

## ОЦЕНКА ТОЧКИ СХОДА ОТРЕЗКОВ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

*И.А. Коноваленко<sup>1</sup>, Ю.А. Шемякина<sup>2</sup>, И.А. Фараджеев<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Российская Федерация

В работе представлен метод оценки положения точки схода набора сходящихся зашумленных отрезков. В качестве модели зашумления отрезка используется нормальный шум, накладываемый на его концевые точки. Точка схода определяется как точка, в которой достигается минимума функционал, зависящий от положения рассматриваемых отрезков. Для задания такого функционала в работе используется метод максимального правдоподобия. Полученный функционал позволяет как ставить задачу численной минимизации, так и задавать функцию соответствия отрезка пучку при необходимости отсеивания отрезков-выбросов из исходного набора. Применение предложенного метода иллюстрируется на примере исправления проективных искажений и последующей локализации страниц паспорта Российской Федерации на изображениях его разворотов. В рамках данной задачи предполагается, что выделенные на изображении отрезки соответствуют нескольким пучкам и содержат выбросы. Для обеспечения устойчивости и возможности оценки множества точек схода предложен алгоритм, основанный на схеме RANSAC. Применение метода проективной нормализации позволило сократить количество ошибок локализации страниц с 6,4% до 1,8%.

*Ключевые слова:* точка схода; метод максимального правдоподобия; отрезки; ректификация изображения.

*Посвящается юбилею члена корреспондента РАН,  
профессора В.Л. Арлазарова.*

### Введение

Точкой схода называется точка, в которой пересекаются на перспективном изображении прямые – образы параллельных линий объекта. Поскольку выделенные прямые на изображении всегда зашумлены, определим точку в этом случае как точку, в которой достигается своего минимума некоторый функционал, зависящий от исходных прямых.

Точки схода используются во многих задачах обработки изображений, в связи с чем предложено много алгоритмов их вычисления (см., например, [1–5]). Однако в большинстве таких алгоритмов минимизируемый функционал либо не рассматривается вовсе, либо не универсален, так как формулируется в терминах решаемой задачи, а не в терминах исходных прямых. Это связано с тем, что не существует адекватной модели зашумления прямой.

С другой стороны, в задачах обработки изображений прямые проявляются в виде отрезков. Зачастую сначала на изображении выделяются отрезки, после чего через их концевые точки проводятся прямые. Для детектирования отрезков предложено

много различных алгоритмов (см., например, [6–8]). Кроме того, если выделяются непосредственно прямые, например с помощью Быстрого Преобразования Хафа [9], на изображении они все равно представляются отрезками с концевыми точками на границе изображения. При этом существует общепринятая модель зашумления точки на изображении, полученном цифровой камерой с квадратными пикселями, симметричным гауссовым шумом. В работе [10] сделана попытка построить модель зашумления прямой, проведенной через две зашумленные точки, однако это не привело к построению функционала, пригодного для вычисления точки схода. Поэтому мы решили в качестве входа алгоритма использовать зашумленные отрезки, а не прямые. В ряде работ [11–14] используется такой же подход (отрезки, а не прямые в качестве исходных данных), и даже схожий функционал, однако без доказательства того, что он следует из принципа максимума правдоподобия.

Мы предлагаем метод вычисления точки схода по коллекции отрезков, причем минимизируемый функционал формулируется в терминах координат концов этих отрезков. В разделе 1 описывается вероятностная модель пучка зашумленных сходящихся отрезков, а в разделе 2 методом максимума правдоподобия строится функционал, минимизация которого ведет к нахождению точки схода пучка зашумленных отрезков. Наконец, в разделе 3 кратко описано применение предложенного метода как части алгоритма исправления проективных искажений и локализации страниц разворота паспорта гражданина РФ на фотографии.

## 1. Вероятностная модель формирования отрезков

Для построения функционала максимального правдоподобия необходимо задать вероятностную модель формирования плоского зашумленного пучка сходящихся отрезков. Сперва рассмотрим  $n$  сходящихся незашумленных отрезков. Обозначим концы  $i$ -го отрезка  $\mathbf{a}_i^1, \mathbf{a}_i^2 \in \mathbb{R}^2$ , а точку схода отрезков —  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Тогда верно следующее представление концов отрезков:

$$\mathbf{a}_i^j = \mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v}, \quad (1)$$

где  $t_i^j \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^2$  — единичные вектора (направления):  $\|\mathbf{e}_i\|_2 = 1$ .

Концы зашумленных отрезков опишем случайными величинами  $\mathbf{X}_i^j$ , независимо нормально распределенными с математическими ожиданиями  $\mathbf{a}_i^j$  и ковариационной матрицей  $\Sigma = \sigma^2 I_2$ :

$$\mathbf{X}_i^j \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}_i^j, \Sigma).$$

Параметры получившейся вероятностной модели обозначим

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}, \sigma\}.$$

Распишем плотность распределения  $\mathbf{X}_i^j$ :

$$f_{\mathbf{X}_i^j}(\mathbf{x}|\theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a}_i^j)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a}_i^j)} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{x}-(\mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v})\|_2^2}.$$

## 2. Оценка точки схода отрезков методом максимального правдоподобия

Пусть у нас имеется по одной реализации  $\mathbf{x}_i^j$  каждой случайной величины  $\mathbf{X}_i^j$ . Запишем функцию правдоподобия [15] с учетом независимости  $\mathbf{X}_i^j$ :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^2 f_{\mathbf{X}_i^j}(\mathbf{x}_i^j | \theta) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{x}_i^j - (\mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v})\|_2^2} = \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-2n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \|\mathbf{x}_i^j - (\mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v})\|_2^2\right). \end{aligned}$$

Тогда оценка максимального правдоподобия параметра  $\theta$  будет следующей:

$$\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{\theta} L(\theta). \quad (2)$$

Введем обозначение

$$l(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} -\log L(\theta) = 2n \log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \|\mathbf{x}_i^j - (\mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v})\|_2^2. \quad (3)$$

Тогда задача (2) может быть представлена в виде:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} l(\theta).$$

Следовательно, оценка максимального правдоподобия точки схода  $\mathbf{v}$  имеет вид:

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} \min_{\{\mathbf{e}_i\}} \min_{\{t_i^j\}} \min_{\sigma} l(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}, \sigma). \quad (4)$$

При фиксированных  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{e}_i$  и  $t_i^j$  решим задачу:

$$l(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\sigma} l(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}, \sigma).$$

Введем остаточную сумму квадратов:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} S(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \|\mathbf{x}_i^j - (\mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v})\|_2^2. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получим

$$l(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}, \sigma) = 2n \log(2\pi\sigma^2) + \frac{S}{2\sigma^2}.$$

Для поиска оптимальной  $\hat{\sigma}$  приравняем к нулю частную производную  $l$  по  $\sigma$ :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} l(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}, \sigma) = \frac{4n}{\sigma} - \frac{S}{\sigma^3} = 0,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S}{4n}.$$

Тогда

$$l(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}) = 2n \log\left(\frac{\pi}{2n}S\right) + 2n.$$

Задача (4) может быть представлена в виде:

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} \min_{\{\mathbf{e}_i\}} \min_{\{t_i^j\}} S(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}). \quad (6)$$

При фиксированных  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{e}_i$  решим задачу:

$$S(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\{t_i^j\}} S(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}, \{t_i^j\}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \min_{t_i^j} \|\mathbf{x}_i^j - (\mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v})\|_2^2.$$

Эта задача может быть представлена в виде  $2n$  задач линейной регрессии относительно переменных  $t_i^j$ :

$$\min_{t_i^j} \|\mathbf{x}_i^j - (\mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v})\|_2^2. \quad (7)$$

Заметим, что согласно (1)  $\mathbf{a}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i t + \mathbf{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  — параметрическое уравнение прямой. Обозначим ее  $\mathbf{l}_i$ . Тогда целевая функция задачи (7) будет равна квадрату расстояния от фиксированной точки  $\mathbf{x}_i^j$  до точки на прямой  $\mathbf{a}_i(t_i^j)$ . Оно будет достигать своего минимума в точке проекции  $\mathbf{x}_i^j$  на прямую  $\mathbf{l}_i$  (рис. 1):

$$\min_{t_i^j} \|\mathbf{x}_i^j - (\mathbf{e}_i t_i^j + \mathbf{v})\|_2 = \min_{t_i^j} \|\mathbf{x}_i^j - \mathbf{a}_i(t_i^j)\|_2 = \rho(\mathbf{x}_i^j, \mathbf{l}_i)$$

Обозначим проекцию точки  $\mathbf{x}_i^j$  на прямую  $\mathbf{l}_i$  как  $\hat{\mathbf{a}}_i^j$ . Также обозначим  $\mathbf{y}_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_i^j - \mathbf{v}$ . Тогда квадрат расстояния от точки до прямой может быть представлен как разность квадратов длин гипотенузы  $\|\mathbf{y}_i^j\|_2$  и катета  $\|\hat{\mathbf{a}}_i^j - \mathbf{v}\|_2 = \mathbf{e}_i^T \mathbf{y}_i^j$  (см. рис. 1):

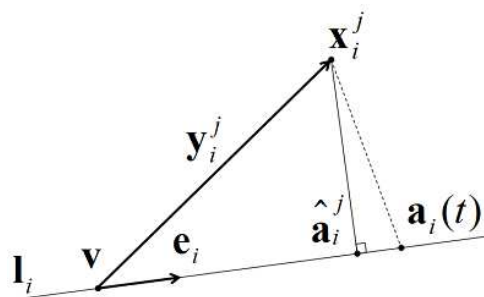
$$S(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \rho^2(\mathbf{x}_i^j, \mathbf{l}_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (\|\mathbf{y}_i^j\|_2^2 - \mathbf{e}_i^T \mathbf{y}_i^j (\mathbf{y}_i^j)^T \mathbf{e}_i).$$

Таким образом, задача (6) свелась к следующей задаче:

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} \min_{\{\mathbf{e}_i\}} S(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}). \quad (8)$$

Теперь определим направляющие вектора  $\mathbf{e}_i$  прямых  $\mathbf{l}_i$ . Для этого при фиксированной точке схода  $\mathbf{v}$  решим задачу:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}) &\stackrel{\text{def}}{=} \min_{\{\mathbf{e}_i\}} S(\mathbf{v}, \{\mathbf{e}_i\}) = \min_{\{\mathbf{e}_i\}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (\|\mathbf{y}_i^j\|_2^2 - \mathbf{e}_i^T \mathbf{y}_i^j (\mathbf{y}_i^j)^T \mathbf{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^2 \|\mathbf{y}_i^j\|_2^2 - \max_{\mathbf{e}_i} \left[ \mathbf{e}_i^T \left( \sum_{j=1}^2 \mathbf{y}_i^j (\mathbf{y}_i^j)^T \right) \mathbf{e}_i \right] \right). \end{aligned}$$



**Рис. 1.** Оценка положения незашумленного конца отрезка  $\hat{\mathbf{a}}_i^j$  на прямой  $l_i$  по зашумленному (наблюдаемому) концу отрезка  $\mathbf{x}_i^j$

Введем матрицы данных  $Y_i \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{y}_i^1 \ \mathbf{y}_i^2]^T$  и удвоенные выборочные матрицы ковариации

$$K_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^2 \mathbf{y}_i^j (\mathbf{y}_i^j)^T = Y_i^T Y_i,$$

тогда:

$$S(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \left( \|Y_i\|_F^2 - \max_{\mathbf{e}_i} [\mathbf{e}_i^T K_i \mathbf{e}_i] \right),$$

где  $\|\bullet\|_F$  — норма Фробениуса. Таким образом, имеем  $n$  задач метода главных компонент (МГК) [17]:  $\max_{\mathbf{e}_i} [\mathbf{e}_i^T K_i \mathbf{e}_i]$ . Собственные числа (меньшее и большее) симметричной матрицы  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  обозначим  $\lambda_{\min}(K)$  и  $\lambda_{\max}(K)$ ; единичный собственный вектор, соответствующий  $\lambda_{\max}(K)$ , обозначим  $\mathbf{e}_{\max}(K)$ . Тогда решения задач МГК запишутся следующим образом:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_{\max}(K_i),$$

$$S(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n (\|Y_i\|_F^2 - \lambda_{\max}(K_i)).$$

Но для произвольной вещественной матрицы  $Y$  верно, что

$$\|Y\|_F^2 = \text{tr}(K) = \sum_j \lambda_j(K), \quad K = Y^T Y.$$

Следовательно

$$S(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \left( \lambda_{\min}(K_i) + \lambda_{\max}(K_i) - \lambda_{\max}(K_i) \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_{\min}(K_i). \quad (9)$$

Таким образом, задача (8) свелась к задаче

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} \sum_{i=1}^n \lambda_{\min}(K_i) = \arg \min_{\mathbf{v}} \sum_{i=1}^n \lambda_{\min} \left( \sum_{j=1}^2 (\mathbf{x}_i^j - \mathbf{v})(\mathbf{x}_i^j - \mathbf{v})^T \right),$$

т.е. для нахождения точки схода зашумленного пучка отрезков необходимо минимизировать функционал (9). Отметим, что в некоторых работах прямые  $l_i$  проводятся через середину рассматриваемых отрезков  $\{x_i^1, x_i^2\}$ . Как было показано выше, это предположение не является точным, однако может использоваться как некоторое приближение.

### 3. Пример использования предложенного метода

Вычисление точек схода используется во множестве различных задач компьютерного зрения: для определения направления дорожного полотна, калибровки поворота камеры и исправления проективных искажений плоских объектов (проективной нормализации). В статье [18] описан алгоритм проективной нормализации отдельных страниц на изображениях главных разворотов паспорта гражданина РФ (см. рис. 2) с последующей их локализацией. Для вычисления точек схода в работе используется представленный в данной статье функционал. Алгоритм состоит из следующей последовательности шагов:

1. На изображении детектируются линейные отрезки типа край, хребет и базовая линия текстовой строки.
2. Формируется набор точек схода и соответствующих пучков сходящихся отрезков.
3. Выбираются нескольких пар альтернатив «ортогональных» точек схода.
4. По каждой такой паре выполняется проективная нормализация изображения, преобразующая отрезки сходящихся пучков в вертикальные и горизонтальные.
5. На каждом нормализованном изображении ищется наилучшая локализация каждой из двух страниц паспорта методом Виолы – Джонса [19]. Здесь результат может быть отрицательным для обеих страниц (одна или обе точки схода порождены посторонними линейными объектами на изображении – веером краев других страниц или линейными элементами фона), положительным для одной из страниц (страницы паспорта лежат в разных плоскостях, как на Рис. 2, нормализована одна из них), или даже для двух страниц (в случае плоского разворота).
6. Для каждой страницы паспорта из всех построенных для нее локализаций выбирается наилучшая по некоторой оценке качества.

Теперь более подробно рассмотрим алгоритм выбора пучков отрезков из всего исходного набора и оценки соответствующих им точек схода. Отметим, что отрезки на изображении всегда содержат выбросы – отрезки, не принадлежащие ни одному пучку, и поэтому алгоритм должен быть робастен к их наличию. Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Строятся начальные приближения точек схода – вычисляются точки пересечения пар достаточно длинных (в долях от средней длины всех отрезков) отрезков.



Рис. 2. Изображение проективно искаженного разворота паспорта РФ

2. Из множества полученных точек схода удаляются точки, близко (в долях периметра изображения) расположенные к изображению, так как они будут порождать преобразования с очень сильной проективностью.
3. Для каждой из оставшихся точек схода и каждого отрезка вычисляется степень их несоответствия – сумма расстояний концов отрезка до оптимальной прямой, проходящей через эту точку (соответствующая слагаемому в формуле (9)). Поднабор отрезков, степень несоответствия которых не превышает некоторый порог (в долях периметра изображения) формируют пучок сходящихся отрезков, связанных с данной точкой.
4. Удаляются похожие точки схода. Две точки схода считаются похожими, если суммарная длина отрезков из симметрической разности соответствующих им пучков не превышает некоторого порога (в долях средней длины всех отрезков). Точка с меньшей суммарной длиной отрезков в пучке удаляется.
5. Каждое из полученных начальных приближений точки схода уточняется путем минимизации функционала (9) методом сопряженных градиентов [20].
6. Для каждой уточненной точки схода оценивается соответствующий ей пучок отрезков и удаляются похожие точки (пункты 3 и 4).

Оценка качества предложенного алгоритма проводилась на закрытом датасете, содержащем более 10000 изображений разворотов паспортов. Измерялось количество правильно детектированных страниц на исходном изображении и после проективной нормализации. Эксперимент показал, что использование нормализации уменьшает общее количество ошибок локализации с 6,4% до 1,8%. При этом число некорректно найденных страниц уменьшается с 1,4% до 0,8%, а число не детектированных страниц уменьшается с 5,0% до 0,9%. Итоговое качество наведения при нормализации составляет 98,2%.

## Выводы

В данной работе представлен оригинальный функционал, минимизация которого позволяет вычислить оптимальную точку схода для набора сходящихся зашумленных отрезков. Функционал получен методом максимизации правдоподобия при использовании модели шума отрезка, заданной через нормальное зашумление его концов. Предложенный алгоритм опробован в задаче проективной нормализации изображений документов и их локализации. Эксперимент показал значительное увеличение качества работа детектора страниц документов.

*Работа проводилась при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 18-07-01387 и № 18-29-26035.*

## Литература

1. Clark, P. Rectifying Perspective Views of Text in 3D Scenes Using Vanishing Points / P. Clark, M. Mirmehdi // Pattern Recognition. – 2003. – V. 36, № 11. – P. 2673–2686.
2. Hughes, C. Equidistant Fish-Eye Calibration and Rectification by Vanishing Point Extraction / C. Hughes, P. Denny, M. Glavin, E. Jones // IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2010. – V. 32, № 12. – P. 2289–2296.
3. Xu Cheng. Principal Orientation and Generalized Vanish Point Based Road Detection / Xu Cheng, Cai Youqi, Tian Ya Zheng, Li Tao, Liu Bin Yan // Proceedings of 3rd International Conference on Computer Science and Service System, 13–15 June. – Bangkok, 2014. – P. 394–397.
4. Hornacek, M. Extracting Vanishing Points Across Multiple Views / M. Hornacek, S. Maierhofer // Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 20–25 June. – Colorado, 2011. – P. 953–960.
5. Xu-Cheng Yin. Robust Vanishing Point Detection for MobileCam-Based Documents / Xu-Cheng Yin, Hong-Wei Hao, Jun Sun, S. Naoi // Proceeding of 2011 International Conference on Document Analysis and Recognition, 18–21 September. – Beijing, 2011. – P. 136–140.
6. Grompone von Gioi, R. LSD: a Line Segment Detector. Image Processing on Line / R. Grompone von Gioi, J. Jakubowicz, J. Morel, G. Randall // Image Processing On Line. – 2012. – V. 2. – P. 35–55.
7. Akinlar, C. EDLines: a Real-Time Line Segment Detector with a False Detection Control / C. Akinlar, C. Topal // Pattern Recognition Letters. – 2011. – V. 32, № 13. – P. 1633–1642.
8. Qiang He. Lane Detection and Tracking Through Affine Rectification / Qiang He, Chee-Hung Henry Chu // Proceeding of IAPR Conference on Machine Vision Applications, 16–18 May. – Tokyo, 2007. – P. 536–539.



9. Nikolaev, D.P. Hough Transform: Underestimated Tool in The Computer Vision Field / D.P. Nikolaev, S.M. Karpenko, I.P. Nikolaev, P.P. Nikolayev // Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation, 3–6 June. – Nicosia, 2008. – V. 238. – P. 238–246.
10. Шемякина, Ю.А. Использование точек и прямых для вычисления проективного преобразования по двум изображениям плоского объекта / Ю.А. Шемякина // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2017. – Т. 3. – С. 79–91.
11. Liebowitz, D. Metric Rectification for Perspective Images of Planes / D. Liebowitz, A. Zisserman // Proceedings 1998 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 23–25 June. – Santa Barbara, 1998. – P. 482–488.
12. Schaffalitzky, F. Planar Grouping for Automatic Detection of Vanishing Lines and Points / F. Schaffalitzky, A. Zisserman // Image and Vision Computing. – 2000. – V. 18, № 9. – P. 647–658.
13. Tardif, J.P. Non-Iterative Approach for Fast and Accurate Vanishing Point Detection / J.P. Tardif // Proceeding of 12th IEEE International Conference on Computer Vision, 29 September–2 October. – Kyoto, 2009. – P. 1250–1257.
14. Yiliang Xu. A Minimum Error Vanishing Point Detection Approach for Uncalibrated Monocular Images of Man-Made Environments / Yiliang Xu, Sangmin Oh, A. Hoogs // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 23–28 June. – Portland, 2013. – P. 1376–1383.
15. Ллойд, Э. Справочник по прикладной статистике. Т. 1 / Э. Ллойд, У. Ледерман. – М.: Финансы и статистика, 1989.
16. Себер, Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер – М.: Мир, 1980.
17. Pearson, K. On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space / K. Pearson // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1901. – V. 2, № 11. – P. 559–572.
18. Тропин, Д.В. О локализации плоских объектов на изображениях со сложной структурой проективных искажений / Д.В. Тропин, Ю.А. Шемякина, И.А. Коноваленко, И.А. Фараджев // Информационные процессы. – 2019. – Т. 2. – С. 208–229.
19. Usilin, S. Visual Appearance Based Document Image Classification / S. Usilin, D. Nikolaev, V. Postnikov, G. Schaefer // Proceedings of International Conference on Image Processing (ICIP), 12–15 September. – Hong Kong, 2010. – P. 2133–2136.
20. Гилл, Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985.

Иван Андреевич Коноваленко, Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН (г. Москва, Российская Федерация), [konovalenko@iitp.ru](mailto:konovalenko@iitp.ru).

Юлия Александровна Шемякина, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН (г. Москва, Российская Федерация), [jshemiakina@smartengines.biz](mailto:jshemiakina@smartengines.biz).

Игорь Александрович Фараджев, кандидат физико-математических наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН (г. Москва, Российская Федерация), [ifardjev@yahoo.com](mailto:ifardjev@yahoo.com).

*Поступила в редакцию 21 ноября 2019 г.*

## CALCULATION OF A VANISHING POINT BY THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION METHOD

*I.A. Konovalenko<sup>1</sup>, J.A. Shemiakina<sup>2</sup>, I.A. Faradjev<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>The Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

E-mails: konovalenko@iitp.ru, jshemiakina@smartengines.biz, ifardjev@yahoo.com

The paper presents a method to estimate the position of the vanishing point of a set of converging noisy segments. As a model of segment noise, we use normal noise applied to the end points of the segment. We construct a functional that depends on the position of the considered segments and determine the vanishing point as the point at which the functional reaches its minimum. In order to set such a functional, we use the maximum likelihood estimation method. The obtained functional allows both to pose the problem on numerical minimization and to set the function of correspondence of the segment to the beam, if it is necessary to filter out the emission segments from the initial set. The application of the proposed method is illustrated by the example of correction of projective distortions and the subsequent localization of the pages of the Russian Federation passport on the images of the passport pages. In the framework of this problem, we assume that the segments highlighted in an image correspond to several beams and contain emissions. In order to ensure stability and ability to estimate a set of vanishing points, we propose an algorithm based on the RANSAC scheme. The use of the projective normalization method allows to reduce the number of page localization errors from 6,4% to 1,8%.

*Keywords: vanishing point; maximum likelihood estimation method; segments; image rectification.*

## References

1. Clark P., Mirmehdi M. Rectifying Perspective Views of Text in 3D Scenes Using Vanishing Points. *Pattern Recognition*, 2003, vol. 36, no 11, pp. 2673–2686. DOI: 10.1016/S0031-3203(03)00132-8
2. Hughes C., Denny P., Glavin M., Jones E. Equidistant Fish-Eye Calibration and Rectification by Vanishing Point Extraction. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, vol. 32, no 12, pp. 2289–2296. DOI: 10.1109/TPAMI.2010.159
3. Xu Cheng, Cai Youqi, Tian Ya Zheng, Li Tao, Liu Bin Yan. Principal Orientation and Generalized Vanish Point Based Road Detection. *Proceedings of 3rd International Conference on Computer Science and Service System*, 13–15 June, Bangkok, 2014, pp. 394–397. DOI: 10.2991/csss-14.2014.93
4. Hornacek M., Maierhofer S. Extracting Vanishing Points across Multiple Views. *Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 20–25 June, Colorado, 2011, pp. 953–960. DOI: 10.1109/CVPR.2011.5995396
5. Xu-Cheng Yin, Hong-Wei Hao, Jun Sun, Naoi S. Robust Vanishing Point Detection for MobileCam-Based Documents. *Proceeding of 2011 International Conference on Document Analysis and Recognition*, 18–21 September, Beijing, China, 2011, pp. 136–140. DOI: 10.1109/ICDAR.2011.36

6. Grompone von Gioi R., Jakubowicz J., Morel J., Randall G. LSD: a Line Segment Detector. *Image Processing on Line*. *Image Processing On Line*, 2012, vol. 2, pp. 35–55. DOI: 10.5201/ipol.2012.gjmr-lsd
7. Akinlar C., Topal C. EDLines: a Real-Time Line Segment Detector with a False Detection Control. *Pattern Recognition Letters*, 2011, vol. 32, no 13, pp. 1633–1642. DOI: 10.1016/j.patrec.2011.06.001
8. Qiang He, Chee-Hung Henry Chu. Lane Detection and Tracking through Affine Rectification. *Proceeding of IAPR Conference on Machine Vision Applications*, 16–18 May, Tokyo, 2007, pp. 536–539.
9. Nikolaev D.P., Karpenko S.M., Nikolaev I.P., Nikolayev P.P. Hough Transform: Underestimated Tool in the Computer Vision Field. *Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation*, 3–6 June, Nicosia, 2008, vol. 238, pp. 238–246. DOI: 10.7148/2008-0238
10. Shemiakina J. [The Usage of Points and Lines for the Calculation of Projective Transformation by Two Images of One Plane Object]. *Information Technologies and Computation Systems*, 2017, no. 3, pp. 79–91. (in Russian)
11. Liebowitz D., Zisserman A. Metric Rectification for Perspective Images of Planes. *Proceedings 1998 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 23–25 June, Santa Barbara, 1998, pp. 482–488. DOI: 10.1109/CVPR.1998.698649
12. Schaffalitzky F., Zisserman A. Planar Grouping for Automatic Detection of Vanishing Lines and Points. *Image and Vision Computing*, 2000, vol. 18, no 9, pp. 647–658. DOI: 10.1016/S0262-8856(99)00069-4
13. Tardif J.P. Non-Iterative Approach for Fast and Accurate Vanishing Point Detection. *Proceeding of 12th IEEE International Conference on Computer Vision*, 29 September–2 October, Kyoto, 2009, pp. 1250–1257. DOI: 10.1109/ICCV.2009.5459328
14. Yiliang Xu, Sangmin Oh, Hoogs A. A Minimum Error Vanishing Point Detection Approach for Uncalibrated Monocular Images of Man-Made Environments. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 23–28 June, Portland, 2013, pp. 1376–1383. DOI: 10.1109/CVPR.2013.181
15. Lloyd E., Lederman U. *Spravochnik po prikladnoy statistike. T. 1* [Applied Statistics Manual], Moscow, Financy i statistika, 1989.
16. Seber G.A.F., Lee A.J. *Linear Regression Analysis*. Hoboken, New Jersey, John Wiley and Sons, 2003.
17. Pearson K. On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1901, vol. 2, no 11, pp. 559–572.
18. Tropin D.V., Shemiakina J.A., Konovalenko I.A., Faradjev I.A. [Localization of Planar Objects on the Images with Complex Structure of Projective Distortion]. *Information Processes*, 2019, no. 2, pp. 208–229. (in Russian)
19. Usilin S., Nikolaev D., Postnikov V., Schaefer G. Visual Appearance Based Document Image Classification. *Proceedings of International Conference on Image Processing (ICIP)*, 12–15 September, Hong Kong, 2010, pp. 2133–2136.
20. Gill P., Murray W., Wright M. *Practical Optimization*. San Diego, Academic Press, 1981.

*Received November 21, 2019*