

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ

М.В. Куркина¹, В.В. Славский¹

¹Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск,
Российская Федерация

Наиболее универсальный метод имитационного моделирования – стохастическое моделирование. Первоначально Энрико Ферми в 1930-х годах в Италии, а затем Джон фон Нейман и Станислав Улам в 1940-х в Лос-Аламосе предложили использовать стохастический подход для аппроксимации многомерных интегралов в уравнениях переноса, возникших в связи с задачей о движении нейтрона в изотропной среде. После начала использования компьютеров произошел большой прорыв, и этот метод стал применяться в самых разных задачах, для решения которых стохастический подход оказался более эффективным, чем другие математические методы. В данной работе изучается форма случайного выпуклого овала на плоскости и более общая задача форма случайной замкнутой кривой на плоскости, исследуется изопериметрическое отношение – отношение квадрата длины кривой к площади ограниченной кривой. Величина этого отношения в силу изопериметрического неравенства ограничена и характеризует отклонение кривой от окружности. Определяется конечномерное многообразие замкнутых регулярных кривых на плоскости и его бесконечномерный аналог. Изучается вероятностные распределения изопериметрического отношения на них. Основным результатом состоит в установлении аналитического закона вероятностного распределения отношения – как распределения Фреше являющиеся частным случаем обобщенного распределения экстремальных значений. Основным используемым методом является разложение Фурье опорной функции множества на плоскости и применение математических пакетов Mathematica и Matlab при стохастическом моделировании.

Ключевые слова: изопериметрическое отношения; распределения экстремальных значений.

Введение

Геометрические вероятности – один из самых старых и востребованных объектов исследований в приложениях теории вероятностей, достаточно упомянуть монографию [1]. В последние десятилетия интерес к предмету значительно возрос под влиянием приложений в физике, астрономии, биологии, кристаллографии, петрографии и т.д.

В данной работе изучается форма случайного выпуклого овала на плоскости и более общая задача форма случайной замкнутой кривой на плоскости, исследуется изопериметрическое отношение – отношение квадрата длины кривой к площади ограниченной кривой. Величина этого отношения в силу изопериметрического неравенства ограничена и характеризует отклонение кривой от окружности.

Определяется конечномерное многообразие замкнутых регулярных кривых на плоскости и его бесконечномерный аналог. Изучается и вероятностные распределения изопериметрического отношения на них. Основным результатом состоит в гипотезе того, что данное отношение имеет распределение Фреше, также известное как обратное распределение Вейбулла, и являющиеся частным случаем обобщенного распределения экстремальных значений. Названное в честь Мориса Фреше, написавшего

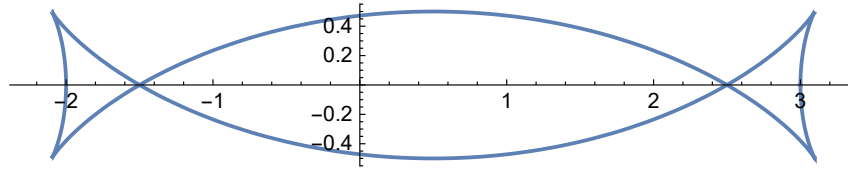


Рис. 1. Кривая с опорной функцией $h(\phi) = 3/2 + 1/2 \cos(\phi) + 1 \cos(2\phi)$

соответствующую статью в 1927 году, дальнейшая работа была проделана Фишером и Типпеттом в 1928 году и Гамбелем в 1958 году.

Основным используемым методом является разложение Фурье опорной функции множества на плоскости и применение математических пакетов Mathematica и Matlab при стохастическом моделировании. Отметим определенную связь между теорией распределения экстремальных значений в статистике и тропической математикой.

1. Представление опорной функции рядом Фурье

Обозначим вслед [2] за множество всех компактных выпуклых подмножеств евклидовой арифметической плоскости R^2 через CSC . В отличие от работы [2] мы воспользуемся хорошо разработанным аппаратом разложения в ряд Фурье [3–5].

Определение 1. Пусть $K \in CSC$, $n(\phi) = [\cos(\phi), \sin(\phi)]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ – единичный вектор на плоскости R^2 . Опорной функцией $h_K(\phi)$ множества K называется функция:

$$h_K(\phi) = \max_{r \in K} (n(\phi), r), \quad \phi \in [0, 2\pi],$$

где $(n(\phi), r)$ – скалярное произведение вектора $n(\phi)$ и радиус вектора точки $r \in K$. По функции $h(\phi)$, $\phi \in [0, 2\pi]$ можно найти границу множества K , как огибающую семейства опорных прямых:

$$x \cos(\phi) + y \sin(\phi) = h(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Уравнение огибающей находится из системы уравнений [6]:

$$\begin{aligned} x \cos(\phi) + y \sin(\phi) &= h(\phi), \\ -x \sin(\phi) + y \cos(\phi) &= h'(\phi). \end{aligned}$$

В параметрической форме оно имеет вид:

$$r(\phi) = \begin{cases} x = h(\phi) \cos(\phi) - \sin(\phi)h'(\phi), \\ y = \cos(\phi)h'(\phi) + h(\phi) \sin(\phi). \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение (1) мы будем рассматривать также, независимо от K , просто как удобный способ задания замкнутой кривой с помощью периодической функции $h(\phi)$, которую будем называть опорной, как и в случае выпуклой кривой. (Пример такой кривой на рис. 1).

Касательный вектор к кривой при данной параметризации равен

$$\frac{dr}{d\phi} = \dot{r}(\phi) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) (h''(\phi) + h(\phi)) \\ \cos(\phi) (h''(\phi) + h(\phi)) \end{bmatrix}.$$

Элемент длины кривой (1) принимает вид $ds = |dr| = |h''(\phi) + h(\phi)|d\phi$, коэффициент $h''(\phi) + h(\phi) = \frac{ds}{d\phi}$ равен величине обратной к кривизне кривой (1). Знак $h(\phi) + h''(\phi)$ дает условие локальной выпуклости или вогнутости кривой, относительно направления обхода кривой и естественной ориентации плоскости. Формула для длины кривой имеет вид:

$$L = \int_0^{2\pi} |h(\phi) + h''(\phi)|d\phi.$$

В случае если $h(\phi) + h''(\phi) \geq 0$, формула длины упрощается:

$$L = \int_0^{2\pi} |h(\phi) + h''(\phi)|d\phi = \int_0^{2\pi} h(\phi)d\phi,$$

за счет периодичности функции $h(\phi)$. Площадь охваченная кривой (1) на плоскости (с учетом знака и кратности) равна:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\phi) (h(\phi) + h''(\phi)) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h(\phi)^2 - h'(\phi)^2) d\phi.$$

Рассмотрим разложение функции $h(\phi)$ в ряд Фурье:

$$h(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\phi + \theta_k), \quad (2)$$

где $a_0 > 0$, $A_k \geq 0$ – амплитуды, $\theta_k \in [0, 2\pi]$ – фазы гармоник разложения. Первое слагаемое – $A_1 \cos(\phi + \theta_1)$ в силу уравнения (1) отвечает параллельному сдвигу кривой на вектор $[A_1 \cos(\theta_1), A_1 \sin(\theta_1)]$, поэтому при исследовании свойств кривой инвариантных относительно сдвига его можно отбросить.

Замечание 1. Условие регулярности кривой (1) имеет вид:

$$h''(\phi) + h(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} A_k(1 - k^2) \cos(k\phi + \theta_k) \neq 0, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

условие (3) будет автоматически выполнено, если потребовать более сильное условие:

$$\frac{a_0}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 - 1)A_k > 0, \quad (4)$$

при этом $h(\phi) + h''(\phi) \geq 0$.

Определение 2. Обозначим через C_0 бесконечномерное многообразие всех регулярных замкнутых выпуклых кривых на плоскости коэффициенты Фурье опорных функций $h(\phi)$ которых удовлетворяют условию (4), аналогично через $C_0^n \subset C_0$ обозначим многообразие кривых для которых дополнительно $A_k = 0$ при $k > n$.

Замечание 2. Из условия (4) следует ограниченность $(k^2 - 1)A_k \leq C$ отсюда $A_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, поэтому функция $h(\phi)$ и кривая $K \in C_0$ будут кусочно непрерывно дифференцируемые [5], а если $K \in C_0^n$, то опорная функция есть тригонометрический полином и кривая (1) аналитична.

Теорема 1. Площадь охваченная кривой $K \in C_0$ с учетом кратности обхода, а также длина кривой выражаются через коэффициенты Фурье функции $h(\phi)$ и равны:

$$S = \frac{\pi}{4} \left(a_0^2 - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1) A_k^2 \right), \quad L = \pi a_0. \quad (5)$$

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

Определение 3. Изопериметрическим отношением замкнутой кривой (1) называется число

$$Z = \frac{L^2}{4\pi S}. \quad (6)$$

Известно [7], что $Z \geq 1$. Число $Z = 1$, если и только если кривая есть окружность, величину Z часто используют как меру отклонения кривой от окружности.

Теорема 2. Для регулярных кривых $K \in C_0$ справедливо неравенство:

$$Z \leq \frac{6}{5}. \quad (7)$$

Доказательство. Для кривой $K \in C_0$ справедлива формула:

$$Z = \frac{a_0^2}{a_0^2 - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1) A_k^2},$$

введем для кривых $K \in C_0$ обозначение $b_k = \frac{A_k(k^2 - 1)}{a_0}$, $k > 1$ – приведенные коэффициенты Фурье функции $h(\phi)$. В этих обозначениях:

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k \leq \frac{1}{2}, \quad h(\phi) = a_0 \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{b_k}{k^2 - 1} \cos(k\phi + \theta_k) \right],$$

$$h(\phi) + h''(\phi) = a_0 \left[\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} b_k \cos(k\phi + \theta_k) \right] \geq 0, \quad Z = \frac{1}{1 - 2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{b_k^2}{k^2 - 1}}.$$

Очевидно, что:

$$2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{b_k^2}{k^2 - 1} \leq 2 \max\{b_k\} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{b_k}{k^2 - 1} \leq 2 \frac{\frac{1}{2^2}}{2^2 - 1} = \frac{1}{6}.$$

отсюда: $Z \leq \frac{6}{5}$. □

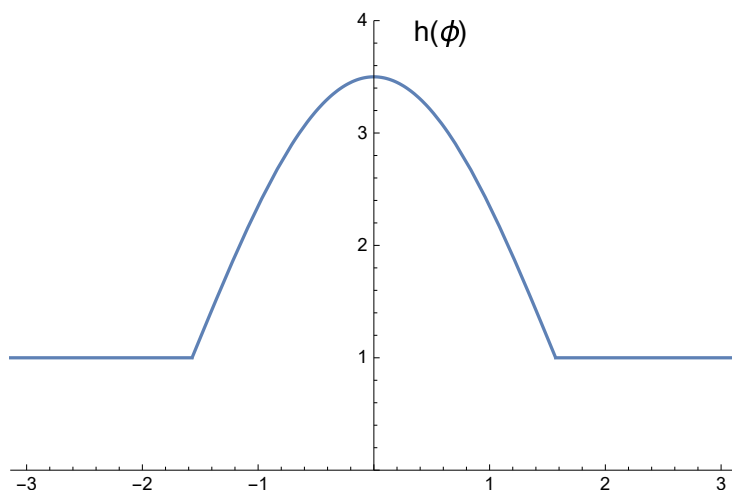


Рис. 2. График функции $h(\phi)$ к примеру 1: $R = 1$, $L = 2,5$, $Z = 1,24435$

Пример 1. Пусть опорная функция кривой (рис. 3) равна:

$$h(\phi) = \begin{cases} R + L \cos(\phi), & \text{если } \phi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ R, & \text{если } \phi \notin [-\pi/2, \pi/2], \end{cases}$$

тогда $Z = \frac{(2\pi R + 2L)^2}{4(\pi R^2 + 2RL)}$. Решая неравенство $Z > \frac{6}{5}$ получим, что при $\frac{L}{R} > \frac{1 + \sqrt{6}}{5}\pi \approx 2,16738$ кривая $K \notin C_0$. Опорная функция $h(\phi)$ примера 1 непрерывная и кусочно дифференцируемая, разложение ее в ряд Фурье имеет вид:

$$h(\phi) = \frac{2(L + \pi R)}{\pi} + \frac{1}{2}L \cos(\phi) + \frac{2L \left(\frac{1}{3} \cos(2\phi) - \frac{1}{15} \cos(4\phi) + \frac{1}{35} \cos(6\phi) - \frac{1}{63} \cos(8\phi) + \dots \right)}{\pi}.$$

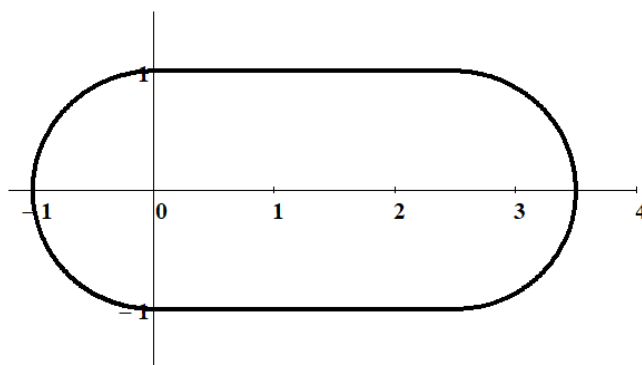


Рис. 3. Кривая к примеру 1: $R = 1$, $L = 2,5$, $Z = 1,24435$

Замечание 3. Как следует из доказательства теоремы 2 равенство $Z = \frac{6}{5}$ для кривой $K \in C_0$ означает, что $b_k = 0$ при $k \geq 3$ и $b_2 = \frac{1}{2}$, $h(\phi) = 1 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(2\phi) \right]$. Неравенство (7) достигается, примером служит двугольник:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{12}(9 \cos(\phi) - \cos(3\phi)), \\ y = \frac{\sin^3(\phi)}{3}. \end{cases}$$

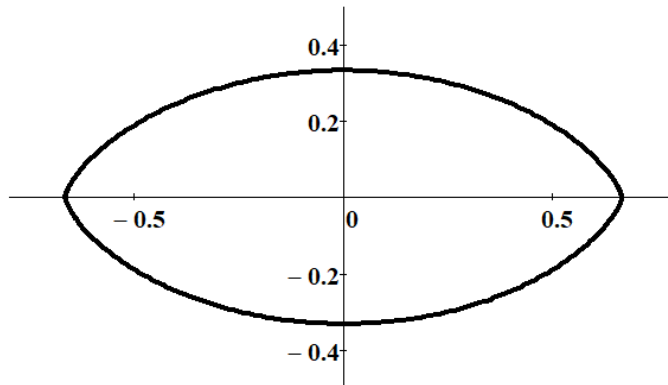


Рис. 4. Рисунок к замечанию 4: $b_2 = \frac{1}{2}$, $h(\phi) = 1 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(2\phi) \right]$

Определение 4. Пусть $\omega = [a_0, \{b_k\}_{k=2}^n, \{\theta_k\}_{k=2}^n]$ система чисел таких, что:

$$a_0 > 0, b_k \geq 0, \sum_{k=2}^n b_k \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta_k < 2\pi, k = 2, \dots, n,$$

и пусть $\Omega_n(1)$ совокупность всех таких ω при $a_0 = 1$. Сопоставим набору чисел $\omega \in \Omega_n(1)$ опорную функцию $h_\omega(\phi)$ – тригонометрический полином:

$$h_\omega(\phi) = \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{b_k}{k^2 - 1} \cos(k\phi + \theta_k) \right],$$

и соответствующую кривую $K_\omega \in C_0^n$ определенную с точностью до движения.

Следствие 1. Имеется взаимнооднозначное соответствие между кривыми $K \in C_0^n$ определенными с точностью до гомотетии и точками подмножества $\Omega_n(1) \subset \mathbb{R}_+^{n-1} \times [0, 2\pi]^{n-1}$ евклидова пространства.

Определение 5. Множество $\Omega_n(1)$ вместе с метрикой из евклидова пространства дает естественную параметризацию многообразия замкнутых регулярных кривых C_0^n . Данное определение мотивировано тем, что приведенные коэффициенты Фурье $\{b_k\}_{k=2}^n$ опорной функции $h(\phi)$ инвариантны относительно гомотетий замкнутой выпуклой кривой на плоскости, а фазы $\{\theta_k\}_{k=2}^n$ определены с точностью до слагаемого. Аналогичным образом определим $\Omega_\infty(1)$ – параметризацию бесконечномерного многообразия C_0 – замкнутых регулярных выпуклых кривых.

2. Распределение значений изопериметрического отношения Z на пространстве C_0^n

Определение 6. Обозначим через $\Omega'_n(1)$ проекцию (или фактор пространство) $\Omega_n(1)$:

$$\Omega'_n = \left[\{b_k\} \in R_+^{n-1} : \text{где } b_k \geq 0 \sum_{k=2}^n b_k \leq \frac{1}{2} \right].$$

Пространство Ω'_n представляет собой симплекс:

$$\Omega'_n = \left[\{b_k\} \in R_+^{n-1} : \text{где } b_k \geq 0 \sum_{k=2}^n b_k \leq \frac{1}{2} \right].$$

Функция Z задана на Ω'_n формулой:

$$Z(b_k) = \frac{1}{1 - 2 \sum_{k=2}^n \frac{b_k^2}{k^2-1}},$$

и принимает значения $1 \leq Z \leq \frac{6}{5}$. Пусть $c \in [1, 6/5]$ рассмотрим подмножество

$$\Omega'_n(c) = [\{b_k\}_{k=2}^n : Z(b_k) \leq 1 + c].$$

Функция распределения значений Z равна отношению объемов:

$$F_n(c) = \frac{p(\Omega'_n(c))}{p(\Omega'_n)} = \frac{|\Omega'_n(c)|}{|\Omega'_n|},$$

где $|\Omega'_n| = \frac{1}{2^{n-1}n!}$ – евклидов объем симплекса Ω'_n .

Пример 2. Рассмотрим подробнее случай $n = 2$. Множество $\Omega'_2(c) \subset R^2$ на плоскости задано в виде:

$$0 \leq b_2, b_3; b_2 + b_3 \leq \frac{1}{2}; \frac{1}{1 - 2 \left(\frac{b_2^2}{3} + \frac{b_3^2}{8} \right)} \leq 1 + c$$

или

$$0 \leq b_2, b_3; b_2 + b_3 \leq \frac{1}{2}; \frac{b_2^2}{3} + \frac{b_3^2}{8} \leq \frac{c}{2(1+c)},$$

На рис. 5 изображена область $\Omega'_2(c)$ при различных значениях c . Площадь $F_2\left(\frac{1}{17}\right)$ равна:

$$F_2\left(\frac{1}{17}\right) = \frac{192\sqrt{3} - 18\sqrt{39 - 12\sqrt{3}} - 24\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} - 24\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + 18\sqrt{39 + 12\sqrt{3}}}{4396} + \\ + \frac{242\sqrt{6}\pi + 121\sqrt{6} \sin^{-1}\left(\frac{1}{11}(3\sqrt{3} - 4)\right) - 121\sqrt{6} \sin^{-1}\left(\frac{1}{11}(4 + 3\sqrt{3})\right)}{4356}.$$

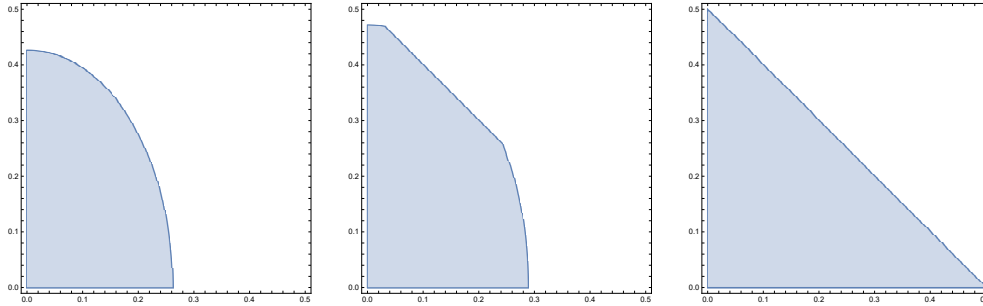


Рис. 5. Рисунок к примеру 2: $c = \frac{1}{21}$, $c = \frac{1}{17}$, $c = \frac{1}{5}$

Замечание 4. Видно, что уже в случае $n = 2$ формула для функции распределения $F_2(c)$ имеет составной, сложный вид. В принципе еще остается возможность того, что формула упростится, если перейти к пределу:

$$F_\infty(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(c). \tag{8}$$

В следующем пункте будет дано представление эмпирической функции $F_\infty(c)$ распределения значений Z путем стохастического моделирования.

3. Стохастическое моделирование кривой на плоскости

Используя математические пакеты Matlab и Mathematica были проведены стохастические моделирование замкнутых регулярных C_0^n кривых на плоскости с целью получения эмпирической функции распределения значения изопериметрического отношения Z .

При помощи генератора случайных чисел в Matlab строились коэффициенты разложения Фурье функции $h(\phi)$. Затем вычислялись уравнение кривых (1). Отсеивались нерегулярные кривые и вычислялись L, S, Z с помощью формул (4) – (7). Результатом этих вычислений на Matlab были серии длины 600 – 800 случайных тригонометрических полиномов $h(\phi)$ степени $n \leq 18$, по которым вычислялись распределения функции Z . Далее, эти серии исследовались с помощью удобной процедуры из Mathematica:

$$FindDistribution[dat].$$

Которая подбирает наиболее близкое вероятностное распределений из 23 стандартных, имеющихся в пакете Mathematica и смеси их (MixtureDistribution). На первое место чаще всего выходило трех параметрическое распределение Freche:

$$FrechetDistribution(\alpha, \beta, \mu, x) = \begin{cases} \frac{\alpha e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)^{-\alpha}} \left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)^{-\alpha-1}}{\beta}, & x > \mu; \\ 0, & \text{True.} \end{cases}$$

В таблице приведены результаты для значений параметров $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ распределения Freche в ходе 4 испытаний. На рис. 6 и 7 приведены графики соответствующих эмпирических распределений величины Z .

Таблица

Результаты моделирования

N	α	β	μ	P-Value
1	4,01350	0,011038	0,994077	0,996642
2	6,60121	0,019339	0,986328	0,982874
3	4,46088	0,012403	0,992845	0,971323
4	5,29214	0,014452	0,990937	0,998749

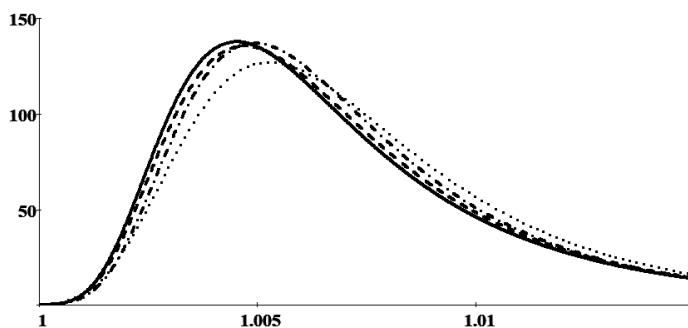


Рис. 6. Графики распределений Фреше из таблицы

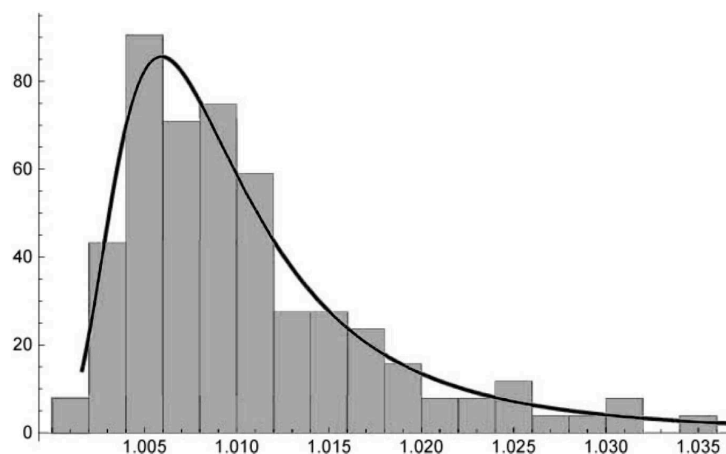


Рис. 7. Распределение значений Z по результатам стохастического моделирования

Заключение

Основываясь на экспериментальных результатах стохастического моделирования и следуя философским идеям В.И. Арнольда [8] об «экспериментальной математике» можно выдвинуть гипотезу, что существуют такие значения параметров $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, что распределение значений (8) функции $Z = \frac{L^2}{4\pi S}$ на бесконечномерном многообразии CS – всех плоских замкнутых выпуклых кривых (не обязательно регулярных, не обязательно из класса C_0) подчиняется закону распределения Фреше с этими параметрами.

Статья посвящается 65-летнему юбилею профессора С.Г. Пяткова, руководителя научной школы «Математическое моделирование в решении задач естество-

знания и социально-экономической сферы» Югорского государственного университета.

Работа проводилась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 05.5/19-ЮГУ-105.

Литература

1. Сантало, Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности / Л. Сантало. – М.: Наука, 1983.
2. Marckert, J.F. Compact Convex Sets of the Plane and Probability Theory / J.F. Marckert, D. Renault // ESAIM: Probability and Statistics. – 2014. – V. 18. – P. 854–880.
3. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т. 1,2 / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965.
4. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М.: Физматлит, 1961.
5. Бесов, О.В. Тригонометрические ряды Фурье / О.В. Бесов. – М.: МФТИ, 2004.
6. Залгаллер, В.А. Теория огибающих / В.А. Залгаллер. – М.: Наука, 1975.
7. Поля, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Поля, Г. Сеге. – М.: Физматлит, 1962.
8. Арнольд, В.И. Математика: границы и перспективы. – М.: ФАЗИС, 2005.

Мария Викторовна Куркина, кандидат физико-математических наук, доцент, институт «Цифровая экономика», Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация), mavi@inbox.ru.

Виктор Владимирович Славский, доктор физико-математических наук, профессор, институт «Цифровая экономика», Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация), slavsky2004@mail.ru.

Поступила в редакцию 10 октября 2020 г.

MSC 00A71

DOI: 10.14529/mmp210103

STOCHASTIC MODELLING OF CLOSED CURVES IN THE PLANE

M. V. Kurkina¹, V. V. Slavsky¹

¹Ugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation

E-mails: mavi@inbox.ru, slavsky2004@mail.ru

The most versatile simulation method is stochastic simulation. Initially, Enrico Fermi in the 1930s in Italy, and then John von Neumann and Stanislav Ulam in the 1940s at Los Alamos, proposed using a stochastic approach to approximate multidimensional integrals

in transport equations arising in connection with the problem of the motion of a neutron in an isotropic medium. After the start of the use of computers, there was a big breakthrough, and this method began to be applied in a wide variety of problems, for which the stochastic approach proved to be more effective than other mathematical methods. In this paper, we study the shape of a random convex oval in a plane and a more general problem, the shape of a random closed curve in a plane, investigate the isoperimetric ratio - the ratio of the squared length of a curve to the area of bounded curve. The value of this ratio, due to the isoperimetric inequality, is limited and characterizes the deviation of the curve from the circle. A finite-dimensional manifold of closed regular curves in the plane and its infinite-dimensional analog are defined. The probability distributions of the isoperimetric ratio on them are studied. The main result is to establish an analytical law for the probability distribution of the ratio – as Frechet distributions, which are a particular case of the generalized distribution of extreme values. The main method used is the Fourier expansion of the support set function on the plane and the use of mathematical packages Mathematica and Matlab for stochastic modeling.

Keywords: isoperimetric relationship; distribution of extreme values.

References

1. Santalo, L. *Integralnaya geometria i geometricheskie verojatnosti* [Integral Geometry and Geometric Probabilities]. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)
2. Marckert, J.F. Compact Convex Sets of the Plane and Probability Theory. *ESAIM: Probability and Statistics*, 2014, vol. 18, pp. 854–880. DOI: 10.1051/ps/2014008
3. Sigmund, A. *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric Series]. Moscow, Mir, 1965. (in Russian)
4. Bari, N.K. *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric Series]. Moscow, Fizmatlit, 1961. (in Russian)
5. Besov, O.V. *Trigonometricheskie ryady Furie* [Trigonometric Fourier Series]. Moscow, MIPT, 2004. (in Russian)
6. Zalgaller, V.A. *Teoriya ogibajushhih* [The Theory of Envelopes]. Moscow, Nauka, 1975. (in Russian)
7. Polya, G., Szegő, G. *Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoj fizike* [Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 1962. (in Russian)
8. Arnold, V.I. *Matematika: granicy i perspektivy* [Mathematics: Boundaries and Perspectives]. Moscow, FAZIS, 2005. (in Russian)

Received October 10, 2020