_i – составляющая объемной силы (приложенной к единице объема), V_i – дополнительные диссипативные члены.

Сравнивая (3) и (4), заметим, что u_i и T подчиняются обобщенному закону сохранения, который описывается дифференциальным уравнением для обобщенной переменной Φ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi) + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \Phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) + \Psi, \quad (5)$$

где Ψ – так называемый «источниковый член» (обычно представляется в линеаризованном виде, как линейная функция Φ). Физический смысл Ψ и Γ зависит от того, какую именно величину обозначает переменная Φ . Коэффициент Γ играет роль коэффициента диффузии для уравнения переноса массовой концентрации химической компоненты, коэффициента теплопроводности для уравнения тепловой конвекции, коэффициента динамической или кинематической вязкости для уравнения движения жидкости. Источниковый член Ψ может включать диссипативные и объемные компоненты, которые не учитываются конвективным и диффузионным членами уравнения (5).

Для дискретизации дифференциального уравнения (5) используем метод контрольного объема. Суть метода и его достоинства обсуждаются в книгах [3 – 5], а в работах [6, 7] приведены примеры его использования.

2. Интегральные балансы для граней контрольного объема

Преобразуем уравнение (5) с учетом (2) к виду:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \bar{u} \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) + \Psi.$$

Запишем это уравнение в сферических координатах (r, θ, φ) (см. [8, 9]):

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \rho u_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \\ & = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \Psi. \end{aligned} \quad (6)$$

В это уравнение входят соответствующие компоненты вектора скорости $\bar{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$. Уравнение неразрывности в сферических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) = 0. \quad (7)$$

Преобразуем уравнения (6), (7), умножая их левые и правые части на r^2 и $r^2 \Phi$ соответственно:

$$\begin{aligned} & r^2 \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + r^2 \rho u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r^2 \rho u_\theta \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \rho u_\varphi \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + r^2 \Psi \end{aligned} \quad (8)$$

и

$$r^2 \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Phi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) + \Phi \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho u_\theta) + \Phi \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) = 0. \quad (9)$$

Преобразуем уравнение конвекции и диффузии (8), используя уравнение неразрывности (9):

$$\begin{aligned} & r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \rho u_r \Phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \rho u_\theta \Phi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \rho u_\varphi \Phi) = \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + r^2 \Psi \sin \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Расчетную область разобьем на множество непересекающихся контрольных объемов, в каждом из которых будет содержаться только одна узловая точка. Разбиение проводим координатными поверхностями (см. [9]): $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (сферами, $r = \text{const}$, $r \geq 0$), $x^2 + y^2 - z^2 \text{tg}^2 \theta = 0$ (круглыми конусами, $\theta = \text{const}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq \pi/2$), $y = x \text{tg} \varphi$ (полуплоскостями, $\varphi = \text{const}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \pi/2$, $\varphi \neq 3\pi/2$).

Рассмотрим типичный контрольный объем V с узловой точкой P (рис. 1). Обозначим через n и s верхнюю («северную») и нижнюю («южную») грани контрольного объема, через w и e – левую («западную») и правую («восточную») грани, через t и b – «внешнюю» (большого радиуса) и «внутреннюю» (меньшего радиуса) грани. «Северная» и «южная» грани представляют собой части конических поверхностей, «западная» и «восточная» грани – части полуплоскостей, «внешняя» и «внутренняя» грани – части сферических поверхностей. Для удобства представления формул используем такие же обозначения в записи соответствующих этим граням значений переменных. Таким образом, через θ_s обозначим значение переменной θ на «южной» грани, а через θ_n – значение этой переменной на «северной» грани. Тогда для данного контрольного объема выполнено условие $\theta_n \leq \theta \leq \theta_s$. Аналогичным образом вводятся обозначения для граничных значений переменных φ и r : $\varphi_e \leq \varphi \leq \varphi_w$,

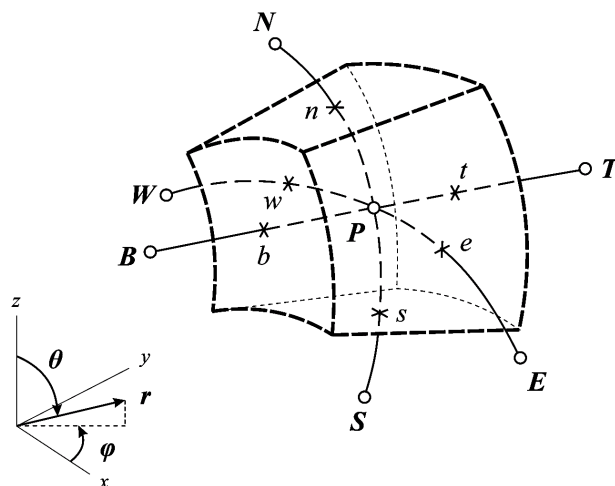


Рис. 1. Контрольный объем V с узловой точкой P

$r_b \leq r \leq r_t$. Следовательно, интегрирование по рассматриваемому контрольному объему – это интегрирование по области

$$V = \{(r, \theta, \varphi) \mid r_b \leq r \leq r_t, \theta_n \leq \theta \leq \theta_s, \varphi_e \leq \varphi \leq \varphi_w\}.$$

Уравнение (10) проинтегрируем по указанному контрольному объему V и по временному промежутку $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

$$\begin{aligned} & \iiint_V r^2 \sin \theta \left[\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi) dt \right] dr d\theta d\varphi + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{\theta_n \varphi_e}^{\theta_s \varphi_w} \left[\int_{r_b}^{r_t} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \rho u_r \Phi - \right. \right. \\ & \left. \left. - r^2 \sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) dr \right] d\theta d\varphi dt + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{r_b \varphi_e}^{r_t \varphi_w} \left[\int_{\theta_n}^{\theta_s} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin \theta \rho u_\theta \Phi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) d\theta \right] dr d\varphi dt + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{r_b \theta_n}^{r_t \theta_s} \left[\int_{\varphi_e}^{\varphi_w} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \rho u_\varphi \Phi - \frac{\Gamma}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d\varphi \right] dr d\theta dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[\iiint_V r^2 \sin \theta \Psi dr d\theta d\varphi \right] dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично интегрируем уравнение неразрывности (7):

$$\begin{aligned} & \iiint_V r^2 \sin \theta \left[\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right] dr d\theta d\varphi + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{\theta_n \varphi_e}^{\theta_s \varphi_w} \left[\int_{r_b}^{r_t} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \rho u_r) dr \right] d\theta d\varphi dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{r_b \varphi_e}^{r_t \varphi_w} \left[\int_{\theta_n}^{\theta_s} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \rho u_\theta) d\theta \right] dr d\varphi dt + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{r_b \theta_n}^{r_t \theta_s} \left[\int_{\varphi_e}^{\varphi_w} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \rho u_\varphi) d\varphi \right] dr d\theta dt = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Размеры контрольного объема V определяются значениями $\Delta r = r_t - r_b$, $\Delta\varphi = \varphi_w - \varphi_e$ (рис. 2) и $\Delta\theta = \theta_s - \theta_n$ (рис. 3). Пусть $(\delta r)_t$ – расстояние между узловыми точками P и T , а $(\delta r)_b$ – расстояние между P и B . По такому же принципу обозначим расстояния между другими парами узлов: $(\delta\varphi)_w$ – между P и W , $(\delta\varphi)_e$ – между P и E , $(\delta\theta)_n$ – между P и N , $(\delta\theta)_s$ – между P и S . Узловая точка P характеризуется координатами r_P , θ_P и φ_P .

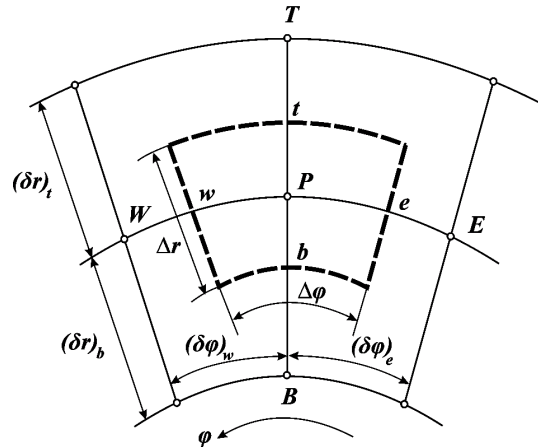


Рис. 2. Проекция сечения контрольного объема V конусом $\theta = \theta_P$ на касательную плоскость (точка касания – узел P)

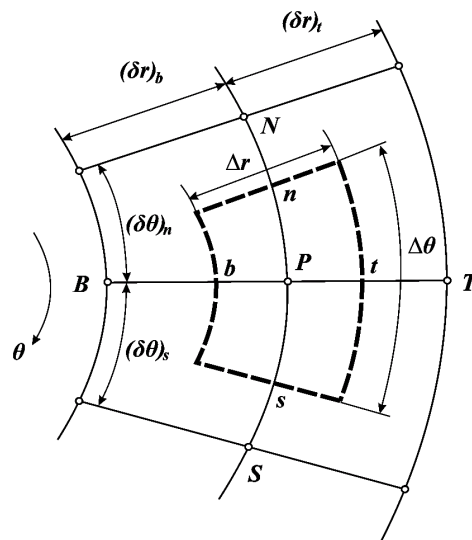


Рис. 3. Сечение контрольного объема V полуплоскостью $\varphi = \varphi_P$

Введем понятия суммарных потоков, направленных вдоль осей координат и складывающихся из конвективных и диффузионных составляющих:

$$\begin{aligned}
 J_r &= r^2 \sin \theta \rho u_r \Phi - r^2 \sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r}, & J_\theta &= r \sin \theta \rho u_\theta \Phi - \sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \\
 J_\varphi &= r \rho u_\varphi \Phi - \frac{\Gamma}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Тогда с учетом формул (13) уравнение (11) примет вид:

$$\iiint_V r^2 \sin \theta \left[\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi) dt \right] dr d\theta d\varphi + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[\iiint_V \left(\frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} \right) dr d\theta d\varphi \right] dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[\iiint_V r^2 \sin \theta \Psi dr d\theta d\varphi \right] dt. \quad (14)$$

Пусть J_t – значение потока J_r на грани t , а J_b – значение J_r на грани b . Также обозначим через J_s и J_n значения J_θ на гранях s и n , а через J_w и J_e – значения J_φ на гранях w и e . Значения переменной Φ в момент времени $t_0 + \Delta t$ (новые значения на текущем временном шаге) в узловых точках P, T, B, S, N, W, E обозначим $\Phi_P, \Phi_T, \Phi_B, \Phi_S, \Phi_N, \Phi_W, \Phi_E$. Значение Φ в момент времени t_0 в узле P обозначим Φ_P^0 . Пусть ρ_P и ρ_P^0 – значения переменной ρ в узле P в моменты времени $t_0 + \Delta t$ и t_0 . При аппроксимации интегралов дискретными аналогами будем использовать неявную схему: на временном шаге $t_0 < t \leq t_0 + \Delta t$ полагаем значения Φ и ρ равными новым значениям Φ_P и ρ_P . Кроме того, согласно применяемому методу считаем, что значения переменных Φ и ρ во всем контрольном объеме V равны их значениям в узловой точке P . При указанных допущениях уравнение (14) аппроксимируется следующим дискретным аналогом:

$$(\rho_P \Phi_P - \rho_P^0 \Phi_P^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} + (J_t - J_b) \Delta \theta \Delta \varphi + (J_s - J_n) \Delta r \Delta \varphi + (J_w - J_e) \Delta r \Delta \theta = \bar{\Psi} \Delta V, \quad (15)$$

где $\bar{\Psi}$ – среднее по контрольному объему значение Ψ в момент времени $t_0 + \Delta t$, $\Delta V = \iiint_V r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{2}{3}(r_t^2 + r_t r_b + r_b^2) \sin \frac{\theta_n + \theta_s}{2} \sin \frac{\Delta \theta}{2} \Delta r \Delta \varphi$.

Отметим, что при $r_P = \frac{r_t + r_b}{2}$ и $\theta_P = \frac{\theta_s + \theta_n}{2}$ выполнено равенство $\Delta V = (2r_P^2 - \frac{1}{6}(\Delta r)^2) \sin \theta_P \sin \Delta \theta \Delta r \Delta \varphi$.

Введем обозначения:

$$F_r = r^2 \sin \theta \rho u_r, \quad F_\theta = r \sin \theta \rho u_\theta, \quad F_\varphi = r \rho u_\varphi. \quad (16)$$

При этом F_t и F_b – значения F_r на гранях t и b , F_s и F_n – значения F_θ на гранях s и n , F_w и F_e – значения F_φ на гранях w и e . Учитывая (16), составим дискретный аналог уравнения (12):

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} + (F_t - F_b) \Delta \theta \Delta \varphi + (F_s - F_n) \Delta r \Delta \varphi + (F_w - F_e) \Delta r \Delta \theta = 0. \quad (17)$$

Из (15) и (17) получим

$$\begin{aligned} & (\Phi_P - \Phi_P^0) \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t} + (J_t - F_t \Phi_P) \Delta \theta \Delta \varphi - (J_b - F_b \Phi_P) \Delta \theta \Delta \varphi + \\ & + (J_s - F_s \Phi_P) \Delta r \Delta \varphi - (J_n - F_n \Phi_P) \Delta r \Delta \varphi + (J_w - F_w \Phi_P) \Delta r \Delta \theta - \\ & - (J_e - F_e \Phi_P) \Delta r \Delta \theta = \bar{\Psi} \Delta V. \end{aligned} \quad (18)$$

3. Точные решения уравнений сохранения

Следуя [9], будем именовать координаты r , θ , φ полярным радиусом, широтой и долготой. Для получения лучших аппроксимаций профилей обобщенной переменной в различных направлениях найдем точные решения уравнений сохранения отдельно по каждой координате.

I. Рассмотрим установившееся течение в направлении возрастания полярного радиуса r ($\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $R_0 \leq r \leq R_1$):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \rho u_r \Phi - r^2 \sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \rho u_r) = 0. \quad (19)$$

Упростим систему уравнений (19), учитывая $\theta = \text{const}$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \rho u_r \Phi - r^2 \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) = 0.$$

Обозначим $r^2 \rho u_r = k = \text{const}$. Рассматривая течение как одномерное, получаем уравнение относительно функции одной переменной $\Phi = \Phi(r)$ ($\Phi'_\theta = \Phi'_\varphi = 0$). В предположении $\Gamma = \text{const}$ задача сводится к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения в области $R_0 \leq r \leq R_1$ (рис. 4):

$$k\Phi'_r - 2r\Gamma\Phi'_r - r^2\Gamma\Phi''_{rr} = 0, \quad \Phi(R_0) = \Phi_0, \quad \Phi(R_1) = \Phi_1. \quad (20)$$

Задача (20) приводится к виду

$$(\ln \Phi'_r)'_r = \frac{k - 2r\Gamma}{r^2\Gamma}, \quad \Phi(R_0) = \Phi_0, \quad \Phi(R_1) = \Phi_1.$$

Последовательно интегрируя, находим общее решение дифференциального уравнения:

$$\Phi(r) = C_1 \int \frac{e^{-k/(r\Gamma)}}{r^2} dr = C_1 \frac{\Gamma}{k} e^{-k/(r\Gamma)} + C_2.$$

Учитывая начальные условия, находим решение системы (19):

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_1 - \Phi_0} = \frac{e^{\frac{k(r-R_0)}{r\Gamma R_0}} - 1}{e^{\frac{k(R_1-R_0)}{\Gamma R_0 R_1}} - 1}. \quad (21)$$

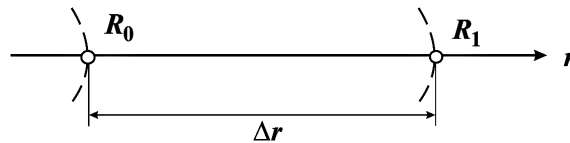


Рис. 4. Область решения одномерной задачи в направлении r

II. Рассмотрим установившееся течение в направлении возрастания θ (вдоль дуги M_0M_1 , $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, рис. 5):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin \theta \rho u_\theta \Phi - \sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \rho u_\theta) = 0. \quad (22)$$

Граничные условия: $\Phi(\theta_0) = \Phi_0$, $\Phi(\theta_1) = \Phi_1$.

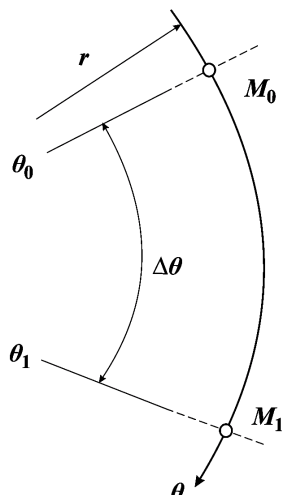


Рис. 5. Область решения одномерной задачи в направлении θ

Запишем систему уравнений (22) в виде:

$$r \sin \theta \rho u_{\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad r \sin \theta \rho u_{\theta} = \text{const.}$$

Обозначим $r \sin \theta \rho u_{\theta} \Gamma^{-1} = k$. В предположении, что $\Phi = \Phi(\theta)$, $\Phi'_r = \Phi'_{\varphi} = 0$ и $\Gamma = \text{const}$, получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения в области $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$:

$$k \Phi'_{\theta} - \cos \theta \Phi'_{\theta} - \sin \theta \Phi''_{\theta\theta} = 0, \quad \Phi(\theta_0) = \Phi_0, \quad \Phi(\theta_1) = \Phi_1. \quad (23)$$

Аналогично задаче (20)

$$\begin{aligned} (\ln \Phi'_{\theta})'_{\theta} &= \frac{k - \cos \theta}{\sin \theta}, \\ \Phi(\theta) &= C_1 \int \left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right)^k \frac{d\theta}{\sin \theta} = C_1 \int \left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right)^{k-1} d \left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right) = \frac{C_1}{k} \left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right)^k + C_2. \end{aligned}$$

Решение запишем в виде, аналогичном (21)

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_1 - \Phi_0} = \frac{(\text{tg}(\theta/2))^k - (\text{tg}(\theta_0/2))^k}{(\text{tg}(\theta_1/2))^k - (\text{tg}(\theta_0/2))^k}. \quad (24)$$

III. Рассмотрим установившееся течение в направлении возрастания φ (по дуге L_0L_1 при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, рис. 6):

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \rho u_{\varphi} \Phi - \frac{\Gamma}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \rho u_{\varphi}) = 0. \quad (25)$$

Граничные условия: $\Phi(\varphi_0) = \Phi_0$, $\Phi(\varphi_1) = \Phi_1$. Из (25) следует, что $r \rho u_{\varphi} = \text{const}$. Пусть $r \rho u_{\varphi} \sin \theta \Gamma^{-1} = k$. В предположении, что $\Phi = \Phi(\varphi)$, $\Phi'_r = \Phi'_{\theta} = 0$ и $\Gamma = \text{const}$, получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения в области $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$:

$$k \Phi'_{\varphi} - \Phi''_{\varphi\varphi} = 0, \quad \Phi(\varphi_0) = \Phi_0, \quad \Phi(\varphi_1) = \Phi_1. \quad (26)$$

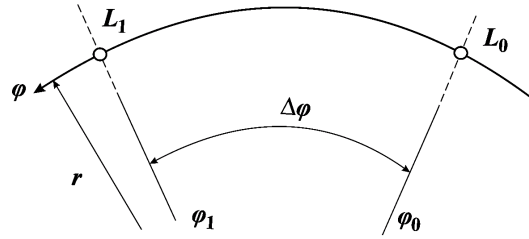


Рис. 6. Область решения одномерной задачи в направлении φ

Решая систему (26), найдем:

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_1 - \Phi_0} = \frac{e^{k(\varphi - \varphi_0)} - 1}{e^{k(\varphi_1 - \varphi_0)} - 1}. \quad (27)$$

4. Физический смысл точных решений

Итак, точные решения в случае одномерных течений по каждой из координат задаются соотношениями (21), (24) и (27). Входящий в каждую из формул коэффициент k зависит от выбора координаты. Поскольку ранее (см. [1]) авторами уже было проведено исследование физического смысла точных решений для случая цилиндрических координат, следует привести лишь общую схему решения данной частной задачи. Для каждого аналитического решения определим соответствующие ему числа подобия (числа Пекле, определяющие соотношение между конвективными и диффузионными членами в уравнениях (4)).

В системе (19) $k = r^2 \rho u_r$. Определим число Пекле в этом случае равенством

$$P_r = \frac{k(R_1 - R_0)}{\Gamma R_1 R_0} = \frac{r^2 \rho u_r \Delta R}{\Gamma R_1 R_0},$$

где $\Delta R = R_1 - R_0$ – характерный размер. В этом случае уравнение (21) принимает вид:

$$\Phi = \Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0) \frac{e^{P_r f(r)} - 1}{e^{P_r} - 1}, \quad f(r) = \frac{(r - R_0)R_1}{r \Delta R}, \quad (28)$$

где $f(r)$ – безразмерная нелинейная функция координаты r , причем $0 \leq f(r) \leq 1$ при $R_0 \leq r \leq R_1$.

В системе (25) $k = r \rho u_\varphi \sin \theta \Gamma^{-1}$, и число Пекле определяется равенством

$$P_\varphi = k(\varphi_1 - \varphi_0) = \frac{r \rho u_\varphi \sin \theta}{\Gamma} \Delta \varphi,$$

где $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ – характерный размер. В этом случае уравнение (27) принимает вид:

$$\Phi = \Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0) \frac{e^{P_\varphi f(\varphi)} - 1}{e^{P_\varphi} - 1}, \quad f(\varphi) = \frac{(\varphi - \varphi_0)}{\Delta \varphi}, \quad (29)$$

где $f(\varphi)$ – линейная функция переменной φ (безразмерная координата), $0 \leq f(\varphi) \leq 1$ при $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Зададим число Пекле в системе (22) соотношением

$$P_\theta = k \ln \frac{\operatorname{tg}(\theta_1/2)}{\operatorname{tg}(\theta_0/2)} = \frac{r \rho u_\theta \sin \theta}{\Gamma} \ln \frac{\operatorname{tg}(\theta_1/2)}{\operatorname{tg}(\theta_0/2)}.$$

Уравнение (24) в этом случае принимает вид:

$$\Phi = \Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0) \frac{e^{P_\theta f(\theta)} - 1}{e^{P_\theta} - 1}, \quad f(\theta) = \frac{\ln \operatorname{tg}(\theta/2) - \ln \operatorname{tg}(\theta_0/2)}{\ln \operatorname{tg}(\theta_1/2) - \ln \operatorname{tg}(\theta_0/2)}, \quad (30)$$

где $f(\theta)$ – безразмерная нелинейная функция переменной θ такая, что при $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ ее значения определяются неравенством $0 \leq f(\theta) \leq 1$.

Поскольку точные решения во всех трех случаях можно представить обобщенным уравнением

$$\Phi(\xi) = \Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0) \frac{e^{Pf(\xi)} - 1}{e^P - 1},$$

где ξ – обобщенная координата, то и поведение точных решений в зависимости от значений числа Пекле P будет аналогичным. Теперь к последнему уравнению применимы результаты, полученные в [1]. В пределе при $P \rightarrow 0$ (в случае «чистой» диффузии) зависимость $\Phi(\xi)$ от ξ определяется функцией $f(\xi)$. Чем больше $P \gg 1$, тем больше влияние Φ_0 на грани контрольного объема. При $P \ll -1$ чем больше $|P|$, тем больше влияние Φ_1 . В случае, если $\xi \neq 0$ и значение $|P|$ велико, то на грани контрольного объема, расположенной посередине между узлами, производная Φ'_ξ близка к нулю, то есть диффузия почти отсутствует.

5. Дискретный аналог для обобщенного дифференциального уравнения

Используем полученные аналитические решения для построения дискретного аналога обобщенного дифференциального уравнения (18).

I. Найдем приближения для потоков J_t и J_b на «внешней» и «внутренней» гранях контрольного объема. В качестве профиля между узлами P и T возьмем функцию, определяемую равенством (28), заменив Φ_0 на Φ_P , а Φ_1 на Φ_T . Примем $R_0 = R_P$, $\Delta R = (\delta r)_t$, $R_1 = R_T = R_P + (\delta r)_t$. Тогда

$$\Phi = \Phi_P + \frac{\Phi_T - \Phi_P}{e^{P_t} - 1} (e^{P_t f(r)} - 1), \quad P_t = \frac{r_t^2 (\rho u_r)_t (\delta r)_t}{\Gamma_t R_P R_T}, \quad F_t = r_t^2 (\rho u_r)_t \sin \theta,$$

$$f(r) = \frac{(r - R_P) R_T}{r (\delta r)_t}, \quad R_P \leq r \leq R_T,$$

где r_t – значение полярного радиуса на «внешней» грани t контрольного объема.

Найдем выражение для потока J_t и покажем, что расположение границы раздела между узлами P и T не существенно. Заметим, что $P_t = F_t \frac{(\delta r)_t}{\Gamma_t R_P R_T \sin \theta}$. Следовательно,

$$J_t = F_t \Phi_P + F_t \frac{\Phi_T - \Phi_P}{e^{P_t} - 1} e^{P_t f(r_t)} - F_t \frac{\Phi_T - \Phi_P}{e^{P_t} - 1} - F_t \frac{\Phi_T - \Phi_P}{e^{P_t} - 1} e^{P_t f(r_t)} =$$

$$= F_t \Phi_P - F_t \frac{\Phi_T - \Phi_P}{e^{P_t} - 1} = F_t \left[\Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_T}{e^{P_t} - 1} \right]. \quad (31)$$

Поскольку $f(r_t)$ в (31) не входит, то значение J_t не зависит от расположения границы раздела между узлами.

Аналогично, на «внутренней» грани контрольного объема

$$J_b = F_b \left[\Phi_B + \frac{\Phi_B - \Phi_P}{e^{P_b} - 1} \right], \quad (32)$$

где $F_b = r_t^2(\rho u_r)_t \sin \theta$, $P_b = \frac{r_b^2(\rho u_r)_b(\delta r)_b}{\Gamma_b R_P R_T}$, Φ_B – значение обобщенной переменной в узле B .

II. Найдем приближения для потоков J_s и J_n на «южной» и «северной» гранях контрольного объема.

В качестве профиля между узлами P и S используем функцию (30), заменив Φ_0 на Φ_P , Φ_1 на Φ_S , θ_0 на θ_P , θ_1 на θ_S . Положим $\Delta\theta = \theta_S - \theta_P = (\delta\theta)_s$. Тогда

$$\Phi = \Phi_P + \frac{\Phi_S - \Phi_P}{e^{P_s} - 1} (e^{P_s f(\theta)} - 1), \quad f(\theta) = \frac{\ln \operatorname{tg}(\theta/2) - \ln \operatorname{tg}(\theta_P/2)}{\ln \operatorname{tg}(\theta_S/2) - \ln \operatorname{tg}(\theta_P/2)},$$

где $\theta_P \leq \theta \leq \theta_S = \theta_P + (\delta\theta)_s$. На «южной» грани s контрольного объема r_s – значение полярного радиуса, θ_s – значение широты,

$$P_s = \frac{r_s(\rho u_\theta \sin \theta)_s}{\Gamma_s} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta_S}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_P}{2} \right), \quad F_s = r_s(\rho u_\theta \sin \theta)_s. \quad (33)$$

Поток J_s на «южной» грани можно представить, с учетом равенств (33), в виде:

$$\begin{aligned} J_s &= F_s \Phi_P + F_s \frac{\Phi_S - \Phi_P}{e^{P_s} - 1} e^{P_s f(\theta_s)} - F_s \frac{\Phi_S - \Phi_P}{e^{P_s} - 1} - F_s \frac{\Phi_S - \Phi_P}{e^{P_s} - 1} e^{P_s f(\theta_s)} = \\ &= F_s \Phi_P - F_s \frac{\Phi_S - \Phi_P}{e^{P_s} - 1} = F_s \left[\Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_S}{e^{P_s} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Значение J_s не зависит от расположения границы раздела между узлами, так как в выражение (34) $f(\theta_s)$ не входит.

Аналогично, на «северной» грани n контрольного объема

$$J_n = F_n \left[\Phi_N + \frac{\Phi_N - \Phi_P}{e^{P_n} - 1} \right], \quad (35)$$

где $F_n = r_n(\rho u_\theta \sin \theta)_n$, $P_n = \frac{r_n(\rho u_\theta \sin \theta)_n}{\Gamma_n} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta_N}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_P}{2} \right)$, Φ_N – значение обобщенной переменной в узле N .

III. Найдем приближения для потоков J_w и J_e на «западной» и «восточной» гранях контрольного объема.

Для аппроксимации профиля между узлами P и W используем функцию (29), заменяя Φ_0 и Φ_1 на Φ_P и Φ_W , φ_0 и φ_1 на φ_P и φ_W , $\Delta\varphi$ на $(\delta\varphi)_w$. Тогда для значений $\varphi_P \leq \varphi \leq \varphi_W$

$$\Phi = \Phi_P + \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} (e^{P_w f(\varphi)} - 1), \quad f(\varphi) = \frac{\varphi - \varphi_P}{(\delta\varphi)_w}, \quad (\delta\varphi)_w = \varphi_W - \varphi_P.$$

На «западной» грани контрольного объема $F_w = r_w(\rho u_\varphi)_w$, $P_w = \frac{r_w(\rho u_\varphi)_w \sin \theta}{\Gamma_w} (\delta\varphi)_w$, φ_w – угол до грани w от узла P . Поток J_w можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 J_w &= F_w \left[\Phi_P + \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} (e^{P_w f(\varphi_w)} - 1) \right] - \frac{\Gamma_w}{\sin \theta} \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} e^{P_w f(\varphi_w)} \frac{P_w}{(\delta\varphi)_w} = \\
 &= F_w \Phi_P + F_w \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} e^{P_w f(\varphi_w)} - F_w \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} - F_w \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} e^{P_w f(\varphi_w)} = \\
 &= F_w \Phi_P - F_w \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} = F_w \left[\Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_W}{e^{P_w} - 1} \right].
 \end{aligned} \tag{36}$$

Заметим, что J_w также не зависит от расположения границы раздела между узлами. Аналогично, на «восточной» грани e контрольного объема

$$J_e = F_e \left[\Phi_E + \frac{\Phi_E - \Phi_P}{e^{P_e} - 1} \right], \tag{37}$$

где $F_e = r_e(\rho u_\varphi)_e$, $P_e = \frac{r_e(\rho u_\varphi)_e \sin \theta}{\Gamma_e} (\delta\varphi)_e$, Φ_E – значение Φ в узле E .

Подставим полученные выражения суммарных потоков (31), (32), (34) – (37) на гранях контрольного объема в уравнение (18). Окончательный вид дискретного аналога:

$$a_P \Phi_P = a_T \Phi_T + a_B \Phi_B + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + b, \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_P &= a_P^0 + a_T + a_B + a_S + a_N + a_W + a_E - \Psi_P \Delta V, \\
 a_T &= \frac{F_t}{e^{P_t} - 1} \Delta\theta \Delta\varphi, \quad a_B = \frac{e^{P_b}}{e^{P_b} - 1} F_b \Delta\theta \Delta\varphi, \quad a_S = \frac{F_s}{e^{P_s} - 1} \Delta r \Delta\varphi, \\
 a_N &= \frac{e^{P_n}}{e^{P_n} - 1} F_n \Delta r \Delta\varphi, \quad a_W = \frac{F_w}{e^{P_w} - 1} \Delta r \Delta\theta, \quad a_E = \frac{e^{P_e}}{e^{P_e} - 1} F_e \Delta r \Delta\theta, \\
 a_P^0 &= \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t}, \quad b = a_P^0 \Phi_P^0 + \Psi_C \Delta V.
 \end{aligned}$$

Полученный дискретный аналог для обобщенного дифференциального уравнения может быть использован для численного моделирования конвективного тепло-массо-переноса в условиях ламинарных и турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости на криволинейных сетках в случае использования сферических координат. Расчетные формулы получены на основе точных решений уравнений переноса, поэтому при их использовании для расчетов повышается точность результатов, что является важным аргументом в пользу рассмотренного метода дискретизации при численном моделировании на основе уравнений Навье – Стокса.

Работа поддержана Правительством Российской Федерации (акт № 211), договора № 02.А03.21.0011.

Литература

1. Боков, А.В. Дискретизация дифференциального уравнения конвекции и диффузии на основе метода контрольного объема / А.В. Боков, А.А. Клячин, М.А. Корытова // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2016. – № 4. – С. 25–43.
2. Берковский, Б.М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б.М. Берковский, В.К. Полевиков. – Минск: Университетское, 1988.

3. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Патанкар, С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах / С.В. Патанкар. – М.: Издательство МЭИ, 2003.
5. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1 / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991.
6. Белова, О.В. Метод контрольного объема для расчета гидравлических сетей / О.В. Белова, В.Ю. Волков, А.П. Скибин // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Т. 5. – С. 1–14.
7. Heiss, A. Numerische und experimentelle Untersuchungen der laminaren und turbulenten Konvektion in einem geschlossenen Behälter. Dissertation / A. Heiss. – München: Lehrstuhl A für Thermodynamik, Technische Universität München, 1987.
8. Будак, Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1965.
9. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984.

Александр Викторович Боков, кандидат физико-математических наук, кафедра «Информационные технологии и правовое регулирование управления», Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, филиал в г. Пятигорске (г. Пятигорск, Российская Федерация), av_bokov@mail.ru.

Марина Александровна Корытова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математический анализ и методика преподавания математики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sma.59@mail.ru.

Александр Борисович Самаров, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), samarovab@susu.ru.

Поступила в редакцию 31 августа 2018 г.

MSC 80A20

DOI: 10.14529/mmp190108

NUMERICAL MODELLING OF CONVECTIVE HEAT AND MASS TRANSFER IN SPHERICAL COORDINATES

A. V. Bokov¹, M. A. Korytova², A. B. Samarov²

¹Pyatigorsk Branch of Plekhanov Russian University of Economics, Pyatigorsk, Russian Federation

²South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mails: av_bokov@mail.ru, korytovama@susu.ru, sma.59@mail.ru

The aim of the research is to construct a discrete analogue of the generalized differential equation describing convection in a viscous incompressible fluid in spherical coordinates. The mathematical model of convective heat and mass transfer in a viscous incompressible

fluid is given by a system of differential equations derived from the equations of hydrodynamics, heat and mass transfer. These equations satisfy the generalized conservation law, which is described by a differential equation for the generalized variable. The control volume method is used to obtain a discrete analogue of the differential equation. The computational domain is divided into a multiplicity of control volumes with a node in each of them. As a result, a discrete analogue is obtained that relates the value of the generalized variable at the node point to its values at neighboring nodes. The method guarantees strict compliance of conservation laws both in the entire calculation area and in any part of it. To apply the best approximation of the profiles of the generalized variable, there are exact solutions of the conservation equation separately for each coordinate. The physical meaning of exact solutions is briefly explained. As a result, a discrete analogue is constructed for the generalized differential equation using the obtained analytical solutions.

Keywords: mathematical model; convection; generalized differential equation; discrete analogue; control volume.

The work was supported by Act 211 Government of the Russian Federation, contract no. 02.A03.21.0011.

References

1. Bokov A.V., Klyachin A.A., Korytova M.A. [Discretization of Differential Equations of Convection and Diffusion Based on Control Volume Method]. *Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*, 2016, no. 4, pp. 25–43. (in Russian)
2. Berkovskiy B.M., Polevikov V.K. *Vychislitelnyy eksperiment v konveksii* [Computing Experiment in Convection]. Minsk, Universitetskoe, 1988. (in Russian)
3. Patankar S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical Heat Transfer and Fluid Flow]. Moscow, Energoatomizdat, 1984. (in Russian)
4. Patankar S.V. *Chislennoye resheniye zadach teploprovodnosti i konvektivnogo teploobmena pri techenii v kanalakh* [Computation of Conduction and Duct Flow Heat Transfer]. Moscow, Izdatelstvo MEI, 2003. (in Russian)
5. Fletcher K. *Vychislitel'nyye metody v dinamike zhidkostey* [Computational Methods for Fluid Dynamics]. Moscow, Mir, 1991. (in Russian)
6. Belova O.V., Volkov V.Yu., Skibin A.P. [Control Volume Method for Calculation of Hydraulic Networks]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2013, no. 5, pp. 1–14. (in Russian)
7. Heiss A. *Numerische und experimentelle Untersuchungen der laminaren und turbulenten Konvektion in einem geschlossenen Behälter. Dissertation.* Munchen: Lehrstuhl A für Thermodynamik, Technische Universität München, 1987. (in Germany)
8. Budak B.M., Fomin S.V. *Kratnye integraly i ryady* [Multiple Integrals and Series]. Moscow, Nauka, 1965. (in Russian)
9. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka, 1984. (in Russian)

Received August 31, 2018