

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС  
ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ЭКСТРУЗИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ  
В ГИБКИХ МНОГОАССОРТИМЕНТНЫХ ПРОИЗВОДСТВАХ  
ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ****Т.Б. Чистякова<sup>1</sup>, А.Н. Полосин<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный технологический институт,  
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Разработаны математические модели экструзионных процессов и программный комплекс, помогающий управленческому производственному персоналу решать задачи ресурсоэнергосберегающего управления экструдерами, применяемыми в гибких многоассортиментных производствах упаковочных полимерных материалов. Для комплексной оценки производительности, энергопотребления процесса и показателей качества материала в экструдерах, отличающихся аппаратной гибкостью и сложностью структуры потоков, предложен комбинированный метод моделирования, базирующийся на использовании статических и динамических моделей. Программный комплекс настраивается на метод производства, тип продукции, требования к производительности, энергопотреблению. Он включает банк данных характеристик экструзионных процессов, модуль выбора аппаратного оформления процесса, конструктор виртуальных моделей шнеков экструдеров, подсистему структурно-параметрического синтеза математической модели и расчета выходных параметров процесса, подсистему визуализации результатов, в частности, в виде трендов выходных параметров и 3D графиков их зависимостей от управляющих воздействий. Тестирование комплекса по данным производств поливинилхлоридных, полиэтиленовых пленок на заводах в России, Германии подтвердило его работоспособность и возможность использования в качестве эффективного инструмента поддержки принятия решений при определении конфигураций и режимов работы экструдеров, обеспечивающих заданные потребительские характеристики продукции.

*Ключевые слова:* математические модели; численные методы; программный комплекс; экструзия; полимерные материалы.

**Сокращения**

ВНП – включения нерасплавленного полимера; БД – база данных; БПр – база правил; ДП – деструкционные полосы; ММ – математическая модель; ПВХ – поливинилхлорид; ПК – программный комплекс; ПЛ – производственная линия; ПМ – полимерный материал; ПП – полипропилен; ПС – полистирол; ПЭНП – полиэтилен низкой плотности; СВП – среднее время пребывания полимера в экструдере; ТГМ – типовые гидродинамические модели; УВ – управляющие воздействия; ЧТ – черные точки; ЭП – экструзионный процесс.

EZ – транспортный элемент; KE – смесительный элемент; SC – элемент с непрерывной нарезкой и постоянной глубиной канала; SP – элемент с непрерывной нарезкой и уменьшающейся глубиной канала; ST – элемент с ограничительным кольцом.

## Введение

Современные экструзионные и экструзионно-каландровые производства пленочных и листовых ПМ, применяемых для упаковки фармацевтических препаратов и пищевых продуктов, являются крупнотоннажными и энергоемкими высокотехнологичными системами непрерывного действия. Они характеризуются широким ассортиментом продукции, многостадийностью, гибкостью аппаратного оформления и, как следствие, разнообразием применяемого оборудования, сложными связями между параметрами сырья, оборудования, технологического режима и показателями эффективности производственного процесса, а также неполнотой информации о показателях эффективности. Эффективность функционирования таких систем оценивается прежде всего потребительски-ориентированными характеристиками качества ПМ, производительностью и энергопотреблением ПЛ. Важнейшим для потребителей показателем качества упаковочных ПМ является внешний вид, характеризующий наличие на поверхности ПМ различных дефектов, наименее приемлемыми из которых являются ЧТ, желто-коричневые ДП, ВНП, гелики, неравномерность окраски. Частые переходы ПЛ на новые типы ПМ и производительность (в среднем один раз в сутки), отсутствие системы мониторинга показателей качества полуфабрикатов на всех стадиях производства, множество возможных причин возникновения поверхностных дефектов, недостаток опыта и времени для анализа производственных данных приводят к принятию операторами ошибочных управленческих решений и увеличению невозвратных отходов (бракованного ПМ). Поэтому основной тенденцией инновационного развития международных промышленных производств ПМ является разработка и внедрение гибридных компьютерных систем для эффективной поддержки принятия решений по перенастройке и управлению ПЛ, одним из компонентов которых являются детерминированные ММ [1, 2]. ММ описывают физические процессы, протекающие на ключевых стадиях производства, и выступают в качестве «виртуальных датчиков», рассчитывая показатели эффективности, возможности автоматического контроля которых ограничены. Данный подход позволяет осуществить комплексную оценку показателей эффективности процесса, что повышает качество управления им и обеспечивает ресурсо- и энергосбережение в производстве ПМ.

Ключевую роль в производстве ПМ играет ЭП. Он предназначен для перевода сыпучего полимера в однородную вязкотекучую массу (экструдат), которая в дальнейшем формуется в пленку или лист. Экструдат получается путем плавления полимера, перемешивания, нагрева и выдавливания расплава через формующую головку [3]. ЭП реализуется в шнековых аппаратах – экструдерах, которые отличаются множеством типов и аппаратной гибкостью (переменностью конфигураций шнеков) вследствие многообразия методов производства и типов ПМ. ЭП определяют прежде всего характеристики внешнего вида ПМ. Нерациональная конфигурация экструдера и/или режим экструзии приводят к нарушению условий движения, плавления, перемешивания полимера в канале шнека. Если следствием этого нарушения является образование застойных зон и увеличение СВП при высокой температуре, то в полимере развивается термическая деструкция, накопление продуктов которой необратимо изменяет цвет экструдата и способствует появлению на поверхности ПМ ЧТ и ДП. При изготовлении ПМ на экструзионно-каландровой ПЛ важное значение приобретает синхронизация работы экструдера и каландра [4]. Она осуществляется опера-

тором путем изменения производительности экструдера по результатам визуальной оценки запаса экструдата в питающем межвалковом зазоре каландра. В производстве цветных ПМ такая корректировка производительности приводит к отклонению цветовых характеристик ПМ от эталонных значений и требует постоянной коррекции УВ (расходов жидких красителей, подаваемых в экструдер) в зависимости от производительности, которая не контролируется [5]. ЭП является сложным объектом управления и характеризуется неполнотой информации о ключевых характеристиках (производительности, прямых показателях качества экструдата, оцениваемых оператором визуально по его внешнему виду). Это делает актуальной разработку физически обоснованных ММ ЭП и ПК, помогающего производственному персоналу решать задачи ресурсоэнергосберегающего управления экструдерами.

Анализ ММ ЭП показал, что они являются детерминированными и включают уравнения балансов массы, сил и энергии для твердой фазы и расплава, реологическое уравнение состояния расплава, а также уравнения межфазного материального и теплового баланса (для описания плавления). Моделируются механизмы плавления, наблюдаемые в экструдерах различных типов: пленочное плавление (плавление непрерывной твердой фазы – пробки) [6–11]; дисперсное плавление (плавление диспергированной в расплаве твердой фазы) [12, 13]. ММ позволяют рассчитать длину зоны плавления, профили ширины пробки, давления и температуры в пробке, толщины пленок расплава, образующихся на поверхностях корпуса и шнека (для пленочного плавления), профили концентрации и температуры твердых частиц (для дисперсного плавления), поля скоростей потоков, напряжений вязкого трения в потоках, давления и температуры расплава. Область применения созданных ММ в основном ограничивается исследованием закономерностей процессов тепломассопереноса полимеров в экструдерах отдельных типов с классической геометрией шнека [14], в отдельных функциональных зонах канала шнека (транспортировка твердого полимера [15], плавление [16], транспортировка расплава [17–20]) или в каналах отдельных элементов модульных шнеков [21]. Результаты моделирования позволяют получить информацию, необходимую для проектирования экструзионного оборудования, но не для управления качеством экструдата. ММ ЭП, как правило, реализуются в универсальных или проблемно-ориентированных средах моделирования (например, ANSYS Polyflow [22] или Ludovic [23]), которые слабо ориентированы на решение задач управления, обладают сложным для производственного персонала пользовательским интерфейсом, являются закрытыми, имеют относительно высокую стоимость приобретения и сопровождения. Для экструдеров различных типов предложены подходы к оценке СВП, от которого зависит качество экструдата. Они основываются на применении как отдельных ТГМ (например, однопараметрической диффузионной модели [24]), так и сложных комбинированных моделей структуры потоков, построенных на основе ТГМ (моделей идеального смешения и вытеснения, ячеечных моделей), в том числе с введением рециркулирующих потоков [25, 26]. ТГМ описывают зоны экструдера с различным механизмом и степенью перемешивания [27]. Рециклы моделируют возвратные потоки, в частности, утечки, возникающие вследствие сопротивления головки экструдера. Таким образом, разработанные ММ не позволяют дать комплексную оценку качества экструдата, производительности и энергопотребления экструдеров в зависимости от УВ для различных типов полимеров с учетом как основных закономерностей ЭП (переход в вязкотекучее состояние, аномалия вязкости,

неизотермический характер), так и сложной конструкции экструдеров (модульность шнека, утечки, возможность осцилляции шнека).

Научной задачей работы является разработка ММ, описывающих физические процессы, протекающие в аппаратно гибких экструдерах разных типов, и создание на их основе ПК, позволяющего решать задачи поиска конфигураций шнеков и УВ на экструдеры, обеспечивающих заданное качество экструдата при выполнении требований к производительности и энергопотреблению для различных типов ПМ.

## 1. Постановка задач управления ЭП

Анализ методов производства и типов ПМ, типов, конфигураций шнеков, геометрических и режимных параметров экструдеров, характеристик экструдата позволил предложить информационное описание ЭП как объекта управления в виде совокупности векторов входных параметров  $X$ , варьируемых параметров  $V$ , возмущающих воздействий  $F$  и выходных параметров  $Y$

$$Y = \Phi(X, V, F), Y = \{G, E, T_{ext}, \tau_{av}, Q_{ext}\}, Q_{ext} = \{\gamma_{av}, I_d, \varphi_{ext}, L_{ext}, a_{ext}, b_{ext}, \Delta E_{ext}\},$$

$$X = \{M_{prod}, T_{mater}, M_{extrud}, P_0, T_0, T_{scr}\}, T_{mater} = \{T_{polym}, Q_{m0}\}, Q_{m0} = \{\delta_{m0}, w_{m0}, n_{black}^{max}, n_{umelt}^{max}, n_{gel}^{max}, L_m^*, a_m^*, b_m^*, \Delta E_m^{max}\}, M_{extrud} = \{T_{extrud}, D, L, S_0, A_{scr}, T_{head}, \Gamma_{head}\},$$

$$V = \{C_{scr}, U\}, C_{scr} = \{T_e^j, j = 1, \dots, N_e\}, U = \{U_b, U_a\},$$

$$U_b = \{N, T_{bk}, k = 1, \dots, n_T\}, U_a = \{G_{ci}, i = 1, \dots, n_c\}, F = \{G_{wast}, \Psi_{ext}\},$$

где  $G$  – производительность, кг/с;  $E$  – удельное энергопотребление, Дж/кг;  $T_{ext}$  – температура экструдата, °С;  $\tau_{av}$  – СВП, с;  $Q_{ext}$  – показатели качества экструдата (средняя степень смешения  $\gamma_{av}$  и доля твердой фазы  $\varphi_{ext}$ , индекс деструкции  $I_d$ , цветовые координаты в пространстве CIE Lab  $L_{ext}$ ,  $a_{ext}$ ,  $b_{ext}$ , отклонение цвета от эталона  $\Delta E_{ext}$ );  $M_{prod}$  – метод производства ПМ ( $M_1$  – плоскощелевая экструзия,  $M_2$  – раздувная экструзия,  $M_3$  – каландрование);  $T_{mater}$  – тип ПМ, определяемый типом полимера  $T_{polym}$  и требованиями к качеству  $Q_{m0}$  (толщине  $\delta_{m0}$ , ширине  $w_{m0}$ , числу ЧТ  $n_{black}^{max}$ , ВВП  $n_{umelt}^{max}$  и геликов  $n_{gel}^{max}$  на 10 м<sup>2</sup> полотна, координатам  $L_m^*$ ,  $a_m^*$ ,  $b_m^*$  и отклонению  $\Delta E_m^{max}$  цвета);  $M_{extrud}$  – марка экструдера;  $P_0$ ,  $T_0$  – давление (Па) и температура (°С) полимера на входе в канал шнека;  $T_{scr}$  – температура шнека, °С;  $T_{extrud}$  – тип экструдера, определяемый числом шнеков  $n_{scr}$  и характером их движения ( $E_1$  – одношнековый экструдер,  $E_2$  – осциллирующий экструдер,  $E_3$  и  $E_4$  – двухшнековые экструдеры с односторонним и встречным вращением шнеков);  $D$ ,  $L$  – диаметр и длина шнека, м;  $S_0$  – амплитуда осцилляции шнека (в экструдере типа  $E_2$ ), м;  $A_{scr}$  – межосевое расстояние шнеков (в экструдерах типов  $E_3$  и  $E_4$ ), м;  $T_{head}$  – тип формирующей головки ( $D_1$  – плоскощелевая головка,  $D_2$  – кольцевая головка,  $D_3$  – фильера);  $\Gamma_{head}$  – геометрические параметры головки, набор которых определяется ее типом, а значения (для головок типов  $D_1$  и  $D_2$ , в которых расплав формируется непосредственно в ПМ) – заданной толщиной  $\delta_{m0}$  и шириной  $w_{m0}$  ПМ;  $C_{scr}$  – конфигурация шнека;  $U$  – УВ (основные  $U_b$ , дополнительные  $U_a$ );  $T_e^j$  – тип  $j$ -го элемента шнека;  $N_e$  – число элементов;  $N$  – частота вращения шнека, об/с;  $T_{bk}$  – температура  $k$ -й тепловой зоны корпуса, °С;  $n_T$  – число тепловых зон;  $G_{ci}$  – расход  $i$ -го красителя, кг/с;  $n_c$  – число красителей;  $G_{wast}$  – расход потока возвратных отходов;  $\Psi_{ext}$  – запас экструдата ( $M_{prod} = M_3$ ).

В экструдерах типа  $E_1$  в большинстве случаев наблюдается плавление по механизму Маддока – Стрита [3]. На поверхности уплотненной твердой фазы (пробки) полимера, контактирующей с нагретой внутренней поверхностью корпуса, образуется пленка расплава, которая перетекает в канал шнека, смещая пробку к пассивной стенке нарезки. У активной (толкающей) стенки нарезки образуется область циркулирующего расплава. В экструдерах типов  $E_2 - E_4$  непрерывная твердая фаза не образуется вследствие разрушающего действия месительных зубьев корпуса (в экструдере типа  $E_2$ ) или витков нарезки сопряженного шнека (в экструдерах типов  $E_3$  и  $E_4$ ). Плавающие твердые частицы полимера распределены в виде дисперсной фазы в расплаве [13, 28]. После исчезновения твердой фазы расплав нагревается, перемешивается и подается в головку. Усложнение конструкции экструдера приводит к повышению сложности структуры потоков в зоне транспортировки расплава. В экструдере типа  $E_1$  сосуществуют поступательный поток в канале шнека и поток утечки через радиальный зазор между корпусом и витками нарезки шнека. В экструдере типа  $E_2$  на них накладывается поток утечки через осевые прорези в витках нарезки. Экструдеры типов  $E_3$  и  $E_4$  характеризуются наличием поступательного потока и потоков утечек через радиальный зазор, межвалковые и боковые зазоры зацепления шнеков.

Аппаратная гибкость экструдеров позволяет осуществить не только параметрическое управление ЭП (путем изменения УВ), но и структурное управление (путем изменения конфигурации шнека при перенастройке ПЛ на новый тип ПМ). Конфигурация шнека изменяется путем изменения порядка установки элементов различных типов вдоль оси шнека. Основными типами элементов являются: для экструдера типа  $E_1$  элементы типов SC и SP; для экструдера типа  $E_2$  элементы типов EZ (однозаходная нарезка с одной осевой прорезью), KE (двухзаходная нарезка с тремя прорезями), ST и SC. Комбинируя элементы одного типа в секции и комбинируя секции различных типов, можно настраивать экструдер на переработку различных типов полимеров.

На основе информационного описания ЭП сформулированы задачи управления ЭП в основных режимах функционирования ПЛ:

1. Задача управления при перенастройке ПЛ, реализующей метод производства  $M_{prod}$ , на новое задание  $S_P = \{T_{mater}, G_0, E^{max}\}$  заключается в следующем:

выбрать марку экструдера  $M_{extrud}$ , сформировать конфигурацию его шнека  $C_{scr}$  и диапазоны допустимых значений основных УВ  $[(U_b^*)^{min}, (U_b^*)^{max}] \subset [U_b^{min}, U_b^{max}]$ , которые обеспечивают требуемое качество экструдата  $\gamma_{av} \geq \gamma^{min}$ ,  $I_d \leq I_d^{max}$ ,  $\varphi_{ext} \leq \varphi_{ext}^{max}$  при выполнении ограничений на характеристики экструдера  $G \geq G_0$ ,  $E \leq E^{max}$ ;

определить доли расходов красителей в производительности  $k_i^* = f_1(L_m^*, a_m^*, b_m^*)$ ,  $i = 1, \dots, n_c$  и расходы красителей  $G_{ci}^* = f_2(k_i^*, G_0)$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ , которые обеспечивают соответствие цвета ПМ эталону  $\Delta E_m \leq \Delta E_m^{max} \pm \Delta_{max}$ ;

определить эталонные цветовые координаты экструдата  $L_{ext}^*$ ,  $a_{ext}^*$ ,  $b_{ext}^*$  при долях расходов красителей  $k_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ , если  $M_{prod} = M_3$ .

2. Задача управления в режиме изготовления ПМ при подаче возвратных отходов заключается в определении долей расходов красителей  $k_i^* = f_1(L^*, a^*, b^*)$ ,  $i = 1, \dots, n_c$  и расходов  $G_{ci}^* = f_2(k_i^*, G_0)$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ , которые обеспечивают соответствие цвета экструдата эталону  $\Delta E_{ext} \leq \Delta E_{ext}^{max} \pm \Delta_{max}$ .

3. Задача управления в режиме изготовления каландрированного ПМ в условиях колебаний запаса экструдата заключается в расчете текущей производительности

экструдера  $G$  для заданной частоты вращения шнека  $N \in [(N^*)^{\min}; (N^*)^{\max}]$  и определении расходов красителей  $G_{ci}^* = f_2(k_i^*, G)$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ , которые обеспечивают соответствие цвета экструдата эталону  $\Delta E_{ext} \leq \Delta E_{ext}^{\max} \pm \Delta_{\max}$ .

В постановках задач использованы следующие обозначения:  $G_0$  – производительность ПЛ, кг/с;  $E^{\max}$  – предельное энергопотребление, Дж/кг;  $U_b^{\min}$ ,  $U_b^{\max}$  – регламентные ограничения на основные УВ;  $\gamma^{\min}$ ,  $I_d^{\max}$ ,  $\varphi_{ext}^{\max}$  – предельные значения показателей качества экструдата, зависящие от ограничений на число дефектов поверхности ПМ (геликов, ЧТ и ВВП);  $\Delta E_m$  – отклонение цвета ПМ от эталона;  $\Delta_{\max}$  – погрешность измерения цвета;  $\Delta E_{ext}^{\max}$  – предельное отклонение цвета экструдата от эталона, определяемое в зависимости от требования к цвету ПМ ( $\Delta E_m^{\max}$ ).

Выполнение требований к степени смешения, индексу деструкции, доле твердой фазы полимера в экструдате гарантирует соблюдение ограничений на число поверхностных дефектов ПМ – геликов, ЧТ, ВВП соответственно.

При плоскощелевой и раздувной экструзии нагрев полимера осуществляется только в экструдере, поэтому цвет ПМ не отличается от цвета экструдата, который и сравнивается с заданным цветовым эталоном. При каландровании экструдат дополнительно нагревается на каландре, что приводит к отличию цвета ПМ от цвета экструдата. Поэтому при каждом переходе ПЛ на новый эталон цвета ПМ определяются соответствующие ему эталонные цветовые координаты экструдата [5, 29]. Таким образом, справедливы соотношения:  $L^* = L_m^*$ ,  $a^* = a_m^*$ ,  $b^* = b_m^*$ ,  $\Delta E^{\max} = \Delta E_m^{\max}$ , если  $M_{prod} = M_1 \vee M_2$ ;  $L^* = L_{ext}^*$ ,  $a^* = a_{ext}^*$ ,  $b^* = b_{ext}^*$ ,  $\Delta E^{\max} = \Delta E_{ext}^{\max}$ , если  $M_{prod} = M_3$ .

## 2. ММ процессов, протекающих в экструдерах

Анализ подходов к моделированию физических процессов, протекающих в экструдерах различных типов, позволил предложить комбинированный метод моделирования ЭП. Метод базируется на использовании следующих ММ: статической ММ для расчета параметров состояния фаз полимера в экструдере, производительности и энергопотребления экструдера; динамической ММ для оценки СВП, от которого зависят показатели качества экструдата; ММ для вычисления показателей качества. Метод позволяет учесть переменность конфигураций модульных шнеков экструдеров.

Построение статической ММ осуществляется на основе блочного принципа. ММ включает следующие блоки: ММ плавления в канале элемента шнека, позволяющая рассчитать распределения параметров состояния (скоростей, давлений, температур) фаз полимера по каналу; ММ течения расплава в канале элемента шнека для расчета распределений параметров состояния расплава по каналу; ММ течения расплава в зазорах и прорезях в нарезке элемента, позволяющие рассчитать расходы потоков утечек; реологическая модель, позволяющая рассчитать вязкость полимера; ММ теплообмена полимера с корпусом и шнеком, позволяющие рассчитать плотности соответствующих тепловых потоков при различных тепловых режимах экструдеров; ММ течения расплава в головке, позволяющая рассчитать давление на входе в головку.

При моделировании плавления и течения приняты общие допущения об обратном движении корпуса и шнека, малости кривизны канала элемента шнека, полном заполнении канала, стационарности процесса, установившемся движении полимера по длине канала, независимости теплофизических свойств фаз полимера от температуры и давления [30]. Расплав рассматривается как несжимаемая неупругая жид-

кость, течение которой характеризуется отсутствием радиального потока, инерционных и массовых сил, скольжения по стенкам канала. Теплопередача в расплаве характеризуется следующими условиями: по длине канала преобладает конвективный механизм переноса теплоты, по глубине канала – перенос теплоты теплопроводностью, по ширине канала профиль температуры полностью развит.

Плоская модель канала (на примере EZ-элемента шнека экструдера типа  $E_2$ ) представлена на рис. 1. Процесс протекает в прямоугольном канале с подвижной верхней крышкой 1 (внутренняя поверхность корпуса, развернутая на плоскость). Неподвижные боковые стенки 2 и дно 3 канала образованы витками нарезки и поверхностью сердечника элемента шнека соответственно. Канал  $j$ -го элемента характеризуется следующими геометрическими параметрами: глубиной на входе  $H_{in}^j$  и выходе  $H_{out}^j$  (в данном случае  $H_{in}^j = H_{out}^j$ ); шириной  $W^j$ ; длиной  $Z_e^j$ ; толщиной боковой стенки  $e^j$ ; радиальным зазором  $\delta_0^j$ ; шириной прорези  $s^j$ . Крышка 1 движется со скоростью, которая равна скорости корпуса  $V_b$  (в обратном движении), включающей скорость вращения  $V_{rot}$  и скорость осцилляции  $V_{osc}$ . Для описания движения используется декартова система координат, оси которой ориентированы следующим образом:  $x$  – по ширине канала;  $y$  – по глубине;  $z$  – по длине. На основе данной модели могут быть получены модели каналов элементов экструдера типа  $E_1$ : модель канала SC-элемента ( $s^j = 0, V_{osc} = 0$ ); модель канала SP-элемента ( $H_{in}^j > H_{out}^j, s^j = 0, V_{osc} = 0$ ).

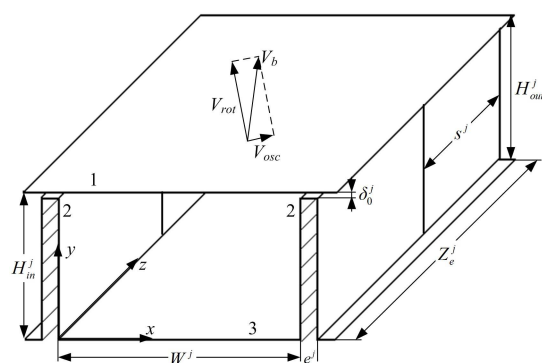


Рис. 1. Плоская модель канала элемента шнека экструдера

При моделировании ЭП в экструдерах типов  $E_3$  и  $E_4$  рассматривается поведение полимера в каждой С-образной секции канала элемента шнека, образованной витками нарезки и поверхностью сердечника элемента, внутренней поверхностью корпуса и замкнутой витками нарезки сопряженного элемента второго шнека. Секция разворачивается на плоскость, для описания движения используется система координат  $(x, y, z)$ , аналогичная описанной выше. Конец С-образной секции сообщается с соседними секциями посредством двух боковых и одного межвалкового зазора. Движение полимера внутри С-образной секции обусловлено относительным движением крышки (стенки корпуса), боковых стенок (витков нарезки) и дна (поверхности сердечника) канала секции, перемещающихся от формирующей головки к загрузочной воронке.

В зависимости от типа экструдера для расчета характеристик плавления применяется модель пленочного плавления (если  $T_{extrud} = E_1$ ) [31] или модель дисперсного плавления (если  $T_{extrud} = E_2 \vee E_3 \vee E_4$ ). ММ, описывающая дисперсное плавление полимера в канале  $j$ -го элемента шнека экструдера типа  $E_2$ , представляет собой систему балансовых уравнений и граничных условий:

– уравнения для расчета радиуса  $R_s^j$  и температуры  $T_s^j$  твердых частиц полимера, диспергированных в расплаве

$$\rho_s \bar{v}_{mz}^j \frac{dR_s^j}{dz} = -\xi_{s-m}^j, \quad z^{j-1} < z \leq z^{j-1} + Z_e^j, \quad (1)$$

$$\varphi_s^j \rho_s c_s \bar{v}_{mz}^j \frac{dT_s^j}{dz} = \zeta_s^j n_s \alpha_s^j (T_{s-m} - T_s^j) - \zeta_s^j n_s \xi_{s-m}^j c_s (T_{s-m} - T_s^j); \quad (2)$$

– уравнения для расчета скоростей поступательного  $v_{mz}^j$  и циркуляционного  $v_{mx}^j$  потоков, давления  $P_m^j$  и температуры  $T_m^j$  расплава

$$(1 - \varphi_s^j) \int_0^{H^j} v_{mx}^j dy = \dot{Q}_\delta^j + h_f^j \dot{Q}_c^j, \quad (1 - \varphi_s^j) W^j \int_0^{H^j} v_{mz}^j dy = Q_m^j, \quad (3)$$

$$\frac{\partial P_m^j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta^j \frac{\partial v_{mx}^j}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial P_m^j}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta^j \frac{\partial v_{mz}^j}{\partial y} \right), \quad 0 < y < H^j, \quad (4)$$

$$(1 - \varphi_s^j) \rho_m c_{Pm} v_{mz}^j \frac{\partial T_m^j}{\partial z} = \lambda_m \frac{\partial^2 T_m^j}{\partial y^2} - \zeta_s^j n_s \alpha_m^j (T_m^j - T_{s-m}) - \zeta_s^j n_s \xi_{s-m}^j c_{Pm} \times \\ \times (T_m^j - T_{s-m}) + F_\varphi^j \eta^j \left[ \left( \frac{\partial v_{mx}^j}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{mz}^j}{\partial y} \right)^2 \right], \quad z^{j-1} < z \leq z^{j-1} + Z_e^j; \quad (5)$$

– уравнение для расчета расхода потока полимера через канал  $Q^j$  (без учета утечек)

$$Q = z_f^j Q^j - (Q_\delta^j + h_f^j Q_c^j); \quad (6)$$

– уравнение для расчета удельной скорости плавления  $\xi_{s-m}^j$  (условие Стефана)

$$\alpha_m^j (T_m^j - T_{s-m}) = \alpha_s^j (T_{s-m} - T_s^j) + \xi_{s-m}^j [(1 - h_p) c_s (T_{s-m} - T_s^j) + h_p r]; \quad (7)$$

– граничные условия на входе в канал элемента

$$z = 0 : R_s^j = d_s/2, \quad \varphi_s^j = \varphi_{s0}, \quad T_s^j = T_0, \quad P_m^j = P_0, \quad T_m^j = T_{s-m}, \quad j = 1, \quad (8)$$

$$z = z^{j-1} : R_s^j = R_{s\ out}^{j-1}, \quad \varphi_s^j = \varphi_{s\ out}^{j-1}, \quad T_s^j = T_{s\ out}^{j-1}, \quad P_m^j = P_{m\ out}^{j-1}, \quad (9)$$

$$T_m^j = T_{m\ out}^{j-1}, \quad j = 2, \dots, N_e^{melt};$$

– граничные условия на дне и крышке канала

$$y = 0 : v_{mx}^j = 0, \quad v_{mz}^j = 0, \quad \lambda_m \frac{\partial T_m^j}{\partial y} = q_{scr}, \quad (10)$$

$$y = H^j :$$

$$v_{mx}^j = V_{bx} = -V_{rot} \sin \varphi^j + V_{osc} \cos \varphi^j = \pi N (-D \sin \varphi^j + S_0 \sin \Phi_{osc} \cos \varphi^j),$$

$$v_{mz}^j = V_{bz} = V_{rot} \cos \varphi^j + V_{osc} \sin \varphi^j = \pi N (D \cos \varphi^j + S_0 \sin \Phi_{osc} \sin \varphi^j), \quad (11)$$

$$\lambda_m \frac{\partial T_m^j}{\partial y} = q_{bk}, \quad k = 1, \dots, n_T^{melt},$$



где  $\rho_s, \rho_m$  – плотность твердой фазы и расплава, кг/м<sup>3</sup>;  $\bar{v}_{mz}^j$  – средняя по глубине канала скорость поступательного потока, м/с;  $z^{j-1}$  – координата входа в канал  $j$ -го элемента, м;  $\varphi_s^j = f_3(R_s^j, n_s)$ ,  $\varphi_{s0}$  – текущая и начальная объемная доля частиц;  $c_s, c_{Pm}$  – средняя удельная теплоемкость твердой фазы и расплава, Дж/(кг·°C);  $\zeta_s^j = f_4(R_s^j)$  – площадь поверхности частицы, м<sup>2</sup>;  $n_s = f_5(d_s, \varphi_{s0})$  – числовая объемная концентрация частиц, 1/м<sup>3</sup>;  $\alpha_s^j = f_6(R_s^j, \lambda_s)$  – коэффициент теплопередачи от границы раздела к частице, Вт/(м<sup>2</sup>·°C);  $T_{s-m}$  – температура перехода полимера в вязкотекучее состояние, °C;  $H^j = f_7(H_{in}^j, H_{out}^j, Z_e^j, z)$  – текущая глубина канала, м;  $\dot{Q}_\delta^j, \dot{Q}_c^j$  – интенсивности утечек расплава через радиальный зазор и прорези в нарезке, м<sup>2</sup>/с;  $h_f^j$  – коэффициент, настраивающий ММ на тип нарезки элемента (непрерывная ( $h_f^j = 0$ ), прерываемая прорезями ( $h_f^j = 1$ ));  $Q_m^j = f_8(\varphi_s^j, Q^j)$  – расход поступательного потока расплава, м<sup>3</sup>/с;  $\eta^j$  – вязкость, Па·с;  $\lambda_s, \lambda_m$  – теплопроводность твердой фазы и расплава, Вт/(м·°C);  $\alpha_m^j = f_9(R_s^j, \rho_m, c_{Pm}, \lambda_m, \bar{v}_{mz}^j)$  – коэффициент теплопередачи от расплава к границе раздела, Вт/(м<sup>2</sup>·°C);  $F_\varphi^j = f_{10}(\varphi_s^j)$  – поправка, учитывающая увеличение диссипации энергии в двухфазной системе «твердые частицы – расплав»;  $Q$  – расход потока полимера через экструдер, соответствующий производительности, м<sup>3</sup>/с;  $z_f^j$  – число заходов нарезки;  $Q_\delta^j, Q_c^j$  – расходы утечек из канала, м<sup>3</sup>/с;  $h_p$  – коэффициент, настраивающий ММ на класс полимера (аморфный ( $h_p = 0$ ), кристаллический ( $h_p = 1$ ));  $r$  – удельная теплота плавления, Дж/кг;  $d_s$  – средний эквивалентный диаметр частиц сырьевого полимера, м;  $R_{sout}^{j-1}, \varphi_{sout}^{j-1}, T_{sout}^{j-1}, P_{mout}^{j-1}, T_{mout}^{j-1}$  – параметры состояния твердой фазы и расплава на выходе из канала ( $j-1$ )-го элемента;  $N_e^{melt}$  – число элементов шнека, из которых состоит зона плавления (определяется номером элемента, в канале которого заканчивается плавление);  $q_{scr}, q_{bk}$  – плотности тепловых потоков от расплава к шнеку и от  $k$ -й тепловой зоны корпуса к расплаву, Вт/м<sup>2</sup>;  $\varphi^j = f_{11}(D, B^j)$  – угол наклона нарезки, рад;  $B^j$  – шаг нарезки, м;  $\Phi_{osc} = f_{12}(N)$  – фаза осцилляции шнека (параметры состояния, рассчитанные при различных значениях фазы осцилляции, усредняются за цикл работы экструдера, соответствующий полному возвратно-поступательному ходу шнека), рад;  $n_T^{melt}$  – число тепловых зон корпуса, соответствующих зоне плавления.

Кроме общих допущений, при построении ММ (1) – (11) принято, что двухфазная система «твердые частицы – расплав» является монодисперсной, частицы представляют собой недеформируемые шары, трение и столкновения между которыми незначительны, отсутствуют процессы дробления и слипания частиц. Поэтому число частиц не изменяется (числовая концентрация  $n_s$  постоянна), а уменьшение доли частиц является следствием уменьшения их радиуса при плавлении. Частицы не движутся поступательно и не вращаются относительно расплава. Влияние циркуляционного движения на температуру частиц пренебрежимо мало. Теплота, подводимая от расплава к твердой фазе, равномерно распределяется по всем частицам, поэтому скорость плавления во всех точках поверхности каждой частицы одинакова. Взаимодействие частиц со стенками канала пренебрежимо мало [32].

Вследствие наличия в канале циркуляционного потока и дополнительного смешительного действия зубьев корпуса (в экструдере типа  $E_2$ ) разброс значений температуры расплава относительно среднего значения в каждом сечении канала невелик. Поэтому уравнение теплового баланса (5) проинтегрировано по координате  $y$  в пределах от 0 до  $H^j$  с учетом уравнений материального баланса по потокам (3), баланса

сил вязкого трения и давления в потоках (4) и граничных условий (10)–(11). В результате получено уравнение притока тепла на участке канала длиной  $dz$  для расчета средней по глубине канала температуры  $\bar{T}_m^j$ :

$$\begin{aligned} \rho_m c_{Pm} Q_m^j \frac{d\bar{T}_m^j}{dz} = W^j (q_{bk} - q_{scr}) - \\ - H^j W^j \left[ \zeta_s^j n_s \alpha_m^j (\bar{T}_m^j - T_{s-m}) + \zeta_s^j n_s \xi_{s-m}^j c_{Pm} (\bar{T}_m^j - T_{s-m}) \right] + \\ + W^j F_\varphi^j \left\{ V_{bx} \tau_{mbx}^j + V_{bz} \tau_{mbz}^j - \frac{1}{1 - \varphi_s^j} \left[ (\dot{Q}_\delta^j + h_f^j \dot{Q}_c^j) \frac{\partial P_m^j}{\partial x} + \frac{Q_m^j}{W^j} \frac{\partial P_m^j}{\partial z} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\tau_{mbx}^j = f_{13} \left( H^j, \frac{\partial P_m^j}{\partial x}, y_{0x}^j \right)$ ,  $\tau_{mbz}^j = f_{14} \left( H^j, \frac{\partial P_m^j}{\partial z}, y_{0z}^j \right)$  – напряжения сдвига, действующие вблизи внутренней поверхности корпуса в циркуляционном и поступательном потоке расплава, Па;  $y_{0x}^j, y_{0z}^j$  – координаты сечений нулевых напряжений сдвига в соответствующих потоках, м (например, в циркуляционном потоке всегда существуют области с различным направлением движения, поэтому градиент скорости  $\frac{\partial v_{mx}^j}{\partial y}$  меняет знак, что приводит к появлению сечения, в котором напряжение равно нулю).

ММ (1) – (4), (6) – (12) настраивается на тип и геометрические параметры каждого элемента шнека, класс и тип полимера и позволяет рассчитать распределения параметров состояния твердой фазы и расплава по длине канала элемента в зависимости от основных управляющих воздействий. В соответствии с условиями сопряжения элементов (9) значения параметров состояния фаз на входе в канал данного элемента равны значениям соответствующих параметров на выходе из канала предыдущего элемента. Аналогичная ММ описывает дисперсное плавление в каналах элементов шнеков экструдеров типов  $E_3$  и  $E_4$ . При этом во втором уравнении (3) и уравнении (6) учитываются расходы утечек расплава через зазоры зацепления шнеков, во второе уравнение (4) вводится градиент скорости поступательного потока по ширине канала, и изменяются кинематические граничные условия.

Окончание зоны плавления определяется условием, когда доля твердой фазы (ширина пробки, отнесенная к ширине канала, при пленочном плавлении или доля частиц в расплаве при дисперсном плавлении) становится меньше предельно допустимого значения  $\varphi_{ext}^{max}$ . Соответствующее значение доли твердой фазы определяет содержание твердой фазы в экструдате  $\varphi_{ext}$ . Если указанное условие не выполняется до конца канала шнека, то экструдат, а значит, и ПМ имеют ВНП:  $\varphi_{ext} = \varphi_{s out}^{Ne}$ .

Перемешивание и нагрев расплава в канале  $j$ -го элемента в зоне транспортировки расплава описываются ММ неизотермического сдвигового течения, обобщенной на все типы экструдеров, включающей уравнения балансов и граничные условия:

– уравнения материального баланса по потокам, баланса сил вязкого трения и давления в потоках, баланса конвективного, диффузионного и диссипативного тепловых потоков для расчета скоростей потоков, давления и температуры расплава

$$\begin{aligned} \int_0^{H^j} v_{mx}^j dy = \dot{Q}_\delta^j + (2 - n_{scr}) h_f^j \dot{Q}_c^j, \quad (2 - n_{scr}) W^j \int_0^{H^j} v_{mz}^j dy + (n_{scr} - 1) \times \\ \times \int_0^{W^j} \int_0^{H^j} v_{mz}^j dy dx = (2 - n_{scr}) Q^j + (n_{scr} - 1) (2Q_s^j + Q_r^j) / z_f^j, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial P_m^j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta^j \frac{\partial v_{mx}^j}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial P_m^j}{\partial z} = (n_{scr} - 1) \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta^j \frac{\partial v_{mz}^j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta^j \frac{\partial v_{mz}^j}{\partial y} \right), \quad (14)$$

$$\rho_m c_{Pm} v_{mz}^j \frac{\partial T_m^j}{\partial z} = \lambda_m \frac{\partial^2 T_m^j}{\partial y^2} + \eta^j (\dot{\gamma}^j)^2, \quad (15)$$

$$\dot{\gamma}^j = \sqrt{\left( \frac{\partial v_{mx}^j}{\partial y} \right)^2 + (n_{scr} - 1) \left( \frac{\partial v_{mz}^j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{mz}^j}{\partial y} \right)^2};$$

– уравнение общего материального баланса для расчета расхода потока через канал

$$Q = n_{scr} \left\{ (2 - n_{scr}) (z_f^j Q^j - h_f^j Q_c^j) + (n_{scr} - 1) z_f^j [V_C^j N - (2Q_s^j + Q_r^j)] - Q_\delta^j \right\}; \quad (16)$$

– граничные условия на входе в канал элемента

$$z = z^{j-1} : P_m^j = P_{mout}^{j-1}, \quad T_m^j = T_{mout}^{j-1}, \quad j = N_e^{melt} + 1, \dots, N_e; \quad (17)$$

– кинематические граничные условия на стенках канала

$$x = 0 : v_{mz}^j = -\pi DN / \cos \varphi^j; \quad x = W^j : v_{mz}^j = -\pi DN / \cos \varphi^j, \quad (18)$$

$$y = 0 : v_{mx}^j = 0, \quad v_{mz}^j = -(n_{scr} - 1) \pi DN / \cos \varphi^j, \quad (19)$$

$$y = H^j : v_{mx}^j = V_{bx} = \pi N [-D \sin \varphi^j + (2 - n_{scr}) S_0 \sin \Phi_{osc} \cos \varphi^j], \quad v_{mz}^j = V_{bz} = \pi N \left\{ (2 - n_{scr}) [D \cos \varphi^j + S_0 \sin \Phi_{osc} \sin \varphi^j] - (n_{scr} - 1) D \tan \varphi^j \sin \varphi^j \right\}, \quad (20)$$

где  $Q_s^j, Q_r^j$  – расходы утечек расплава через боковой и межвалковый зазор зацепления (в экструдерах типов  $E_3$  и  $E_4$ ), м<sup>3</sup>/с;  $\dot{\gamma}^j$  – скорость деформации сдвига расплава, 1/с;  $V_C^j = f_{15} (D, H^j, W^j, A_{scr})$  – объем С-образной секции, м<sup>3</sup>.

Температурные граничные условия аналогичны граничным условиям (10) – (11).

При моделировании течения в экструдере типа  $E_2$  уравнение (15) интегрируется, как описано выше, и в каждом поперечном сечении канала рассчитывается средняя температура расплава. Для этого решается уравнение притока тепла, аналогичное (12), но не учитывающее теплопередачу от расплава к границе раздела фаз и расход теплоты на нагрев массы полимера, расплавляемого на каждом участке канала.

ММ (13) – (20) настраивается на тип экструдера, тип и геометрические параметры каждого элемента шнека, тип полимера. Граничные условия (17) представляют собой условия сопряжения элементов модульного шнека.

Для расчета вязкости полимера в зависимости от его температуры, содержания твердых частиц, скоростей потоков применяется обобщенная реологическая модель:

$$\eta^j = \mu^j (\dot{\gamma}^j)^{n-1}, \quad (21)$$

$$\mu^j = \mu_0 \left( 1 - \varphi_s^j / \varphi_{max} \right)^{-\beta} \left\{ (1 - h_{pt}) e^{-C_1 (T_m^j - T_r) / [C_2 + (T_m^j - T_r)]} + h_{pt} e^{-b(T_m^j - T_r)} \right\}, \quad (22)$$

где  $\mu^j$  – коэффициент консистенции, Па·с<sup>n</sup>;  $n$  – индекс течения;  $\mu_0$  – коэффициент консистенции при температуре приведения  $T_r$ , Па·с<sup>n</sup>;  $\varphi_{max}$  – объемная доля частиц при плотной упаковке (дисперсное плавление);  $\beta$  – коэффициент, характеризующий форму частиц и взаимодействие между ними и расплавом;  $C_1 = f_{16} (C_{1g}, T_g, T_r)$ ,  $C_2 =$

$f_{17}(C_{2g}, T_g, T_r)$  – коэффициенты уравнения Вильямса – Лэндела – Ферри (ВЛФ) при температуре приведения;  $C_{1g}, C_{2g}$  – универсальные константы ВЛФ при температуре стеклования полимера  $T_g$ ;  $b$  – температурный коэффициент вязкости,  $1/^\circ\text{C}$ .

Реологическая модель (21), (22) настраивается на класс полимера и температурный диапазон ЭП. Температурная зависимость вязкости аморфных полимеров, температура которых не превышает  $T_g + 100$ , описывается уравнением ВЛФ ( $h_{pt} = 0$ ). Температурная зависимость вязкости аморфных полимеров при температуре, превышающей  $T_g + 100$ , и кристаллических полимеров описывается уравнением Рейнольдса ( $h_{pt} = 1$ ). Аномально-вязкое поведение описывается моделью Оствальда – де’Вилье.

Плотности тепловых потоков в температурных граничных условиях ММ рассчитываются по моделям, построенным на основе закона охлаждения Ньютона – Рихмана для различных тепловых режимов работы системы «шнек – полимер – корпус»:

$$q_{scr} = (1 - h_{scr}) \alpha_{scr} \left( T_m^j |_{y=0} - T_{scr} \right), \quad q_{bk} = \alpha_{bk} \left( T_{bk} - T_m^j |_{y=H^j} \right), \quad k = 1, \dots, n_T, \quad (23)$$

где  $h_{scr}$  – настроенный коэффициент (если шнек охлаждается, то  $h_{scr} = 0$ ; если шнек термонеutralный, то  $h_{scr} = 1$ );  $\alpha_{scr}, \alpha_{bk}$  – коэффициенты теплоотдачи от расплава к охлаждаемому шнеку и от  $k$ -й тепловой зоны корпуса к расплаву,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ .

Для расчета давления на входе в головку применяется уравнение Пуазейля, записанное с учетом аномалии вязкости расплава и настраиваемое на тип головки:

$$P_{head} = \mu_{head} \left( \frac{Q}{k_{head}} \right)^n, \quad (24)$$

где  $\mu_{head}$  – коэффициент консистенции, рассчитываемый по уравнению (22) при температуре расплава на выходе из канала шнека  $T_{mout}^{Ne}$ ,  $\text{Па} \cdot \text{с}^n$ ;  $k_{head} = f_{18}(\Gamma_{head}, n)$  – коэффициент гидравлического сопротивления формующей зоны головки,  $\text{м}^3$ .

Процедура синтеза статической ММ ЭП включает стадии структурного синтеза и параметрической настройки. Структурный синтез начинается с выбора (из библиотеки ММ) ММ плавления полимера и ММ утечек расплава в зависимости от типа экструдера [33], ММ для расчета коэффициента гидравлического сопротивления головки в зависимости от ее типа. На следующем этапе осуществляется настройка структуры ММ течения расплава на тип экструдера (путем изменения параметров  $n_{scr}$  и  $S_0$ ), структуры ММ плавления и течения на типы элементов шнека (путем изменения параметров  $z_f^j$  и  $h_f^j$ ), структуры ММ плавления на класс полимера (путем изменения параметра  $h_p$ ). Структура реологической модели настраивается на класс полимера и температурный диапазон ЭП путем изменения параметра  $h_{pt}$ . Настройка структуры модели теплообмена полимера со шнеком на условия его термостатирования осуществляется путем изменения параметра  $h_{scr}$ . ММ, описывающие процессы в отдельных элементах шнека, формируются путем компоновки ММ плавления (течения) с ММ для расчета расходов утечек, вязкости и плотностей тепловых потоков. Сформированные ММ компонуются между собой в соответствии с заданной конфигурацией шнека  $C_{scr}$  и на основе условий сопряжения элементов. Модель, описывающая процессы в канале модульного шнека, компоуется с ММ течения в головке. Параметрическая настройка синтезированной ММ ЭП осуществляется путем формирования (из баз данных и библиотеки ММ) значений геометрических параметров элементов шнека и формующей зоны головки (в зависимости от марки экструдера

$M_{extrud}$ ), параметров свойств фаз полимера, коэффициентов реологической модели и коэффициентов теплоотдачи (в зависимости от типа полимера  $T_{polym}$ ).

Статическая ММ ЭП характеризуется зависимостью параметров состояния фаз друг от друга и от производительности экструдера, которая также подлежит определению и зависит от параметров состояния, нелинейностью. Последнее обусловлено прежде всего нелинейной зависимостью вязкости от скоростей потоков и температуры (уравнения (21), (22)). Кроме того, в ММ входят уравнения различных классов (уравнения в частных производных, обыкновенные дифференциальные и алгебраические уравнения). Поэтому для решения уравнений статической ММ применены численные методы, позволившие обеспечить сходимость вычислительного процесса при соблюдении требований к точности и экономичности расчета характеристик процессов переработки многоассортиментных полимеров в модульных экструдерах различных типов. Разработана расчетная процедура, включающая внешний и внутренний итерационные циклы. Во внешнем цикле осуществляется поиск рабочей точки экструдера, определяющей его производительность. Во внутреннем цикле определяется расход поступательного потока через канал каждого элемента, который при наличии потоков утечек из канала обеспечивает заданный во внешнем цикле расход потока через экструдер  $Q$ . При каждом новом приближении для расхода  $Q$  последовательно по всем  $N_e$  элементам шнека с учетом условий на входе в канал каждого элемента (8), (9) или (17) (в зависимости от функциональной зоны экструдера) рассчитываются расходы потоков  $Q^j$ ,  $Q_\delta^j$ ,  $Q_c^j$ ,  $Q_s^j$ ,  $Q_r^j$  (набор зависит от типа экструдера  $T_{extrud}$ ) и распределения параметров состояния фаз по длине каждого элемента. Для решения уравнений (1), (2) с учетом уравнения (7) используется метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности, а для решения уравнений (3) – (4), (12) – вычислительная схема, основанная на теории плоских несимметричных потоков в неизотермических условиях [34]. Уравнения (13) – (15) на каждом шаге по длине канала решаются методом конечных разностей. Уравнения (14) предварительно модифицируются с использованием метода расщепления поля давления [35]. Для алгебраизации модифицированных уравнений баланса сил применяется интегро-интерполяционный метод с последующей линеаризацией разностных уравнений методом запаздывающих коэффициентов. Полученные системы линеаризованных конечных уравнений решаются экономичным методом прогонки, учитывающим ленточную структуру матриц коэффициентов (при расчете скоростей потоков расплава в экструдерах типов  $E_3$  и  $E_4$  применяется метод матричной прогонки). Решение системы нелинейных конечных уравнений, полученной в результате алгебраизации уравнения (15) методом Лаасоне-на [36], осуществляется методом Ньютона – Рафсона, обеспечивающим квадратичную скорость сходимости итераций. На каждой итерации линеаризованные уравнения решаются методом прогонки. Для расчета градиентов давления реализована итерационная процедура, в которой коррекция градиентов осуществляется методом Ньютона – Рафсона на основе уравнений материального баланса (13). Для проверки сходимости вычислений и получения решения с погрешностью, не превосходящей предельно допустимую погрешность, реализована процедура деления шагов расчета по пространственным координатам пополам (прием Рунге). Внешний цикл продолжается, пока (в пределах допустимой погрешности) не выполнится условие сопряжения шнека и головки, определяющее равенство давления на выходе из канала шнека  $P_{scr} = P_{mout}^{N_e}$  давлению на входе в головку  $P_{head}$ . Расход  $Q$ , при котором это условие выполняется

ся, определяет производительность экструдера  $G = \rho_m Q$  и температуру экструдата  $T_{ext} = T_{m out}^{Ne}$ . Энергопотребление  $E$  вычисляется как отношение мощности к производительности.

Производительность  $G$  является входным параметром динамической ММ, структурный синтез которой заключается в выборе из библиотеки и компоновке ТГМ, описывающих структуру потоков в отдельных секциях шнека [37]. В экструдерах типов  $E_1$  и  $E_2$  каждая моделируемая секция представляет собой набор последовательно соединенных элементов одного типа. В экструдерах типов  $E_3$  и  $E_4$  моделируется каждая С-образная секция. Различные ТГМ описывают структуру потоков в секциях с разным механизмом и степенью перемешивания. Например, в экструдере типа  $E_2$  секция, составленная из КЕ-элементов, описывается моделью идеального смешения, а секция из ЕZ-элементов – ячеечной моделью. С-образная секция описывается моделью идеального смешения. Для учета обратного осевого перемешивания полимера в экструдере, вызванного утечками и осцилляцией шнека (в экструдере типа  $E_2$ ), между моделями секций включаются рециклы. Доля рецикла является настраиваемым параметром ММ. В результате формируется система уравнений материального баланса для расчета концентраций трассера на выходе из секций. Концентрация трассера на входе в канал шнека моделируется  $\delta$ -функцией. Уравнения синтезированной динамической ММ решаются с использованием конечно-разностного метода Лакса – Вендроффа [36], метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности (для соответствующих классов дифференциальных уравнений) и приема Рунге. Решение системы уравнений позволяет рассчитать импульсную переходную характеристику экструдера, обработка которой методом моментов дает значение СВП  $\tau_{av}$ .

На основе СВП, скоростей потоков и температуры экструдата рассчитываются характеристики его материальной однородности и теплового состояния:

$$\tau_{av} = \frac{\tau_{av}}{Z} \sum_{j=1}^{N_e} \left[ \int_{z^{j-1}}^{z^j-1+Z_e^j} \left( \frac{1}{H^j W^j} \int_0^{W^j} \int_0^{H^j} \dot{\gamma}^j dy dx \right) dz \right], \quad (25)$$

$$I_d = (\tau_{av} / \tau_d) e^{E_d(T_{ext}-T_d) / [8,31(T_{ext}+273)(T_d+273)]} 100, \quad (26)$$

где  $Z$  – длина канала, м;  $\tau_d$ ,  $T_d$  – время (с) и температура ( $^{\circ}\text{C}$ ) начала изменения цвета экструдата вследствие деструкции;  $E_d$  – энергия активации деструкции, Дж/моль.

Для оценки цветовых координат  $L_{ext}$ ,  $a_{ext}$ ,  $b_{ext}$  используются нелинейные ММ, полученные путем обработки результатов активных производственных экспериментов методом наименьших квадратов и включающие линейные, квадратичные эффекты и эффекты взаимодействия факторов – долей расходов красителей  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ . Расчет цветового отклонения  $\Delta E_{ext}$  осуществляется по модели CIE Lab [5, 39].

Проверка адекватности статических ММ выполнена путем сравнения измеренных и рассчитанных значений температуры экструдата и производительности, полученных при варьировании частоты вращения шнека, для экструдеров четырех типов, имеющих шнеки различной конфигурации, при переработке аморфных (ПВХ) и кристаллических (ПЭНП, ПП) полимеров. Также сопоставлены экспериментальные и рассчитанные распределения температуры ПВХ по длине шнека для промышленного и лабораторного экструдера типа  $E_2$  различной конфигурации. Для проверки адекватности динамических ММ выполнено сравнение измеренных и рассчитанных

значений функции распределения времен пребывания и СВП для экструдеров различных типов при переработке ПВХ, ПС, ПП. Результаты статистической обработки данных подтвердили адекватность ММ по критерию Фишера и среднеквадратическому отклонению, которое не превышает 3% для температуры и 10% для СВП.

### 3. ПК синтеза ММ для исследования и управления качеством экструдата

Метод моделирования ЭП реализован в виде гибкого ПК, настраиваемого на различные методы производства  $M_{prod}$  и типы  $T_{mater}$  ПМ, требования к производительности  $G_0$  и энергопотреблению  $E^{max}$  (рис. 2). ПК позволяет пользователю (технологу, оператору) для сформированного задания  $S_M$  выбрать аппаратное оформление процесса – марку экструдера  $M_{extrud}$ , сформировать регламентные диапазоны УВ на экструдер  $[U^{min}; U^{max}]$ , собрать виртуальную 3D модель модульного шнека экструдера, синтезировать ММ процесса переработки полимера заданного типа  $T_{polym}$  в экструдере марки  $M_{extrud}$ , имеющем шнек конфигурации  $C_{scr}$ . ММ позволяет рассчитать выходные параметры ЭП  $Y$  в зависимости от УВ  $U$ , варьируемых в регламентных диапазонах, и решить задачи исследования влияния УВ на показатели качества экструдата  $Q_{ext}$  и выбора УВ, обеспечивающих заданное качество при выполнении требований к производительности  $G$  и энергопотреблению  $E$ . Таким образом, ПК позволяет определить конфигурацию шнека и режим работы экструдера, которые обеспечивают требуемые потребительские характеристики ПМ заданного типа.

ПК представляет собой совокупность информационного, математического, лингвистического и программного обеспечения. Банк данных характеристик ЭП, включающий БД методов производства и типов ПМ, марок и технологических параметров экструдеров, геометрических параметров и 3D моделей элементов шнеков, свойств полимеров и требований к качеству экструдата, позволяет настраивать ПК на синтез ММ гибких многоассортиментных ЭП. БД построены на основе реляционной модели данных. БПр содержат производственные правила выбора марок экструдеров, допустимых для использования в производствах, характеристики которых указаны в задании на синтез ММ, правила сборки виртуальных моделей шнеков и правила синтеза ММ. Математическое обеспечение ПК содержит библиотеки ММ компонентов ЭП и ММ для расчета показателей качества экструдата, а также алгоритмы синтеза ММ ЭП, расчета выходных параметров ЭП и графической визуализации результатов моделирования. Разработанный язык проектирования виртуальных моделей шнеков является компонентом лингвистического обеспечения ПК. Элементами языка являются фотореалистичные 3D модели элементов шнеков экструдеров различных типов, а операциями, выполняемыми над ними, – выбор, размещение, перемещение, удаление. Язык проектирования реализован в программном конструкторе виртуальных моделей, позволяющем осуществить автоматизированную сборку 3D модели шнека данной конфигурации (по аналогии со сборкой реального шнека) и расчет геометрических параметров каналов элементов и секций собранного шнека [38, 39].

ПК создан с учетом принципов системного единства, совместимости и развития. Это обеспечивает целостность ПК (за счет интеграции его компонентов на основе единого банка данных), иерархичность решения задач выбора экструдера, формирования конфигурации его шнека и синтеза ММ ЭП для исследования и управления ка-

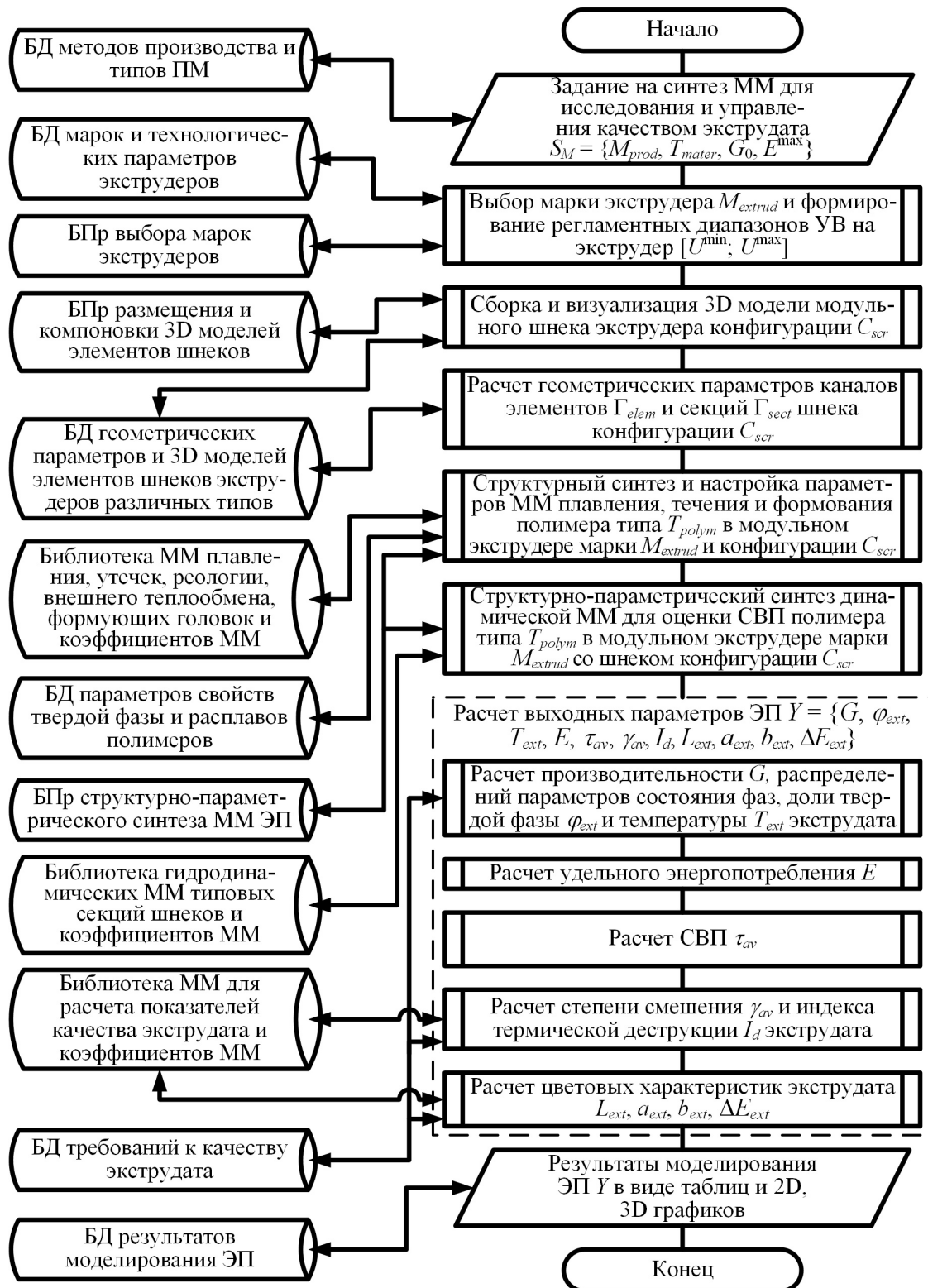


Рис. 2. Алгоритм работы ПК



чеством экструдата, открытость и интегрируемость ПК в автоматизированные системы научных исследований ЭП и управления качеством ПМ. Открытая архитектура ПК обеспечивает расширение его функциональности за счет разработки и подключения дополнительных модулей. ПК позволяет (используя интерфейс разработчика) пополнять БД, БПр и библиотеки ММ для расширения класса моделируемых ЭП.

Для создания ПК использованы средства объектно-ориентированного программирования (среда Visual Studio, язык программирования C#), разработки компонентов информационного обеспечения (СУБД SQLite, язык структурированных запросов SQL), построения виртуальных 3D моделей объектов (CAD-система 3ds Max), средства для работы с интерактивной 3D графикой (среда Unreal Engine).

Тестирование ПК выполнено на примерах синтеза ММ для исследования и управления качеством экструдата по данным экструзионно-каландровых производств плоских пленок на основе ПВХ (экструдеры типов  $E_2$  и  $E_4$ ) и экструзионных производств рукавных пленок на основе ПЭНП (экструдеры типа  $E_1$ ) на заводах в России и Германии. Пример результатов работы ПК представлен на рис. 3. Задание на синтез ММ  $S_M$  включает следующие требования:  $M_{prod} = M_3$ ,  $T_{polym} = \text{ПВХ}$ ,  $n_{black}^{max} = 3$ ,  $n_{gel}^{max} = 15$  (прозрачная пленка для упаковки фармацевтических препаратов),  $G_0 = 0,25$  кг/с,  $E^{max} = 360$  кДж/кг. Выбран экструдер типа  $E_2$  марки  $M_{extrud} = \text{PR-200}$  ( $D = 0,2$  м,  $L = 2,28$  м,  $S_0 = 0,03$  м,  $T_{head} = D_3$ ) и сформирована конфигурация его шнека  $C_{scr}$ . Синтезирована ММ ЭП, представляющая собой совокупность моделей дисперсного плавления ПВХ, перемешивания и нагрева расплава в канале шнека, формования расплава в фильере и учитывающая утечки расплава через радиальный зазор и прорези в нарезке элементов, теплообмен с охлаждаемым шнеком и обогреваемым корпусом. По ММ рассчитаны распределения давления и температуры полимера по длине шнека, распределение вязкости расплава в зоне его транспортировки по глубине и длине канала шнека, производительность и энергопотребление экструдера ( $G = 0,27$  кг/с,  $E = 288$  кДж/кг при  $N = 1,67$  об/с), средняя степень смешения ( $\gamma_{av} = 9374$  ед. сдвига,  $\gamma^{min} = 3000$  ед. сдвига) и тренд индекса термической деструкции экструдата. Тренд рассчитан на основе массива значений частоты вращения шнека ( $N = 1,42\text{--}2,16$  об/с), измеренных в течение 2 ч 49 мин работы промышленного экструдера.

Результаты тестирования подтвердили работоспособность ПК и возможность его использования для управления качеством экструдата в режиме советчика оператора и обучения управлению качеством при различных сценариях обучения (методах производства ПМ, типах полимеров, требованиях к качеству ПМ) и с протоколированием результатов обучения в виде отклонений значений показателей качества, достигнутых при варьировании УВ, от значений показателей, заданных в сценарии [40].

## Заключение

На основе информационного описания ЭП в гибких многоассортиментных производствах ПМ как объектов управления предложен комбинированный метод моделирования ЭП, базирующийся на использовании статических и динамических ММ процессов, протекающих в экструдерах различных типов (одношнековых, осциллирующих, двухшнековых), и позволяющий дать комплексную оценку производительности, энергопотребления и показателей качества экструдата с учетом аппаратной гибкости экструдеров, особенностей плавления полимеров и течения их расплавов.

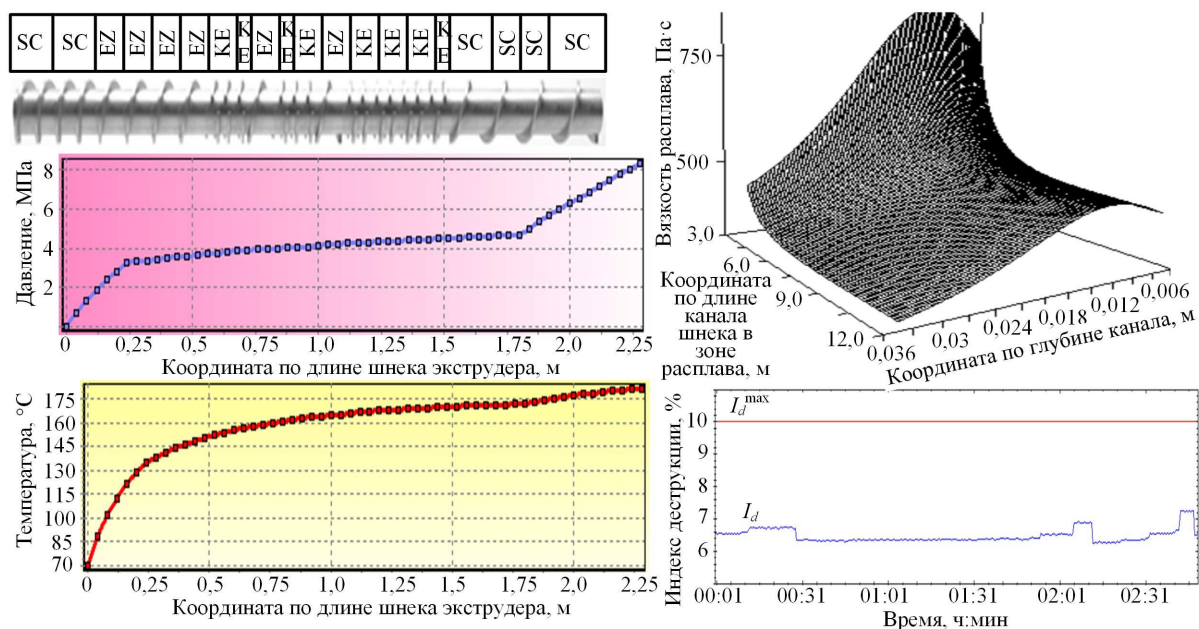


Рис. 3. Рассчитанные характеристики ЭП в промышленном экструдере типа  $E_2$

С использованием современных информационных технологий разработан ПК, который является гибким, эффективным инструментом, позволяющим решать задачи структурно-параметрического синтеза ММ ЭП для исследования и управления качеством экструдата, получаемого в экструдерах с перенастраиваемой конфигурацией.

ПК внедрен в опытно-промышленную эксплуатацию на заводах по производству многоассортиментных полимерных пленок для упаковки фармацевтических препаратов и пищевых продуктов в России и Германии. Применение ПК позволяет обеспечить заданное качество экструдата (однородность, отсутствие перегрева, цвет), а значит и качество полимерной пленки, требуемую производительность процесса, уменьшить энергоемкость производства, снизить время перенастройки ПЛ на новые задания за счет выбора рациональных конфигураций шнеков экструдеров и УВ на них.

## Литература

1. Kohlert, M. Applied Industry 4.0 in the Polymer Film Industry / M. Kohlert, O. Hissmann // Proceedings of the 16th TAPPI European PLACE Conference. – Basel, 2017. – P. 183–190.
2. Intellectual Analysis System of Big Industrial Data for Quality Management of Polymer Films / Т. Chistyakova, M. Teterin, A. Razygraev, С. Kohlert // Advances in Neural Networks – ISSN 2016: 13th International Symposium on Neural Networks Proceedings. – Cham: Springer, 2016. – P. 565–572.
3. Rauwendaal, C. Polymer Extrusion / C. Rauwendaal. – Munich: Carl Hanser Verlag, 2014.
4. Gartner, H. Control Systems for Calenders – from Mixer to Take-off / H. Gartner, A. Schnabel, С. Kohlert // Kunststoffe Plast Europe. – 1997. – V. 87, № 6. – P. 24–27.
5. Программный комплекс для управления цветом тонких жестких полимерных материалов / Т.Б. Чистякова, А.С. Разыграев, А.Н. Полосин, К. Колерт // Автоматизация в промышленности. – 2012. – № 7. – С. 12–18.
6. Shapiro, J. Melting in Single Screw Extruders. Part 1: The Mathematical Model / J. Shapiro, A.L. Halmos, J.R.A. Pearson // Polymer. – 1976. – V. 17, № 10. – P. 905–918.

7. Гидродинамика и теплообмен при плавлении в винтовом канале шнекового аппарата / Н.И. Басов, И.Н. Володин, Ю.В. Казанков, В.Е. Первушин // Теоретические основы химической технологии. – 1983. – Т. 17, № 1. – С. 72–78.
8. Mathematical Modeling of Melting of Polymers in a Single-Screw Extruder / B. Elbirli, J.T. Lindt, S.R. Gottgetreu, S.M. Baba // Polymer Engineering and Science. – 1984. – V. 24, № 12. – P. 988–999.
9. Первадчук, В.П. Математическая модель и численный анализ процессов теплообмена при плавлении полимеров в пластицирующих экструдерах / В.П. Первадчук, Н.М. Труфанова, В.И. Янков // Инженерно-физический журнал. – 1985. – Т. 48, № 1. – С. 75–80.
10. Lee, K.Y. Analysis of the Performance of Plasticating Single-Screw Extruders with a New Concept of Solid-Bed Deformation / K.Y. Lee, C.D. Han // Polymer Engineering and Science. – 1990. – V. 30, № 11. – P. 665–676.
11. Воскресенский, А.М. Переработка полимерных материалов в червячных машинах. Методы технологических расчетов / А.М. Воскресенский, Е.А. Кучинская. – СПб.: Изд-во СПбГТИ(ТУ), 2000. – 58 с.
12. Zhu, L. Modeling of Particle-Dispersed Melting Mechanism and Its Application in Co-Rotating Twin-Screw Extrusion / L. Zhu, K.A. Narh, X. Geng // Journal of Polymer Science. Part B: Polymer Physics. – 2001. – V. 39, № 20. – P. 2461–2468.
13. Experimental and Theoretical Study of Polymer Melting in a Co-Rotating Twin-Screw Extruder / B. Vergnes, G. Souveton, M.L. Delacour, A. Ainsier // International Polymer Processing. – 2001. – V. 16, № 4. – P. 351–362.
14. Thibault, F. A Numerical Model for Single Screw Extrusion with Poly(Vinyl Chloride) (PVC) Resins / F. Thibault, P.A. Tanguy, D. Blouin // Polymer Engineering and Science. – 1994. – V. 34, № 18. – P. 1377–1386.
15. Tadmor, Z. Solids Conveying in Screw Extruders. Part II: Non Isothermal model / Z. Tadmor, E. Broyer // Polymer Engineering and Science. – 1972. – V. 12, № 5. – P. 378–386.
16. Wilczyński, K. Melting Model for Intermeshing Counter-Rotating Twin-Screw Extruders / K. Wilczyński, J.L. White // Polymer Engineering and Science. – 2003. – V. 43, № 10. – P. 1715–1726.
17. White, J.L. Simulation of Non-Isothermal Flow in Modular Co-Rotating Twin Screw Extrusion / J.L. White, Z. Chen // Polymer Engineering and Science. – 1994. – V. 34, № 3. – P. 229–237.
18. Lyu, M.-Y. Simulation of Non-Isothermal Flow in a Modular Buss Kneader and Comparison with Experiment / M.-Y. Lyu, J.L. White // International Polymer Processing. – 1997. – V. 12, № 2. – P. 104–109.
19. Скульский, О.И. Численное моделирование одночервячных экструдеров / О.И. Скульский // Пластические массы. – 1997. – № 8. – С. 39–44.
20. Monchatre, B. Influence of the Melt Viscosity and Operating Conditions on the Degree of Filling, Pressure, Temperature, and Residence Time in a Co Kneader / B. Monchatre, C. Raveyre, C. Carrot // Polymer Engineering and Science. – 2018. – V. 58, № 2. – P. 133–141.
21. Mehranpour, M. Computational Study of Velocity Field in the KE Element of a Modular Ko-Kneader with CFD Method / M. Mehranpour, H. Nazokdast, B. Dabir // International Polymer Processing. – 2003. – V. 18, № 4. – P. 330–337.
22. A Composite Model for an Intermeshing Counter-Rotating Twin-Screw Extruder and Its Experimental Verification / A. Lewandowski, K.J. Wilczyński, A. Nastaj, K. Wilczyński // Polymer Engineering and Science. – 2015. – V. 55, № 12. – P. 2838–2848.

23. Vergnes, B. A Global Computer Software for Polymer Flows in Corotating Twin Screw Extruders / B. Vergnes, G. Della Valle, L. Delamare // *Polymer Engineering and Science*. – 1998. – V. 38, № 11. – P. 1781–1792.
24. Todd, D.B. Residence Time Distribution in Twin-Screw Extruders / D.B. Todd // *Polymer Engineering and Science*. – 1975. – V. 15, № 6. – P. 437–443.
25. Puaux, J.P. Residence Time Distribution in a Co-Rotating Twin-Screw Extruder / J.P. Puaux, G. Bozga, A. Ainsler // *Chemical Engineering Science*. – 2000. – V. 55, № 9. – P. 1641–1651.
26. Hoppe, S. Modeling of a Cokneader for the Manufacturing of Composite Materials Having Absorbent Properties at Ultra-High-Frequency Waves / S. Hoppe, C. Detrez, F. Pla // *Polymer Engineering and Science*. – 2002. – V. 42, № 4. – P. 771–780.
27. Monchatre, B. Residence Time Distributions in a Co-Kneader: A Chemical Engineering Approach / B. Monchatre, C. Raveyre, C. Carrot // *Polymer Engineering and Science*. – 2015. – V. 55, № 6. – P. 1237–1245.
28. Lyu, M.-Y. Residence Time Distributions and Basic Studies of Flow and Melting in a Modular Kneader / M.-Y. Lyu, J.L. White // *Polymer Engineering and Science*. – 1998. – V. 38, № 9. – P. 1366–1377.
29. Joint Innovative IT Projects in the Field of Production of Polymeric Sheet Materials / T.B. Chistyakova, A.S. Razygrayev, A.N. Polosin, A.M. Araztaganova // *Proceedings of the 2016 IEEE V Forum «Strategic Partnership of Universities and Enterprises of Hi-Tech Branches (Science. Education. Innovations)»*. – St. Petersburg: Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI», 2016. – P. 61–64.
30. Моделирование и оптимизация экструзии полимеров / В.В. Скачков, Р.В. Торнер, Ю.В. Стунгур, С.В. Реутов. – Л.: Химия, 1984. – 152 с.
31. Полосин, А.Н. Математическая модель одношнековой экструзии для управления качеством пластика в многоассортиментных производствах полимерных пленок / А.Н. Полосин, Т.Б. Чистякова // *Системы управления и информационные технологии*. – 2009. – № 2. – С. 87–92.
32. Полосин, А.Н. Математические модели осциллирующего движения и плавления полимеров для проектирования и управления экструдерами / А.Н. Полосин, Т.Б. Чистякова // *Системы управления и информационные технологии*. – 2006. – № 4. – С. 30–36.
33. Чистякова, Т.Б. Методы и технологии синтеза математических моделей процессов экструзии в гибких производствах полимерных материалов / Т.Б. Чистякова, А.Н. Полосин // *Вестник Саратовского государственного технического университета*. – 2011. – № 4. – С. 170–180.
34. Полосин, А.Н. Технология моделирования неизотермического течения расплавов полимеров в одношнековых экструдерах на базе теории плоских потоков / А.Н. Полосин // *Информационные технологии моделирования и управления*. – 2007. – № 3. – С. 376–386.
35. Chiruvella, R.V. Extrusion of Non-Newtonian Fluids in a Single-Screw Extruder with Pressure Back Flow / R.V. Chiruvella, Y. Jaluria, V. Sernas // *Polymer Engineering and Science*. – 1996. – V. 36, № 3. – P. 358–367.
36. Чистякова, Т.Б. Математическое моделирование химико-технологических объектов с распределенными параметрами / Т.Б. Чистякова, А.Н. Полосин, Л.В. Гольцева. – СПб.: ЦОП «Профессия», 2010. – 239 с.
37. Чистякова, Т.Б. Система имитационного моделирования для управления экструдерами в гибких производствах полимерных материалов / Т.Б. Чистякова, А.Н. Полосин // *Автоматизация в промышленности*. – 2010. – № 7. – С. 35–40.

38. Polosin, A.N. The Mathematical Models and Program Complex for Synthesis of Reciprocating Extruders with Adjustable Configurations / A.N. Polosin, T.B. Chistyakova // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – V. 1202, № 1. – 12 p.
39. Chistyakova, T.B. Computer Modeling System of Industrial Extruders with Adjustable Configuration for Polymeric Film Quality Control / T.B. Chistyakova, A.N. Polosin // Proceedings of 2017 IEEE II International Conference on Control in Technical Systems. – St. Petersburg: Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI», 2017. – P. 47–50.
40. Chistyakova, T.B. Intelligence Computer Simulators for Elearning of Specialists of Innovative Industrial Enterprises / T.B. Chistyakova, I.V. Novozhilova // Proceedings of the XIX International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2016). – St. Petersburg: Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI», 2016. – P. 329–332.

Тамара Балабековна Чистякова, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой систем автоматизированного проектирования и управления, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация), chistb@mail.ru.

Андрей Николаевич Полосин, кандидат технических наук, доцент, кафедра систем автоматизированного проектирования и управления, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация), polosin-1976@mail.ru.

*Поступила в редакцию 6 сентября 2019 г.*

---

MSC 68U20, 68U35

DOI: 10.14529/mmp190401

**MATHEMATICAL MODELS AND SOFTWARE PACKAGE  
FOR EXTRUSION CONTROL AT FLEXIBLE MULTI-ASSORTMENT  
PRODUCTIONS OF POLYMERIC MATERIALS**

*T.B. Chistyakova<sup>1</sup>, A.N. Polosin<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State Institute of Technology, Saint-Petersburg, Russian Federation  
E-mails: chistb@mail.ru, polosin-1976@mail.ru

We develop mathematical models of extrusion and the software package helping production staff to solve problems of resource and energy saving control of the extruders applied in flexible multi-assortment productions of packing polymeric materials. Also, we propose the combined modelling method for complex assessment of throughput, energy consumption of extrusion and quality indices of material in the extruders differing in hardware flexibility and complexity of flow structure. The method is based on use of static and dynamic models. The software package is adjusted according to production method,

type of products, as well as requirements to throughput and energy consumption. The software package includes databank of extrusion characteristics, module for extrusion equipment choice, module for design of virtual models of extruder screws, subsystem for structural and parametrical synthesis of mathematical model and calculation of output parameters for extrusion, subsystem for visualization of results, in particular, in the form of trends of output parameters and 3D graphs of their dependences on controlling actions. The operability was confirmed by testing of the software package according to data from productions of polyvinylchloride and polyethylene films at the factories in Russia and Germany. The software package can be used as the effective instrument for support of decision-making when determining configurations and operation modes of the extruders that ensure the set consumer characteristics of the products.

*Keywords: mathematical models; numerical methods; software package; extrusion; polymeric materials.*

## References

1. Kohlert M., Hissmann O. Applied Industry 4.0 in the Polymer Film Industry. *Proceedings of the 16th TAPPI European PLACE Conference*. Basel, 2017, pp. 183–190.
2. Chistyakova T., Teterin M., Razygraev A., Kohlert C. Intellectual Analysis System of Big Industrial Data for Quality Management of Polymer Films. *Advances in Neural Networks – ISNN 2016: 13th International Symposium on Neural Networks Proceedings*. Cham, Springer, 2016, pp. 565–572.
3. Rauwendaal C. *Polymer Extrusion*. Munich, Carl Hanser Verlag, 2014.
4. Gartner H., Schnabel A., Kohlert C. Control Systems for Calenders – from Mixer to Take-off. *Kunststoffe Plast Europe*, 1997, vol. 87, no. 6, pp. 24–27.
5. Chistyakova T.B., Razygraev A.S., Polosin A.N., Kohlert C. [Software Package for Color Control of the Thin Rigid Polymeric Materials]. *Avtomatizatsiya v promyshlennosti [Industrial Automation]*, 2012, no. 7, pp. 12–18. (in Russian)
6. Shapiro J., Halmos A.L., Pearson J.R.A. Melting in Single Screw Extruders. Part 1: The Mathematical Model. *Polymer*, 1976, vol. 17, no. 10, pp. 905–918.
7. Basov N.I., Volodin I.N., Kazankov Yu.V., Pervushin V.E. Hydrodynamics and Heat Exchange in Melting in the Screw Channel of an Extruder. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 1983, vol. 17, no. 1, pp. 61–67.
8. Elbirli B., Lindt J.T., Gottgetreu S.R., Baba S.M. Mathematical Modeling of Melting of Polymers in a Single-Screw Extruder. *Polymer Engineering and Science*, 1984, vol. 24, no. 12, pp. 988–999.
9. Pervadchuk V.P., Trufanova N.M., Yankov V.I. Mathematical Model and Numerical Analysis of Heat-Transfer Processes Associated with the Melting of Polymers in Plasticating Extruders. *Journal of Engineering Physics*, 1985, vol. 48, no. 1, pp. 60–64.
10. Lee K.Y., Han C.D. Analysis of the Performance of Plasticating Single-Screw Extruders with a New Concept of Solid-Bed Deformation. *Polymer Engineering and Science*, 1990, vol. 30, no. 11, pp. 665–676.
11. Voskresenskiy A.M., Kuchinskaya E.A. *Pererabotka polimernykh materialov v chervyachnykh mashinakh. Metody tekhnologicheskikh raschetov [Processing of Polymeric Materials in Screw Machines. Technological Calculation Methods]*. St. Petersburg, Saint Petersburg State Institute of Technology (Technical University), 2000. (in Russian)
12. Zhu L., Narh K.A., Geng X. Modeling of Particle-Dispersed Melting Mechanism and Its Application in Co-Rotating Twin-Screw Extrusion. *Journal of Polymer Science. Part B: Polymer Physics*, 2001, vol. 39, no. 20, pp. 2461–2468.

13. Vergnes B., Souveton G., Delacour M.L., Ainsler A. Experimental and Theoretical Study of Polymer Melting in a Co-Rotating Twin-Screw Extruder. *International Polymer Processing*, 2001, vol. 16, no. 4, pp. 351–362.
14. Thibault F., Tanguy P.A., Blouin D. A Numerical Model for Single Screw Extrusion with Poly(Vinyl Chloride) (PVC) Resins. *Polymer Engineering and Science*, 1994, vol. 34, no. 18, pp. 1377–1386.
15. Tadmor Z., Broyer E. Solids Conveying in Screw Extruders. Part II: Non Isothermal model. *Polymer Engineering and Science*, 1972, vol. 12, no. 5, pp. 378–386.
16. Wilczyński K., White J.L. Melting Model for Intermeshing Counter-Rotating Twin-Screw Extruders. *Polymer Engineering and Science*, 2003, vol. 43, no. 10, pp. 1715–1726.
17. White J.L., Chen Z. Simulation of Non-Isothermal Flow in Modular Co-Rotating Twin Screw Extrusion. *Polymer Engineering and Science*, 1994, vol. 34, no. 3, pp. 229–237.
18. Lyu M.-Y., White J.L. Simulation of Non-Isothermal Flow in a Modular Buss Kneader and Comparison with Experiment. *International Polymer Processing*, 1997, vol. 12, no. 2, pp. 104–109.
19. Skul'skiy O.I. [Numerical Modeling of Single-Screw Extruders]. *Plasticheskie massy* [Plastics], 1997, no. 8, pp. 39–44. (in Russian)
20. Monchatre B., Raveyre C., Carrot C. Influence of the Melt Viscosity and Operating Conditions on the Degree of Filling, Pressure, Temperature, and Residence Time in a Co Kneader. *Polymer Engineering and Science*, 2018, vol. 58, no. 2, pp. 133–141.
21. Mehranpour M., Nazokdast H., Dabir B. Computational Study of Velocity Field in the KE Element of a Modular Ko-Kneader with CFD Method. *International Polymer Processing*, 2003, vol. 18, no. 4, pp. 330–337.
22. Lewandowski A., Wilczyński K.J., Nastaj A., Wilczyński K. A Composite Model for an Intermeshing Counter-Rotating Twin-Screw Extruder and Its Experimental Verification. *Polymer Engineering and Science*, 2015, vol. 55, no. 12, pp. 2838–2848.
23. Vergnes B., Della Valle G., Delamare L. A Global Computer Software for Polymer Flows in Corotating Twin Screw Extruders. *Polymer Engineering and Science*, 1998, vol. 38, no. 11, pp. 1781–1792.
24. Todd D.B. Residence Time Distribution in Twin-Screw Extruders. *Polymer Engineering and Science*, 1975, vol. 15, no. 6, pp. 437–443.
25. Puaux J.P., Bozga G., Ainsler A. Residence Time Distribution in a Co-Rotating Twin-Screw Extruder. *Chemical Engineering Science*, 2000, vol. 55, no. 9, pp. 1641–1651.
26. Hoppe S., Detrez C., Pla F. Modeling of a Cokneader for the Manufacturing of Composite Materials Having Absorbent Properties at Ultra-High-Frequency Waves *Polymer Engineering and Science*, 2002, vol. 42, no. 4, pp. 771–780.
27. Monchatre B., Raveyre C., Carrot C. Residence Time Distributions in a Co-Kneader: A Chemical Engineering Approach. *Polymer Engineering and Science*, 2015, vol. 55, no. 6, pp. 1237–1245.
28. Lyu M.-Y., White J.L. Residence Time Distributions and Basic Studies of Flow and Melting in a Modular Kneader. *Polymer Engineering and Science*, 1998, vol. 38, no. 9, pp. 1366–1377.
29. Chistyakova T.B., Razygrayev A.S., Polosin A.N., Araztaganova A.M. Joint Innovative IT Projects in the Field of Production of Polymeric Sheet Materials. *Proceedings of the 2016 IEEE V Forum "Strategic Partnership of Universities and Enterprises of Hi-Tech Branches (Science. Education. Innovations)"*. St. Petersburg, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", 2016, pp. 61–64.

30. Skachkov V.V., Torner R.V., Stungur Yu.V., Reutov S.V. *Modelirovanie i optimizatsiya ekstruzii polimerov* [Modeling and Optimization of Polymer Extrusion]. Leningrad, Chemistry, 1984. (in Russian)
31. Polosin A.N., Chistyakova T.B. [Mathematical Model of Single-Screw Extrusion for Control of Plastic Material Quality in Multi-Assortment Productions of Polymeric Films]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technologies], 2009, no. 2, pp. 87–92. (in Russian)
32. Polosin A.N., Chistyakova T.B. [The Mathematical Models of Reciprocating Flow and Melting of Polymers for Design and Control of Extruders]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technologies], 2006, no. 4, pp. 30–36. (in Russian)
33. Chistyakova T.B., Polosin A.N. [Methods and Technologies for Synthesis of Mathematical Models for Extrusion in Flexible Productions of Polymeric Materials]. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Vestnik Saratov State Technical University], 2011, no. 4, pp. 170–180. (in Russian)
34. Polosin A.N. [Modeling Technology of Non-Isothermal Flow of Polymer Melts in Single-Screw Extruders Based on the Theory of Plane Flows]. *Informatsionnye tekhnologii modelirovaniya i upravleniya* [Information Technologies of Modeling and Control], 2007, no. 3, pp. 376–386. (in Russian)
35. Chiruvella R.V., Jaluria Y., Sernas V. Extrusion of Non-Newtonian Fluids in a Single-Screw Extruder with Pressure Back Flow. *Polymer Engineering and Science*, 1996, vol. 36, no. 3, pp. 358–367.
36. Chistyakova T.B., Polosin A.N., Gol'tseva L.V. *Matematicheskoe modelirovanie khimiko-tekhnologicheskikh ob'ektov s raspredelennymi parametrami* [Mathematical Modeling of Chemical Technological Objects with Distributed Parameters]. St. Petersburg, Center for Educational Progr. "Profession", 2010. (in Russian)
37. Chistyakova T.B., Polosin A.N. [Simulation System for Extruder Control in Flexible Productions of the Polymeric Materials]. *Avtomatizatsiya v promyshlennosti* [Industrial Automation], 2010, no. 7, pp. 35–40. (in Russian)
38. Polosin A.N., Chistyakova T.B. The Mathematical Models and Program Complex for Synthesis of Reciprocating Extruders with Adjustable Configurations. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1202, no. 1, article number 012007, 12 p.
39. Chistyakova T.B., Polosin A.N. Computer Modeling System of Industrial Extruders with Adjustable Configuration for Polymeric Film Quality Control. *Proceedings of 2017 IEEE II International Conference on Control in Technical Systems*. St. Petersburg, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", 2017, pp. 47–50.
40. Chistyakova T.B., Novozhilova I.V. Intelligence Computer Simulators for Elearning of Specialists of Innovative Industrial Enterprises. *Proceedings of the XIX International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2016)*. St. Petersburg, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", 2016, pp. 329–332.

*Receive September 6, 2019*