УДК 661.935+519.633.2 DOI: 10.14529/mmp190403

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В НЕГЛАДКОЙ ОБЛАСТИ КОНЕЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

***М.Ю. Ливщиц*[1], *А.В. Ненашев*[1], *Ю.Э. Плешивцева*[1]**
[1]Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация

Предложен эффективный вычислительный алгоритм для решения краевых задач оптимального быстродействия и оптимальной точности при минимаксной оценке отклонения результирующей траектории от заданного конечного состояния. Задача сводится к невыпуклой задаче нелинейного программирования. Предложенный алгоритм учитывает невыпуклый характер поставленной задачи нелинейного программирования, обеспечивает поиск в зоне «оврагов» и достаточно эффективно выполняет поиск в условиях повышенной размерности области определения оптимизируемого функционала, обеспечивая требуемую точность решения. За счет преобразования многомерной невыпуклой задачи нелинейного программирования к задаче минимизации гладкой монотонно убывающей функции одного переменного алгоритм существенно снижает вычислительную сложность решения краевых задач оптимального быстродействия и оптимальной точности при минимаксной оценке отклонения результирующей траектории от заданного конечного состояния. Приведен пример решения тестовой задачи оптимального управления индукционным нагревом цилиндра.

Ключевые слова: распределенные параметры; краевая задача; критерий оптимальности; поисковая процедура; локальный минимум; глобальный минимум.

Юбилею профессора Т.Б. Чистяковой посвящается

Сокращения

ОРП – объект с распределенными параметрами; АМО – альтернансный метод оптимизации.

Введение

Практическая результативность методов и алгоритмов решения задач оптимального управления технологическими и производственными процессами определяется эффективностью вычислительных методов и соответствующего программного обеспечения. Определяющим фактором при выборе вычислительного метода является его адекватность поставленной оптимальной задаче. Поэтому требуют дополнительного и математически корректного обоснования широко распространенные, основанные на ограничении бесконечного числа соотношений, например, в распределенном методе моментов и (или) аппроксимации негладкого и невыпуклого критерия качества выпуклой областью [1–8], численные методы приближенного решения оптимальных задач, в особенности применительно к бесконечномерным ОРП. Строгий анализ показывает, что при этом зачастую происходит подмена постановки оптимальной задачи и вместо изначально поставленной краевой задачи с фиксированными концами оптимальной траектории фактически решается задача с подвижным или свободным правым концом оптимальной траектории в соответствующей области конечномерного или бесконечномерного пространства состояний, если речь идет об ОРП [9]. Основные затруднения при реализации вычислительных методов для ОРП связаны не только с необходимостью их конечномерной аппроксимации в большинстве известных методов, но и с проблемой адекватности удобных в вычислительной практике метрик, определяющих начальные и конечные области соответствующих оптимальных краевых задач, технологически обоснованным оценкам этих областей [10]. Погрешности достижения заданной области от некорректного выбора вычислительного метода решения для некоторых оптимальных задач достигают 200% [1, 8, 9, 11].

1. Постановка задачи

Ограничимся здесь, для упрощения изложения предлагаемого численного метода, одномерной краевой задачей оптимального управления ОРП, что не ведет к потере общности алгоритма вычислительной процедуры. Существенно, что даже при теоретической фиксации правого конца оптимальной траектории ОРП, погрешности измерения, усечение бесконечномерных моделей, погрешность при численной реализации и т.п. не позволяют практически решить эту задачу точно. Поэтому фактически решается задача с подвижным правым концом траектории. Однако, при этом из-за некорректной подмены постановки задач происходит существенная потеря по критерию оптимальности. Эффективность решения определяется на этапе формулировки краевых оптимальных задач и во многом зависит от формулировки метрики оценки области конечных состояний [1, 9].

Пусть ОРП описывается линейным одномерным дифференциальным уравнением параболического типа

$$\frac{\partial\Theta(l,\ \varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2\Theta(l,\ \varphi)}{\partial l^2} - \Gamma l^{-1}\frac{\partial\Theta(l,\ \varphi)}{\partial l} = F\left(l,\varphi\right), \quad l \in (0,1)\,, \quad \varphi \in (0,\infty) \tag{1}$$

с краевыми условиями:

$$\Theta\left(l,\ 0\right) = \ \Theta_0,\ \frac{\partial\Theta(0,\ \varphi)}{\partial l} = 0,\ \frac{\partial\Theta(1,\ \varphi)}{\partial l} = q\left(\varphi\right). \tag{2}$$

Здесь $l,\ \varphi$ – относительные пространственный и временной (число Фурье) аргументы, Γ – параметр формы ($\Gamma\ = 1$ для цилиндрической системы координат, $\Gamma = 0$ для декартовой системы координат), $F\left(l,\varphi\right)$ и $q\left(\varphi\right)$ – заданные функции своих аргументов.

Рассмотрим две краевые задачи оптимального управления объектом (1), (2) с подвижным правым концом траектории в бесконечномерной негладкой области $\bar\Omega_\Theta\ =\ \left\{\Theta\left(l,\varphi\right)\ :\max\limits_{l\in[0,1]}\left|\Theta\left(l,\ \varphi_0\right) - \Theta^*\left(l\right)\right| \le \varepsilon\right\}$ допустимых результирующих состояний для заданной $\varepsilon = \varepsilon_z$ или предельно достижимой в i-м классе управлений $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(i)}$ погрешности в области

$$\bar\Omega_u = \left\{u\left(\varphi\right) : U_{\min} \le u\left(\varphi\right) \le U_{\max}\right\} \tag{3}$$

допустимых управлений $u\left(\varphi\right)$:
– задача быстродействия:

$$j_\varphi = \min_{u(\varphi)\in\overline{\Omega}_u} \varphi_0\Big|_{\Theta\in\bar\Omega_\Theta,\quad \varepsilon=\varepsilon_z}, \tag{4}$$

– задача максимальной точности:

$$j_\varepsilon = \min_{u(\varphi)\in\overline{\Omega}_u} \max_{l\in[0,1]} \left|\Theta\left(l,\ \varphi_0\right) - \Theta^*\left(l\right)\right|. \tag{5}$$

Здесь $\Theta^*(l)$ – заданное результирующее распределение $\Theta(l,\ \varphi) = \Theta^*(l)$ в момент $\varphi = \varphi_0$ окончания процесса $0 < \varphi_0 < \infty$.

В качестве подлежащего определению управления $u(\varphi)$ можно рассматривать временную компоненту $v(\varphi)$ правой части уравнения (1) в мультипликативной форме [12]: $F(l,\varphi) = w(l)\,v(\varphi)$, имеющую смысл интенсивности теплоисточников, если интерпретировать объект (1), (2) как краевую задачу теплопроводности.

Возможны и другие варианты назначения управляющего воздействия в задаче управления при анализе соответствующей технологической или производственной ситуации.

Эффективным средством решения этих задач является АМО [1]. Этот метод получил широкое распространение для решения прикладных задач оптимального управления различными технологическими процессами, однако наиболее эффективным является его применение для ОРП, к которым относятся процессы тепло- и массопереноса технологической теплофизики (различные виды нагрева, химико-термическая обработка, фильтрация и т.п.). АМО адекватно учитывает неполную управляемость процесса и негладкость априори заданной области $\bar{\Omega}_\Theta$ конечных состояний $\Theta(l,\ \varphi_0)$ и позволяет определить оптимальную траекторию, приводящую внутрь этой области в классе реализуемых управлений. Необходимым условием использования АМО является параметрический характер управления $u(\varphi)$. Параметризовать управление удается либо из физических соображений, когда в качестве управляющих воздействий рассматривают конструктивные или режимные характеристики (толщина футеровки, длина печи и т.п.), естественным образом параметризуемые, либо с использованием принципа максимума Понтрягина в форме Ю.В. Егорова [13], либо решением бесконечномерной проблемы моментов [14]. Параметрический характер управления позволяет свести решение задач (4) и (5) к поиску количества i и численного значения $\Delta^{(i)} = \left\{\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)}, \ldots, \Delta_i^{(i)}\right\}$ параметров управления и предельно достижимой в каждом i-ом подмножестве управлений погрешности $\varepsilon = \varepsilon_{min}^{(i)} = \max\limits_{l\in[0,1]} \left|\Theta\left(l,\ \varphi_0^{(i)},\ \Delta^{(i)}\right) - \Theta^*(l)\right|$ равномерного приближения результирующего профиля $\Theta\left(l,\ \varphi_0^{(i)},\ \Delta^{(i)}\right)$ к заданному из условий удовлетворения производственно-технологическим требованиям профилю $\Theta^*(l)$. Причем достижимое в каждом параметрическом i-м классе управления время окончания процесса $\varphi_0 = \varphi_0^{(i)}$ является минимально возможным. Неизвестные параметры управления $\Delta^{(i)}$ и достижимая в i-м классе управления погрешность $\varepsilon_{\min}^{(i)}$ в поставленных оптимальных задачах (4) и (5), согласно процедуре АМО, определяются решением системы трансцендентных уравнений:

$$\tilde{\Theta}\left(l,\ \Delta^{(i)}\right)\Big|_{l=l_j} = (-1)^j \vartheta\varepsilon;\ \frac{\partial\tilde{\Theta}\left(l,\ \Delta^{(i)}\right)}{\partial l}\Big|_{l=l_m} = 0, \tag{6}$$

где

$$\tilde{\Theta}\left(l,\ \varphi_0^{(i)}\right) = \Theta\left(l,\ \varphi_0^{(i)}\right) - \Theta^*(l),$$

$$j = \overline{1,\ R}\ \left(R = i : \varepsilon_{\min}^{(i-1)} >\ \varepsilon = \varepsilon_z > \varepsilon_{\min}^{(i)}; R = i+1\ :\ \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(i)}\right),$$

$$m = \overline{1, r}\ ,\ l_j\ \in \{l_j : [0, l_1, ..\ , l_r,\ 1], r = R-1,\ r = R\}, 0 \le l_1 < l_2 < \ldots < l_R,\ \ \vartheta = \pm 1.$$

Решение последовательности задач максимальной точности (5) позволяет сформировать ряд неравенств:

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \ldots > \varepsilon_{\min}^{(\alpha)} = \varepsilon_{\inf} \ge 0. \tag{7}$$

Ряд (7) служит основой для выбора количества i параметров управляющих воздействий, т.к. выявляет минимальную достижимую абсолютную погрешность $\varepsilon_{\min}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ при достижении результирующего профиля в каждом i-м классе оптимального управления.

2. Вычислительный алгоритм АМО

Основой алгоритма служит последовательное решение системы трансцендентных алгебраических уравнений (6) для определения членов ряда (7). При этом каждый член $\varepsilon_{\min}^{(i)}$ ряда (7) определяется в ходе решения задачи (5) путем минимизации невязок $f_j\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)$, $f_m\left(l_m, \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)$ решения системы (6):

$$\tilde{\Theta}\left(l,\ \Delta^{(i)}\right)\Big|_{l=l_j} - (-1)^j \vartheta\varepsilon = f_j\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right);\ \frac{\partial\widetilde{\Theta}\left(l,\ \Delta^{(i)}\ \right)}{\partial l}\Bigg|_{l=l_m} = f_m\left(l_m,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right).$$

Для этого введем оценку невязок в форме штрафной функции [2]:

$$J\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right) = J_{big}\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right) + J_{small}\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right), \tag{8}$$

где $J_{big}\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right) = K[f_{abs}]^2$; $J_{small}\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right) = K\sqrt{f_{abs}}$; $f_{abs} = \sum\limits_{j=1}^{R} \left|f_j\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)\right| + \sum\limits_{m=1}^{r} \left|f_m\left(l_m,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)\right|$.

Вид оценки в форме (8) сформулирован с целью снижения вероятности возникновения «оврагов», так компонента $J_{big}\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)$ существенно увеличивает значения $J\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)$, если $f_{abs} > 1$ и уменьшает, если $f_{abs} < 1$. Компонента $J_{small}\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)$ действует наоборот. Коэффициент масштабирования К обеспечивает увеличение приращения оценки на отрезке $f_{abs} \in (\gamma; \delta)$, где скорость изменения оценки (8) принимает минимальные значения, что может приводить к возникновению оврагов в указанном диапазоне.

Оценка (8) всегда положительна, в зависимости от оптимизируемого процесса может быть невыпуклой, однако, если система (6) имеет решение, абсолютный минимум $J_{inf} = J\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right) = 0$. Задача поиска параметров $\Delta^{(i)}$ в каждом i-ом классе управления сводится к поиску координаты абсолютного минимума $J_{\inf} = 0$ оценки (8), определенной в многомерной области $R_1^c = \left(l_j \in [0,\ \ 1], \Delta^{(i)} \in (0,\ \ \infty), \varepsilon\right)$, $c_1 = \dim R_1^c = 2\,(i+1)$ в случае решения задачи (5) и $R_2^c = \left(l_j \in [0,\ \ 1], \Delta^{(i)} \in (0,\ \ \infty)\right)$, $c_2 = \dim R_2^c = 2i$ в случае решения задачи (4).

Таким образом, для решения системы (6) следует решить нелинейную невыпуклую задачу математического программирования: $J\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right) \to \min\limits_{R_{1,\ 2}^c} J\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right)$ в условиях (1) – (3). Для упрощения введем обозначения:

$$x_1 = l_1,\ \ldots,\ x_R = l_R,\ x_{R+1} = \ \Delta_1^{(i)},\ \ldots,\ x_{R+i} = \Delta_i^{(i)},\ x_{R+i+1} = \ \varepsilon,$$

тогда:

$$R_{1,2}^c = \left\{x_1,\ \ldots,\ x_{_{1,2}}\right\}, J\left(l_j,\ \Delta^{(i)}, \varepsilon\right) = J\left(x_1,\ \ldots,\ x_{_{1,2}}\right) = J\left(X\right),\ X = \left(x_1,\ \ldots,\ x_{_{1,2}}\right).$$

Процедура определения глобального минимума функции (8) должна удовлетворять следующим требованиям: учитывать невыпуклый и нелинейный характер $J\left(X\right)$; обеспечивать поиск в зоне «оврагов»; достаточно эффективно обеспечивать поиск в условиях повышенной размерности области определения $R_{1,\ 2}^c$; выполнять свои функции в условиях ограниченных вычислительных ресурсов.

Известны современные и достаточно эффективные алгоритмы поиска [1, 15–17] абсолютного в замкнутой области экстремума многомерных нелинейных невыпуклых функций. Наиболее популярные из которых методы случайного поиска, например, метод отжига, генетические алгоритмы, интервальный метод ветвей и границ и другие. Все они характеризуются высокой вычислительной сложностью, причем количество требуемых для поиска вычислительных операций находится в степенной зависимости от размерности $\dim R_{1,2}^c$ области определения оптимизируемой функции.

Подобных недостатков лишен разработанный В.К. Чичинадзе алгоритм Ψ-преобразования [18], суть которого в преобразовании оптимизируемой многомерной функции (8) в одномерную непрерывную, монотонно убывающую численно заданную метрику $\Psi\left(\varsigma\right)$ оптимизируемой функции, нуль которой совпадает с абсолютным экстремумом $J\left(X\right)$. Вычислительная сложность алгоритма Ψ-преобразования невелика. Основные затраты времени вычислений происходят на этапе подготовки данных, поскольку на начальном этапе алгоритма Ψ-преобразования необходимо произвести вычисление $J\left(X\right)$ в S равномерно и регулярно распределенных в пространстве $X_k \in R_{1,2}^c,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ S$ точках $R_{1,2}^c$. Количество S точек X_k напрямую влияет на точность поиска экстремума методом Ψ-преобразования.

Среди вычисленных значений $J\left(X_k\right)$ находим минимальное $J_{\min}$ и максимальное $J_{\max}$ значения, после чего интервал $\left[J_{\min};\ \left(J_{\max} - J_{\min}\right) 2^{-1}\right]$ делим на N равных частей.

Определяем оценочные уровни по аргументу ς по формуле:

$$\varsigma_\nu = (J_{\max} - J_{\min})2^{-1} - \left(\nu - 1\right)\Delta\varsigma,\quad \Delta\varsigma = \varsigma_{\nu-1} - \varsigma_\nu,\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

После чего вычислим значения $\Psi_\nu = \xi_\nu / S$, где

$$\xi_\nu = \sum_{k=1}^{S} g_k^\nu,\quad g_k^\nu = \begin{cases} 1, & J\left(X_k\right) \le\ \varsigma_\nu, \\ 0, & J\left(X_k\right) >\ \varsigma_\nu. \end{cases}$$

Введем функцию $\Psi\left(\varsigma\right)$ в аналитическом виде через аппроксимацию по множеству ς_ν значений Ψ_ν, например, полиномом второго порядка:

$$\Psi\left(\varsigma\right)\ = \alpha_0\varsigma^2 + \alpha_1\varsigma + \alpha_2, \tag{9}$$

коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ которого получим, методом наименьших квадратов.

Находим наименьший $\varsigma_m = J(X_m)$ корень полинома (9), близкий значению глобального минимума $J_{\inf}$ функции (8).

На следующем шаге найдем вектор $X_m = \left\{x_1^m, x_2^m, \ldots, x_{c_{1,2}}^m\right\} \in R_{1,\ 2}^c$, члены которого найдем путем подстановки ς_m в аппроксимирующие полиномы: $x_t^m\left(\varsigma\right) = \beta_0^t\varsigma^2 + \beta_1^t\varsigma + \beta_2^t,\ t = 1, 2, \ldots, c_{1,2}$, введенные аналогично полиному (9).

Для снижения погрешности определения X_m и повышения вероятности определения глобального экстремума $J_{\inf} = 0$ используем полученные результаты в качестве начальных условий для алгоритма локального поиска.

При подборе алгоритма локального поиска руководствуемся требованиями. Наиболее эффективными в условиях этих требований представляются алгоритмы прямого поиска [15, 16], из которых в наибольшей степени удовлетворяет требованиям алгоритм Дж. Недлера и Р. Мида [19]. Он представляет собой улучшенный вариант алгоритма симплекс-метода и не требователен к форме симплекса, в отличие от классического алгоритма или алгоритма Хука – Дживса [1], что позволяет снять проблему сопоставимости размерностей переменных. Этот алгоритм предлагает простую и гибкую систему изменения размеров симплекса, без пересчета всех значений целевой функции, входящих в симплекс и работает существенно быстрее классического алгоритма поиска симплекс-методом, за счет использования информации предыдущих итераций.

Параметры алгоритма: коэффициент отражения $\alpha > 0$; коэффициент сжатия $\beta > 0$; коэффициент растяжения $\gamma > 0$; погрешность поиска ε_n. Значения коэффициентов выбираются произвольно. Обычно принимают: $\alpha = 1,\ \beta = 0,5\ \gamma = 2$.

В качестве опорной точки используем X_m. Отбираем $c_{1,2} = \dim R^c_{1,2}$ точек с координатами:

$$\begin{gathered} X_1 = \left\{x_1^m + \varepsilon_\varphi x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_{c_{1,2}}^m\right\}, \\ X_2 = \left\{x_1^m, x_2^m + \varepsilon_\varphi x_2^m, x_3^m, \ldots, x_{c_{1,2}}^m\right\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{c_{1,2}} = \left\{x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_{c_{1,2}}^m + \varepsilon_\varphi x_{c_{1,2}}^m\right\}, \end{gathered} \tag{10}$$

образующих симплекс в пространстве $R^c_{1,2}$ аргументов функции (8). В точках (10) определим значения $J\left(X_z\right),\quad z = \overline{0, c_{1,2}}\ ,\quad X_0 = X_m$. Получаем массив вершин симплекса $V\left[c_{1,2}+1\right]$, где каждый член массива представляет собой точку X_z. Затем выполним последовательность действий:

1. Сортируем массив $V\left[c_{1,2}+1\right]$ по убыванию величины $J\left(V\left[z\right]\right)$.

2. Из вершин симплекса выбираем три точки $V\left[0\right],\ V\left[1\right], V\left[c_{1,2}\right]$. Для уменьшения величины $J_{V[0]}$ определим центр тяжести всех точек, за исключением $V\left[0\right]$:$X_h = \left\{x_{h1}, x_{h2}, x_{h3}, \ldots, x_{hc_{1,2}}\right\}$, где $x_{ht} = (1/c_{1,2})\sum\limits_{z=1}^{c_{1,2}} x_{zt},\ \ t = \overline{1, c_{1,2}}$, при этом существенно, что $J\left(X_h\right)$ не вычисляем.

3. Отразим точку $V\left[0\right]$ относительно X_h с коэффициентом отражения α, получим точку X_H с координатами $x_{Ht} = \left(1+\alpha\right)x_{ht} - \alpha x_{V[0]t},\ \ t = 1, 2, \ldots, c_{1,2}$.

4. Последовательно сравним значение $J\left(X_H\right)$ с $J_{V[0]},\ \ J_{V[1]},\ \ J_{V[c_{1,2}]}$.

4a. Если $J\left(X_H\right) < J_{V[c_{1,2}]}$, то растягиваем симплекс. Получаем новую точку X_e с координатами $x_{et} = \left(1+\gamma\right)x_{ht} - \gamma x_{Ht},\ t = 1, 2, \ldots, c_{1,2}$. Если $J\left(X_e\right) < J_{V[c_{1,2}]}$, то $V\left[c_{1,2}\right] = X_e$. Переходим на шаг 8. Если $J\left(X_e\right) > J_{V[c_{1,2}]}$, то $V\left[0\right] =\ X_H$. Переходим на шаг 8.

4b. Если $J_{V[c_{1,2}]} < J\left(X_H\right) < J_{V[1]}$, то $V\left[0\right] =\ X_H$. Переходим на шаг 8.

4c. Если $J_{V[1]} < J\left(X_H\right) < J_{V[0]}$, то $V\left[0\right] =\ X_H$. Переходим на шаг 5.

4d. Если $J\left(X_H\right) > J_{V[0]}$, переходим на шаг 5.

5. Сжимаем симплекс к точке X_s с координатами $x_{st} = \left(1-\beta\right)x_{ht} + \beta x_{V[0]t},\ \ t = 1, 2, \ldots, c_{1,2}$.

6. Если $J(X_s) < J_{V[0]}$, $V[0] = X_s$, переходим на шаг 8.

7. Если $J(X_s) > J_{V[0]}$, то производим сжатие симплекса к точке $V[c_{1,2}]$. Производим пересчет координат остальных точек $V[z]$, $x_t^z = x_{V[c_{1,2}]t} + \left(x_{V[z]t} - x_{V[c_{1,2}]t}\right) 2^{-1}, t = \overline{1, c_{1,2}}$, $z = \overline{0, c_{1,2} - 1}$.

8. Вычисляем длину ребер симплекса. Если хотя бы одно ребро длиннее чем ε_n, выполняем алгоритм с шага 1, иначе $X_{rez} = V[c_{1,2}]$ и завершаем поисковую процедуру.

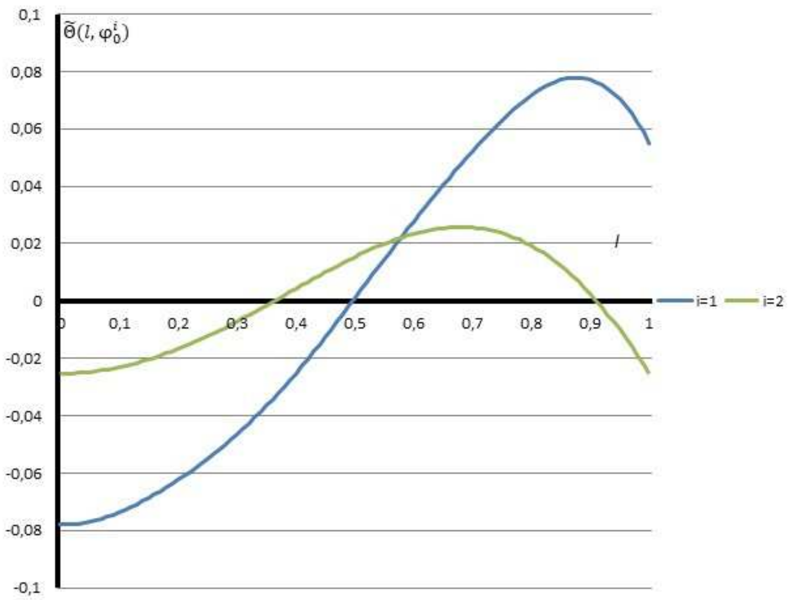
Большое значение для поиска локального экстремума алгоритмом Недлера – Мида имеет выбор начальной длины ребра симплекса. С одной стороны, ребро должно быть существенно меньше расстояния между точками X, с другой, достаточно большим, для того чтобы миновать множество мелких локальных экстремумов, которые могут находиться в области спуска.

Заключение

Протестируем предлагаемую вычислительную процедуру на известной решенной задаче процесса индукционного нагрева бесконечного цилиндрического стержня [12], в условиях

$$\Theta_0(l) \equiv \Theta_0 = \Theta_a = \text{const},$$
$$W(\xi, l) = \xi\left(ber'^2(\xi l) + bei'^2(\xi l)\right) / \left(ber(\xi)\, ber'(\xi) + bei(\xi)\, bei'(\xi)\right),$$
$$\xi = 4, \ Bi = 0,7, \Theta^*(l) = \Theta^* = 0,5.$$

Параметры управления $\Delta^{(i)}$ для этой задачи представляют собой длительности интервалов постоянства управления $u(\varphi)$ принимающего значения $u = U_{\max} = 1$, $U_{\min} = -U_{\max}$ на этих интервалах.



Результирующее оптимальное распределение температур в тестовой задаче для одно- (i=1) и двух- (i=2) интервального управления

В результате предлагаемой поисковой процедуры получены параметры оптимального по точности управления: $\Delta_1^{(1)} = 0,3475$, $\Delta_1^{(2)} = 0,3506$, $\Delta_2^{(2)} = 0,0403$.

Известное решение [12] этой же задачи дает: $\widetilde{\Delta}_1^{(1)} = 0,349$, $\widetilde{\Delta}_1^{(2)} = 0,35$, $\widetilde{\Delta}_2^{(2)} = 0,04$.

Таким образом, можно констатировать, что предложенный алгоритм обладает достаточно высокой точностью, отвечает требованиям и обеспечивает эффективный процесс поиска параметров $\Delta^{(i)}$ оптимального управления. При этом удалось снизить вычислительную сложность решения поставленной задачи оптимального управления на 23,7% по сравнению с известным решением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проектная част госзадания № 10.3260.2017/4.6).

Литература

1. Рапопорт, Э.Я Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации / Э.Я. Рапопорт. – М.: Наука, 2000.
2. Лившиц, М.Ю. Эффективная вычислительная процедура альтернансного метода оптимизации / М.Ю. Лившиц, А.В. Ненашев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 361–377.
3. Чистякова, Т.Б. Интеллектуальное управление многоассортиментным коксохимическим производством / Т.Б. Чистякова, О.Г. Бойкова, Н.А. Чистяков. – СПб.: Профессия, 2010.
4. Чистяков, А.Н. Интегрированная интеллектуальная система для управления процессами коксования / А.Н. Чистяков, Т.Б. Чистякова, О.Г. Бойкова // Кокс и химия. – 1998. – № 8. – С. 18–22.
5. Чистякова, Т.Б. Система поддержки принятия решений по эксплуатации огнеупорной футеровки сталеплавильных конвертеров / Т.Б. Чистякова, В.А. Кудлай, И.В. Новожилова, С.А. Суворов, В.В. Козлов // Известия СПбГТИ. – 2016. – № 37. – С. 60–66.
6. Островский, Ю.В. Система управления гибким производством субстанций лекарственных препаратов / Ю.В. Островский, Т.Б. Чистякова, А.А. Малин // Химическая промышленность. – 2003. – Т. 80, № 5. – С. 38–43.
7. Чистякова, Т.Б. Интеллектуальные системы технологического проектирования, управления и обучения в многоассортиментном производстве гранулированных пористых материалов из тонкодисперсных частиц / Т.Б. Чистякова, Ю.И. Шляго, И.В. Новожилова, Н.В. Мальцева. – СПб.: Изд-во СПбГТИ, 2012.
8. Livshitc, M.Yu. Multi-Criteria Optimization of Refinery / M.Yu. Livshitc, A.P. Sizikov // Thermophysical Basis of Energy Technologies. – 2016. – V. 110. – Article ID: 01035.
9. Лившиц, М.Ю. Системная оптимизация процессов тепло- и массопереноса технологической теплофизики / М.Ю. Лившиц // Математические методы в технике и технологиях. – 2016. – Т. 11. – С. 104–114.
10. Полосин, А.Н. Математическая модель одношнековой экструзии для управления качеством пластиката в многоассортиментных производствах полимерных пленок / А.Н. Полосин, Т.Б. Чистякова // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 2. – С. 87–92.
11. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1980.

12. Рапопорт, Э.Я. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева / Э.Я. Рапопорт, Ю.Э. Плешивцева. – М.: Наука, 2012.
13. Егоров, Ю.В. Необходимые условия оптимальности управления в банаховом пространстве / Ю.В. Егоров // Математический сборник. – 1964. – Т. 64 (106), № 1. – С. 79–101.
14. Бутковский, А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965.
15. Gill, P. Practical Optimization / P. Gill, W. Murray, M. Wright. – New York: Academic Press, 1981.
16. Самарский, А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1982.
17. Захарова, Е.М. Обзор методов многомерной оптимизации / Е.М. Захарова, И.К. Минашина // Информационные процессы. – 2014. – Т. 14, № 3. – С. 256–274.
18. Чичинадзе, В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации / В.К. Чичинадзе. – М.: Наука, 1983.
19. Nelder, J.A. Simplex Method for Function Minimization / J.A. Nelder, R.A. Mead // Computer Journal. – 1965. – V. 7. – P. 308–313.

Михаил Юрьевич Лившиц, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Управление и системный анализ теплотехнических и социотехнических комплексов», Самарский государственный технический университет (г. Самара, Российская Федерация), usat@samgtu.ru.

Алексей Владимирович Ненашев, аспирант, доцент кафедры «Управление и системный анализ теплотехнических и социотехнических комплексов», Самарский государственный технический университет (г. Самара, Российская Федерация), alexvlnenashev@gmail.com.

Юлия Эдгаровна Плешивцева, доктор технических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой «Управление и системный анализ теплотехнических и социотехнических комплексов», Самарский государственный технический университет (г. Самара, Российская Федерация), yulia_pl@mail.ru.

Поступила в редакцию 9 сентября 2019 г.

MSC 65P99 **DOI: 10.14529/mmp190403**

COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR OPTIMAL CONTROL OF AN OBJECT WITH DISTRIBUTED PARAMETERS IN A NONSMOOTH AREA OF FINAL STATES

***M.Y. Livshits*[1], *A.V. Nenashev*[1], *Yu.E. Pleshivtseva*[1]**
[1]Samara State Technical University, Russian Federation
E-mails: usat@samgtu.ru, alexvlnenashev@gmail.com, yulia_pl@mail.ru

We propose the effective computational algorithm for solving boundary-value problems of time-optimal and maximum accuracy control with a minimax estimation of the deviation of the final trajectory from a given state. The problem is reduced to a nonconvex nonlinear programming problem. The proposed algorithm takes into account the non-convex nature of the problem of nonlinear programming, provides a search in the "ravines"zone, performs a search quite efficiently under conditions of increased dimension of the definition domain of the optimized functional, and provides the required accuracy of the solution. Due to the transformation of the multidimensional non-convex nonlinear programming problem to the problem of minimizing a smooth monotonically decreasing function of one variable, the algorithm significantly reduces the computational complexity of solving boundary-value problems of optimal speed and maximum accuracy with a minimax estimate of the deviation of the final trajectory from a given state. We give an example of the solution of the test optimal control problem for induction heating of a cylindrical billet.

Keywords: distributed parameters; boundary-value problem; optimality criterion; search procedure; local minimum; global minimum.

References

1. Rapoport E.Ya. *Alternansny metod v prikladnikh zadachakh optimizatsii* [An Alternative Method in Applied Optimization Problems]. Moscow, Nauka, 2000. (in Russian)
2. Livshits M.Yu., Nenashev A.V. Effective Computational Procedure of the Alternance Optimization Method. *Journal of Samara State Technical University, Physical and Mathematical Science*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 361–377. (in Russian)
3. Chistyakova T.B., Boykova O.G., Chistyakov A.N. *Intellektual'noe upravlenie mnogoassortimentnym koksokhimicheskim proizvodstvom* [Intelligent Control of the Multi-Assortment Coke-Chemical Production]. St. Petersburg, Profession, 2010. (in Russian)
4. Chistyakov A.N., Chistyakova T.B., Boykova O.G. Integrated Intelligent Structures for Controlling the Process of Coking. *Coke and Chemistry*, 1998, no. 8, pp. 18–22.(in Russian)
5. Chistyakova T.B., Kudlay V.A., Novozhilova I.V., Suvorov S.A., Kozlov V.V. Decision Support System for Service of Refractory Lining of Steelmaking Converter. *Bulletin of the Saint Petersburg State Institute of Technology*, 2016, no. 37, pp. 60–66. (in Russian)
6. Ostrovskiy Yu.V., Chistyakova T.B., Malin A.A. System for Controlling the Production of Substances of Medical Preparations with Variable Technology. *Chemical Industry*, 2003, vol. 80, no. 5, pp. 38–43. (in Russian)
7. Chistyakova T.B., Shlyago Yu.I., Novozhilova I.V., Mal'tseva N.V. *Intellektual'nye sistemy tekhnologicheskogo proektirovaniya, upravleniya i obucheniya v mnogoassortimentnom proizvodstve granulirovannykh porisykh materialov iz tonkodispersnykh chastits* [Intelligent Systems of Technological Design, Control and Training for the Multi-Assortment Production of Granular Porous Materials of Fine Particles]. St. Petersburg, Saint Petersburg State Institute of Technology, 2012. (in Russian)
8. Livshitc M.Yu., Sizikov A.P. Multi-Criteria Optimization of Refinery. *Thermophysical Basis of Energy Technologies*, 2015, vol. 110, article ID: 01035. DOI 10.1051/epjconf/201611001035
9. Livshits M.Yu. System Optimization of Processes of Heat and Mass Transfer of Technological Thermophysics. *Mathematical Methods in Engineering and Technology*, 2016, vol. 11, pp. 104–114. (in Russian)
10. Polosin A.N., Chistyakova T.B. Mathematical Model of Single-Screw Extrusion for Control of Plastic Material Quality in Multi-Assortment Productions of Polymeric Films. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technologies], 2009, no. 2, pp. 87–92. (in Russian)
11. Vasilyev F.P. *Chislennie metodi resheniya ekstremalnikh zadach* [Numerical Methods for Solving Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980. (in Russian)

12. Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E. *Optimalnoe upravlenie temperaturnymi rezhimami induktsionnogo nagreva* [Optimum Control of Temperature Modes of Induction Heating]. Moscow, Nauka, 2012. (in Russian)
13. Egorov Yu.V. Necessary Conditions for Optimality of Control in a Banach Space. *Mathematical Collection*, 1964, vol. 64 (106), no. 1, pp. 79–101.(in Russian)
14. Butkovskiy A.G. *Teoriia optimal'nogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* [Theory of Optimal Control of Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka, 1965. (in Russian)
15. Gill P., Murray W., Wright M. *Practical Optimization.* N.Y., Academic Press, 1981.
16. Samarskii A.A. *Vvedenie v chislennye metody* [An Introduction to Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1997.(in Russian)
17. Zakharova E.M., Minashina I.K. Review of Multidimensional Optimization Techniques. *Informatsionnye Protsessy*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 256–274.(in Russian)
18. Chichinadze V.K. *Reshenie nelineynykh nevypuklykh zadach optimizatsii* [Solution of Nonconvex Nonlinear Optimization Problems]. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)
19. Nelder J.A., Mead R.A. Simplex Method for Function Minimization. *Computer Journal*, 1965, vol. 7, pp. 308–313.

Received September 9, 2019