

## **АДАПТАЦИЯ МЕТОДА КУРОПАТЕНКО ДЛЯ РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ**

*П.Е. Беляев<sup>1</sup>, И.Р. Макеева<sup>1,2</sup>, Е.Е. Пугасов<sup>1,2</sup>, Д.А. Мастюк<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск, Российская Федерация

<sup>2</sup>Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

В настоящее время отсутствует реализация хорошо зарекомендовавшего себя численного метода Куропатенко в эйлеровых координатах. Такая реализация имеет высокий потенциал для решения определенного круга задач. Данная работа посвящена адаптации метода Куропатенко для расчетов ударных волн в эйлеровых координатах. Представлена идея метода, приведены разностные уравнения и вычислительный алгоритм для идеальной среды. Работоспособность предложенного численного метода продемонстрирована на результатах решения задач о распаде произвольного разрыва и о распространении стационарной ударной волны, приведены отклонения газодинамических величин от аналитических решений. Хорошее согласие численных решений с аналитическими подтверждает адекватность построенного алгоритма и метода в целом.

*Ключевые слова:* ударная волна; метод Куропатенко; численные методы; законы сохранения.

### **Введение**

При решении многих задач современной науки и техники, связанных с обоснованием работы различных промышленных технологических установок, актуальным является трехмерное моделирование газодинамических течений. При этом математическая модель, описывающая поведение исследуемой среды, как правило, записывается в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных, выражающих законы сохранения массы, количества движения и энергии либо их следствия. Это накладывает дополнительные требования гладкости на функциональные зависимости, являющиеся решением таких систем, в частности, предполагает отсутствие ударных волн в объекте моделирования. Такой подход в большинстве случаев является оправданным при описании нормальных режимов эксплуатации, однако при аварийных ситуациях могут возникнуть области высоких давлений, температур или скоростей, что может привести к возникновению сверхзвуковых течений, в частности, ударных волн (УВ). Ударная волна представляет собой узкую область (сравнимую с длиной свободного пробега молекулы), в которой градиенты газодинамических величин стремятся к бесконечности, что математически описывается как разрыв соответствующих функций. Попытка построить непрерывное решение системы законов сохранения газовой динамики в случае волны сжатия приводит к потере однозначности решения

и, следовательно, к отсутствию непрерывного решения [1]. Кроме того, в дифференциальные уравнения газовой динамики без учета вязкости и теплопроводности заложено условие адиабатичности процесса  $dS/dt = 0$ , а на ударной волне энтропия растет, поэтому для учета возникающих ударных волн в численном методе должен быть предусмотрен механизм описания диссипации энергии на фронте УВ.

Для расчетов сильных ударных волн, в основном, применяются численные методы, аппроксимирующие систему законов сохранения механики сплошной среды (МСС) в лагранжевых координатах, к которым относится и хорошо зарекомендовавший себя метод расчета ударных волн В.Ф. Куропатенко [2, 3], достоинства которого являются монотонность на ударной волне, отсутствие эмпирических параметров, постоянство энтропии на непрерывных решениях. Существует несколько модификаций метода Куропатенко, которые применяются для практических расчетов в одномерной постановке в лагранжевых координатах [4, 5]. Так же существует обобщение метода до двумерного случая, которое не было доведено до реализации [6]. Применение лагранжевого подхода в двух- и трехмерной постановках осложняется возможностью вырождения ячеек расчетной сетки при деформации, особенно при использовании неортогональных нерегулярных сеток, поэтому обычно используются лагранжево-эйлеровы алгоритмы. Описание движений многоскоростных многокомпонентных сред на лагранжевой сетке затруднено в связи со сложностью выделения отдельных частиц смеси. Использование индивидуальных лагранжевых координат для каждого компонента существенно усложняет логику вычислительных алгоритмов и требует постоянной перестройки сетки.

Использование эйлеровых сеток, несомненно, имеет свои недостатки, такие как сложность отслеживания контактных границ и необходимость решения уравнений адвекции. Тем не менее, в случае, когда моделируемый процесс не связан с большими деформациями расчетной области, например, протекает в области, ограниченной аппаратом или установкой, проведение двух- и трехмерных расчетов на неподвижных эйлеровых сетках позволяет избежать описанных выше недостатков лагранжева и лагранжево-эйлерова подходов и моделировать течения, в том числе, многокомпонентных сред, в областях со сложной геометрией. Поэтому эйлеров подход является перспективным при моделировании аварийных процессов на промышленных объектах, и, соответственно, интересным является разработка такого численного метода, который позволит, также, с достаточной точностью описывать распространение ударных волн.

Как отмечено выше, наличие ударной волны с математической точки зрения означает наличие разрыва в функциональных зависимостях, описывающих основные газодинамические параметры – плотность, скорость, энергию, давление, что противоречит требованию дифференцируемости функций, описываемых системой дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому для описания течений с ударными волнами представляется естественным использование законов сохранения массы, импульса и энергии в интегральной форме. Этому требованию соответствует метод конечных объемов (МКО) [7] который позволяет использовать в расчетах произвольные сетки, состоящие из выпуклых многогранников. В МКО все искомые величины определяются в центрах вычислительных ячеек, а для определения решения на следующем временном слое используются вспомогательные величины, определенные в центрах каждой грани. В зависимости от способа определения вспомогательных

величин получают различные модификации МКО. Таким образом, представляется актуальным использовать дивергентный метод Куропатенко [5] для расчета вспомогательных величин на гранях эйлеровых ячеек, что позволит описать диссипацию энергии на фронте ударной волны и моделировать течения в широком диапазоне интенсивностей, характерном для предметной области. О существовании реализаций метода Куропатенко в эйлеровых координатах на момент написания статьи авторам неизвестно.

Обоснование адекватности предложенного подхода предполагает проверку свойств численного метода в одно-, дву- и трехмерной постановках. В данной статье приводятся описание и результаты тестирования численного метода в эйлеровых координатах в одномерном случае, что, в силу простоты конечных выражений и наличия аналитических решений для множества одномерных постановок газодинамических задач, позволяет продемонстрировать его свойства и оценить перспективы дальнейшей разработки для многомерных задач.

## 1. Алгоритм в эйлеровых координатах

Рассмотрим систему уравнений законов сохранения для идеальной среды в эйлеровых координатах в одномерном случае:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho U = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho U + \frac{\partial}{\partial x}\rho U^2 + \frac{\partial}{\partial x}P = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x}\rho\varepsilon U + \frac{\partial}{\partial x}PU = 0. \quad (3)$$

Для замыкания системы уравнений, воспользуемся уравнением состояния вещества вида:

$$P = P(\rho, \varepsilon). \quad (4)$$

Решение системы уравнений будем производить в несколько этапов.

*Этап I.* Сначала определим значения вспомогательных величин  $P^*$ ,  $U^*$  и  $\rho^*$  на гранях ячеек в соответствии с классическим подходом метода Куропатенко [3], воспользовавшись системой законов сохранения на сильном разрыве.

*Этап II.* Поскольку вспомогательные величины  $U^*$  и  $\rho^*$  являются параметрами потоков через грани ячеек, воспользовавшись ими, определим значение плотности в ячейке на новом временном слое из уравнения (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho^*U^* = 0, \quad (5)$$

что в разностном виде для одномерного случая может быть записано как

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - (\rho_{i+0,5}^*U_{i+0,5}^* - \rho_{i-0,5}^*U_{i-0,5}^*) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (6)$$

Здесь и далее  $\Delta t$  – шаг по времени,  $\Delta x$  – шаг по пространству,  $i$  – индекс ячейки сетки (целыми индексами обозначены величины в центрах ячеек, дробными – на гранях).

*Этап III.* На данном этапе рассматривается движение среды исключительно за счет работы давления вдоль траектории. Таким образом, конвективные слагаемые в уравнениях (2) и (3) принимаются равными нулю, что позволяет определить предварительные значения скорости  $\tilde{U}$  и энергии  $\tilde{\varepsilon}$  в ячейках из соответствующих уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \tilde{U} + \frac{\partial}{\partial x} P^* = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \tilde{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x} P^* U^* = 0, \quad (8)$$

что может быть представлено в разностном виде как

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} U_i^n - \frac{1}{\rho_i^{n+1}} (P_{i+0,5}^* - P_{i-0,5}^*) \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (9)$$

$$\tilde{\varepsilon}_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} \varepsilon_i^n - \frac{1}{\rho_i^{n+1}} (P_{i+0,5}^* U_{i+0,5}^* - P_{i-0,5}^* U_{i-0,5}^*) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (10)$$

*Этап IV.* Данный этап предполагает расчет потоков импульса  $J$  и энергии  $\xi$  через грани ячеек и получение окончательных значений параметров на новом временном слое из уравнений:

$$J = \rho \tilde{U} U^*, \quad (11)$$

$$\xi = \rho U^* \tilde{\varepsilon}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho U + \frac{\partial}{\partial x} J = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} \xi = 0. \quad (14)$$

Разностные уравнения для данного этапа в одномерном случае принимают вид:

$$J_{i+0,5} = \begin{cases} U_{i+0,5}^* \tilde{U}_i^{n+1} \rho_i^{n+1}, & U_{i+0,5}^* > 0, \\ U_{i+0,5}^* \tilde{U}_{i+1}^{n+1} \rho_{i+1}^{n+1}, & U_{i+0,5}^* < 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\xi_{i+0,5} = \begin{cases} U_{i+0,5}^* \tilde{\varepsilon}_i^{n+1} \rho_i^{n+1}, & U_{i+0,5}^* > 0, \\ U_{i+0,5}^* \tilde{\varepsilon}_{i+1}^{n+1} \rho_{i+1}^{n+1}, & U_{i+0,5}^* < 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$U_i^{n+1} = \tilde{U}_i^{n+1} - \frac{1}{\rho_i^{n+1}} (J_{i+0,5} - J_{i-0,5}) \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (17)$$

$$\varepsilon_i^{n+1} = \tilde{\varepsilon}_i^{n+1} - \frac{1}{\rho_i^{n+1}} (\xi_{i+0,5} - \xi_{i-0,5}) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (18)$$

В завершении, определим давление на новом временном слое из уравнения состояния:

$$P_i^{n+1} = P \left( \rho_i^{n+1}, \varepsilon_i^{n+1} - 0,5 (U_i^{n+1})^2 \right). \quad (19)$$

## 2. Результаты тестовых расчетов

В целях валидации и верификации разработанной методики было проведено тестирование реализованного алгоритма на трех тестовых задачах: задаче Сода об ударной трубе, задаче о распаде произвольного разрыва и задаче о распространении стационарной ударной волны. Результаты тестирования приведены ниже. Методика тестирования, помимо визуального сравнения результатов расчетов с точными решениями, включает в себя также оценку относительной ошибки, рассчитанной по формуле:

$$\varepsilon_f = \frac{100\%}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{f_i - \bar{f}_i}{\bar{f}_i} \right|, \quad (20)$$

где  $f_i$  – расчетное значение исследуемой величины в ячейке с номером  $i$ ,  $\bar{f}_i$  – значение точного решения для исследуемой величины в ячейке с номером  $i$ .

### 2.1. Тестовая задача 1 (Задача Сода об ударной трубе)

В некоторой области, ограниченной отрезком  $[0, 1]$ , находится идеальный газ, в начальный момент времени ( $t = 0$ ) разделенный контактной границей на две подобласти. Начальные распределения параметров газа вдоль пространственной координаты  $x$  равны:

$$\begin{aligned} \rho_1 = 1; \quad \varepsilon_1 = 2,5; \quad U_1 = 0; \quad P_1 = 1; \quad 0 < x \leq 0,5; \\ \rho_0 = 0,125; \quad \varepsilon_0 = 2; \quad U_0 = 0; \quad P_0 = 0,1; \quad 0,5 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Значение показателя адиабаты газа  $\gamma = 1,4$ . На внешних границах области было поставлено граничное условие непроницаемой жесткой стенки:

$$\begin{aligned} U_{0,5} &= -U_1, \\ U_{N+0,5} &= -U_N. \end{aligned} \quad (21)$$

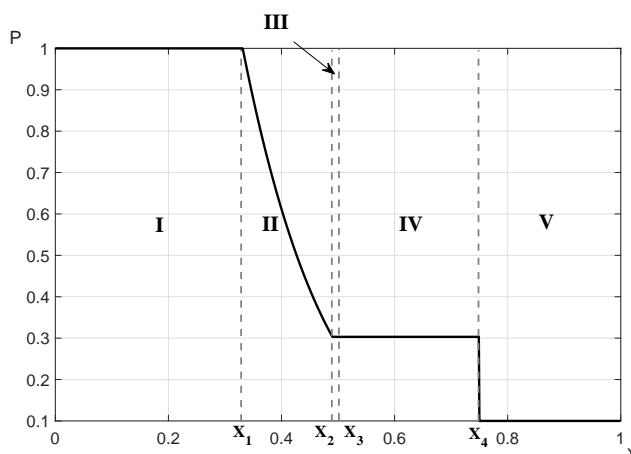


Рис. 1. Области течения в момент времени  $t = 0,15$

В решении задачи можно наблюдать распад разрыва. Возникающее при этом течение должно содержать пять подобластей (условно представленных на рис. 1):

- Область I:  $0 < x \leq X_1$  газ с начальными параметрами  $\rho_1, U_1, P_1$ .

- *Область II:*  $X_1 < x \leq X_2$  газ, находившийся по левую сторону контактной границы, охваченный волной разряжения, с параметрами  $\rho_2, U_2, P_2$ .
- *Область III:*  $X_2 < x \leq X_3$  газ, находившийся по левую сторону контактной границы, по которому прошла волна разряжения, с параметрами  $\rho_3, U_3, P_3$ .
- *Область IV:*  $X_3 < x \leq X_4$  газ, находившийся по правую сторону контактной границы, сжатый ударной волной, с параметрами  $\rho_4, U_4 = U_3, P_4 = P_3$ .
- *Область V:*  $X_4 < x \leq 1$  газ, находившийся по правую сторону контактной границы, с начальными параметрами  $\rho_0, U_0, P_0$ .

Здесь  $X_1$  – положение переднего фронта волны разряжения,  $X_2$  – положение заднего фронта волны разряжения,  $X_3$  – положение контактной границы,  $X_4$  – положение фронта ударной волны. Использовалось точное решение, представленное в [8].

**Таблица 1**

Относительные отклонения величин на момент времени  $t = 0,15$

№	Количество ячеек	Давление $P, \%$	Скорость $U, \%$	Плотность $\rho, \%$	Внутренняя энергия $E, \%$
1	50	5,5994	6,8419	5,1031	3,3065
2	100	3,7208	3,2669	3,6497	2,2516
3	200	2,1450	2,7161	2,3350	1,4080
4	500	0,9530	2,3886	1,2367	0,7670
5	1000	0,4874	0,9842	0,7599	0,4846
6	2000	0,2513	0,7693	0,4790	0,3143
7	5000	0,1155	0,2611	0,2743	0,1852

Расчеты проводились с использованием равномерных сеток, содержащих 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 ячеек. В табл. 1 приведены относительные отклонения значений, полученных с помощью разработанного метода, от точного решения. На рис. 2 представлено сопоставление графиков точного и полученного в результате расчетов решений на равномерной сетке, содержащей 1000 ячеек.

## 2.2. Тестовая задача 2 (распад произвольного разрыва)

В некоторой области, ограниченной отрезком  $[0, 1]$ , находится идеальный газ, в начальный момент времени ( $t = 0$ ) разделенный контактной границей на две подобласти. Начальные распределения параметров газа вдоль пространственной координаты равны:

$$\begin{aligned} \rho_1 = 3; \quad \varepsilon_1 = 10; \quad U_1 = 0; \quad P_1 = 10; \quad 0 < x \leq 0,5; \\ \rho_0 = 2; \quad \varepsilon_0 = 1,5; \quad U_0 = 0; \quad P_0 = 1; \quad 0,5 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Значение показателя адиабаты газа  $\gamma = 4/3$ . На внешних границах области было поставлено граничное условие непроницаемой жесткой стенки:

$$\begin{aligned} U_{0,5} &= -U_1, \\ U_{N+0,5} &= -U_N. \end{aligned} \tag{22}$$

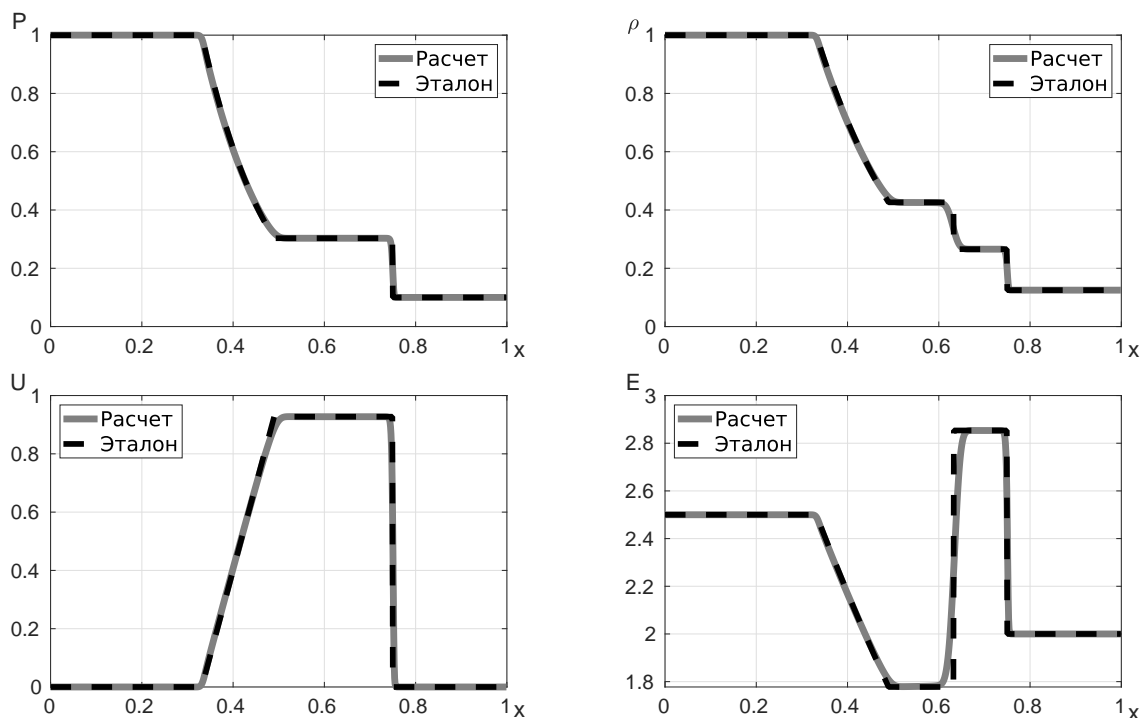


Рис. 2. Сопоставление результатов расчета и точного решения на момент времени  $t = 0,15$

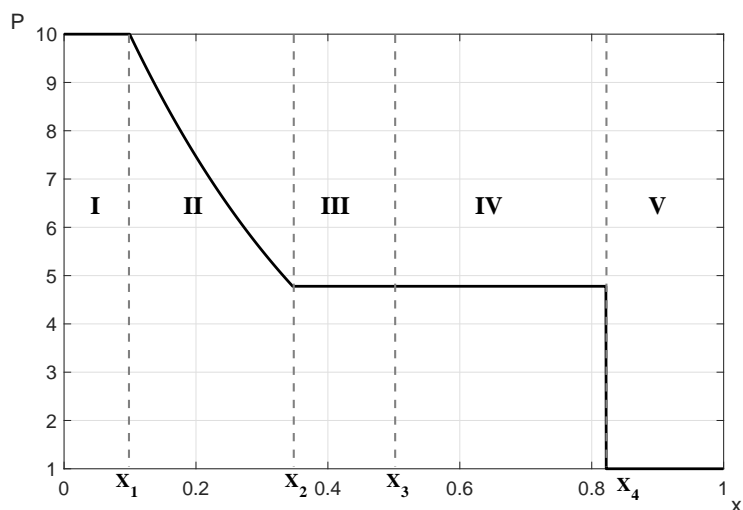


Рис. 3. Области течения в момент времени  $t = 0,2$

В решении задачи можно наблюдать распад разрыва. Возникающее при этом течение должно содержать пять подобластей (условно представленных на рис. 3):

- Область I:  $0 < x \leq X_1$  газ с начальными параметрами  $\rho_1, U_1, P_1$ .
- Область II:  $X_1 < x \leq X_2$  газ, находившийся по левую сторону контактной границы, охваченный волной разряжения, с параметрами  $\rho_2, U_2, P_2$ .

- *Область III:*  $X_2 < x \leq X_3$  газ, находившийся по левую сторону контактной границы, по которому прошла волна разряжения, с параметрами  $\rho_3, U_3, P_3$ .
- *Область IV:*  $X_3 < x \leq X_4$  газ, находившийся по правую сторону контактной границы, сжатый ударной волной, с параметрами  $\rho_4, U_4 = U_3, P_4 = P_3$ .
- *Область V:*  $X_4 < x \leq 1$  газ, находившийся по правую сторону контактной границы, с начальными параметрами  $\rho_0, U_0, P_0$ .

Здесь  $X_1$  – положение переднего фронта волны разряжения,  $X_2$  – положение заднего фронта волны разряжения,  $X_3$  – положение контактной границы,  $X_4$  – положение фронта ударной волны.

Использовалось точное решение, представленное в [9]. Расчеты проводились с использованием равномерных сеток, содержащих 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 ячеек. В табл. 2 приведены абсолютные отклонения значений, полученных с помощью разработанного метода, от точного решения. На рис. 4 представлено сопоставление графиков точного и полученного в результате расчетов решений на равномерной сетке, содержащей 1000 ячеек.

**Таблица 2**

Относительные отклонения величин на момент времени  $t = 0,2$

№	Количество ячеек	Давление $P, \%$	Скорость $U, \%$	Плотность $\rho, \%$	Внутренняя энергия $E, \%$
1	50	6,8322	68,7241	11,2033	6,4149
2	100	4,0358	20,3273	8,0290	4,6347
3	200	2,2643	5,1176	5,2194	3,1714
4	500	1,2523	1,5995	3,0530	1,9462
5	1000	0,6697	1,3956	2,0687	1,3206
6	2000	0,3439	1,3162	1,4052	0,9029
7	5000	0,1406	0,6227	0,8546	0,5525

### 2.3. Тестовая задача 3 (стационарная ударная волна)

В некоторой области, ограниченной отрезком  $[0, 1]$ , находится абсолютно холодный идеальный газ, начальные значения параметров которого равны:

$$\rho_0 = 1, \quad \varepsilon_0 = 0, \quad U_0 = 0, \quad P_0 = 0.$$

Через границу ( $x = 0$ ) в расчетную область втекает стационарный поток с параметрами:

$$\rho_1 = 7, \quad \varepsilon_1 = 9, \quad U_1 = 3, \quad P_1 = 10,5.$$

Значение показателя адиабаты газа  $\gamma = 4/3$ . На правой границе области ( $x = 1$ ) было поставлено граничное условие непроницаемой жесткой стенки:

$$U_{N+0,5} = -U_N. \tag{23}$$



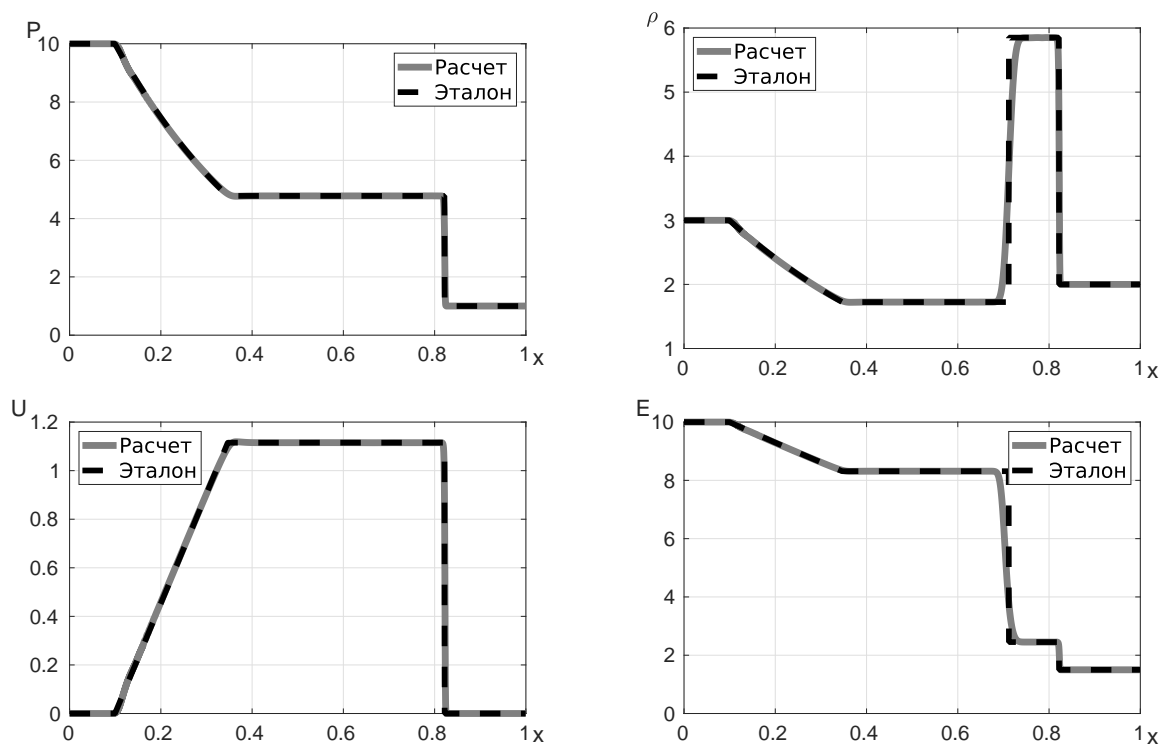


Рис. 4. Сопоставление результатов расчета и точного решения на момент времени  $t = 0,2$

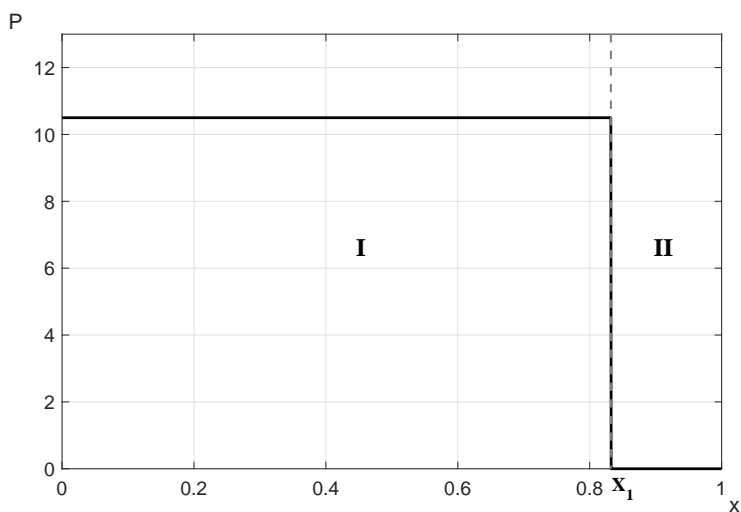


Рис. 5. Области течения в момент времени  $t = 0,1$

В решении задачи можно наблюдать распространение ударной волны. Возникающее при этом течение должно содержать две подобласти (условно представленные на рис. 2.3:

- *Область I:*  $0 < x \leq X_1$  газ, сжатый ударной волной, с параметрами  $\rho_2 = \rho_1$ ,  $U_2 = U_1$ ,  $P_2 = P_1$ .
- *Область II:*  $X_1 < x \leq 1$  газ с начальными параметрами  $\rho_0$ ,  $U_0$ ,  $P_0$ .

Здесь  $X_1$  – положение фронта ударной волны. В качестве эталонного решения были использованы полученные из соотношений Ренкина – Гюгонио координаты фронта ударной волны [2].

В табл. 3 приведены абсолютные отклонения значений, полученных с помощью разработанного метода, от точного решения. На рис. 6 и 7 представлено сопоставление графиков точного и полученного в результате расчетов решений на равномерной сетке, содержащей 1000 ячеек. Графическое представление результатов расчетов показывает, что численное решение хорошо совпадает с аналитическим, существенных осцилляций не наблюдается.

Таблица 3

Относительные отклонения величин на момент времени  $t = 0,1$

№	Количество ячеек	Давление $P$ , %	Скорость $U$ , %	Плотность $\rho$ , %	Внутренняя энергия $E$ , %
1	50	2,2214	0,6361	14,2755	0,6598
2	100	1,3647	0,4630	7,2993	0,5363
3	200	0,6589	0,2376	4,3760	0,3151
4	500	0,2920	0,1091	1,5348	0,1631
5	1000	0,1311	0,0482	0,9081	0,0756
6	2000	0,0578	0,0209	0,5554	0,0338
7	5000	0,0261	0,0096	0,1830	0,0151

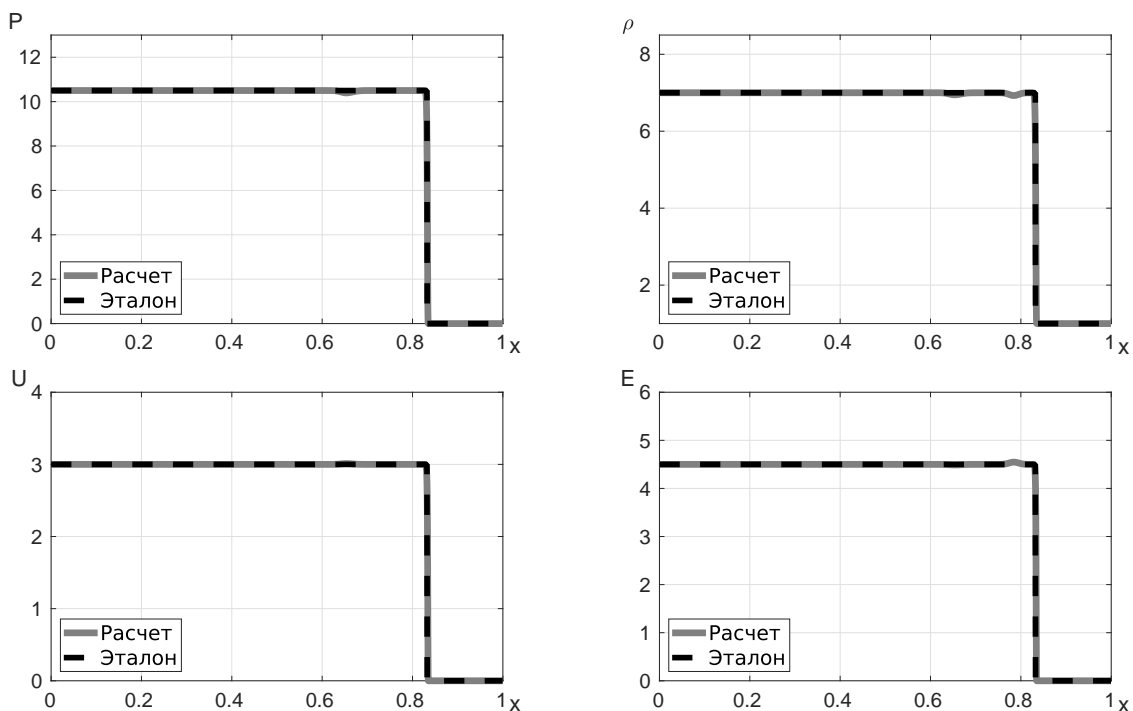


Рис. 6. Сопоставление результатов расчета и точного решения на момент времени  $t = 0,1$

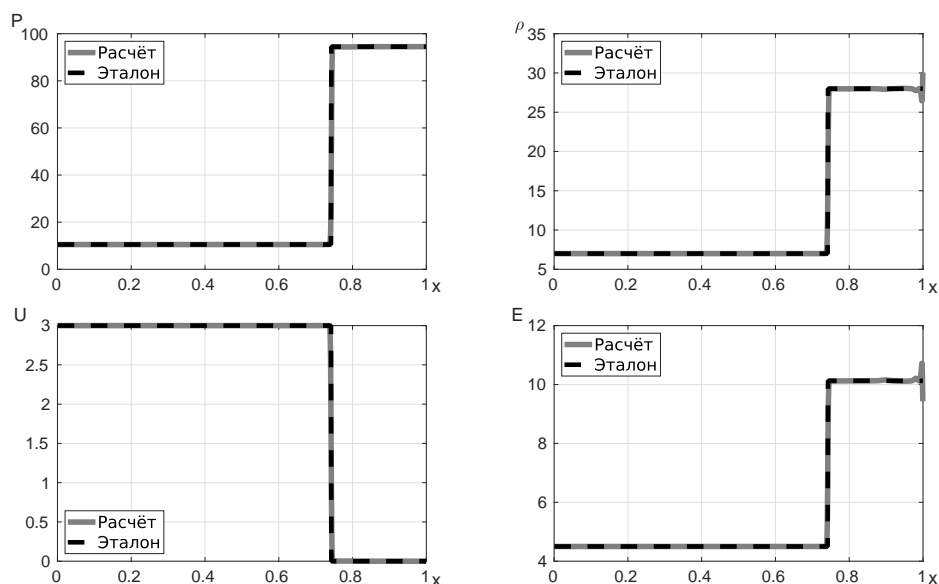


Рис. 7. Сопоставление результатов расчета и точного решения на момент времени  $t = 0,4$

## Заключение

В работе представлен метод моделирования сплошной среды в эйлеровых координатах, использующий метод Куропатенко для расчета ударных волн. Результаты тестирования показали высокую точность моделирования ударно-волновых течений даже в случае сильной ударной волны. Разработанный метод, в силу простоты реализации и точности представляется подходящим для использования в многомерных алгоритмах для моделирования интенсивных течений в областях со сложной геометрией, а также для моделирования многокомпонентных и многофазных сред. Разработку таких алгоритмов и их тестирование в двух- и трехмерных постановках предполагается произвести в ходе дальнейшей работы, результаты которой будут представлены в следующих публикациях.

## Литература

1. Зельдович, Я.Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. – М.: Физматлит, 2008.
2. Куропатенко, В.Ф. Основы численных методов механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2017.
3. Куропатенко, В.Ф. Метод расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко // Доклады академии наук СССР. – 1960. – Т. 3, № 4. – С. 771–772.
4. Куропатенко, В.Ф. Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики / В.Ф. Куропатенко // Известия ВУЗов. Математика. – 1962. – № 3(28). – С. 75–83.
5. Kuropatenko, V.F. Computational Technique for Shock Waves with Elevated Monotonocity / V.F. Kuropatenko, I.R. Makeeva // Finite-Difference Methods: Theory and Application. – Minsk: National Academy of Sciences of Belarus, 1998. – P. 80–85.
6. Куропатенко, В.Ф. Исследование влияния пульсирующего вдува на поток возле обтекаемого тела / В.Ф. Куропатенко, И.И. Кузнецова, И.Р. Макеева, А.С. Мурашко, В.Н. Уваров // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2002. – № 3. – С. 60–71.

7. Moukalled, F. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab / F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwis. – Springer, 2015.
8. Sod, G.A. Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws / G.A. Sod // Journal of Computational Physics. – 1978. – V. 27. – P. 1–31.
9. Зализняк, В.Е. Основы вычислительной физики. Ч. 1. Введение в конечно-разностные методы / В.Е. Зализняк. – М.: Техносфера, 2008.

Павел Евгеньевич Беляев, младший научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Российская Федерация), belyaevpe@vniitf.ru.

Инга Равильевна Макеева, кандидат физико-математических наук, начальник лаборатории, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Российская Федерация); доцент, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), i.r.makeyeva@vniitf.ru.

Егор Евгеньевич Пигасов, младший научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Российская Федерация); старший преподаватель, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), pigasovee@vniitf.ru.

Дмитрий Александрович Мастюк, младший научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Российская Федерация), mastyukdmitrij@gmail.com.

*Поступила в редакцию 1 марта 2020 г.*

---

MSC 65C20, 76L05

DOI: 10.14529/mmp210107

## ADAPTATION OF KUROPATENKO METHOD FOR CALCULATING SHOCK WAVES IN EULER COORDINATES

*P.E. Belyaev<sup>1</sup>, I.R. Mekeeva<sup>1,2</sup>, E.E. Pigasov<sup>1,2</sup>, D.A. Mastyuk<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Federal State Unitary Enterprise “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All–Russia Research Institute of technical Physics”, Snezhinsk, Russian Federation

<sup>2</sup>South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mails: belyaevpe@vniitf.ru, i.r.makeyeva@vniitf.ru, pigasovee@vniitf.ru, mastyukdmitrij@gmail.com

For the moment, there is no implementation of the well-proven numerical method of Kuropatenko in Eulerian coordinates. Such implementation has a promising capabilities for

solving a certain scope of problems. This paper is devoted to adaptation of Kuropatenko method for calculating shock waves using Euler coordinates. The application area of the original method is limited and does not include the simulation of multicomponent and multiphase flows of reacting mixtures in two- and three-dimensional spaces. The result obtained demonstrate the efficiency of the developed modification and show the advantages of the extension of this method into multidimensional algorithms.

*Keywords:* shock wave; Kuropatenko method; numerical methods; conservation laws.

## References

1. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Fizika udarnikh voln i visokotemperaturnikh gidrodinamicheskikh yavleniy* [Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena]. Moscow, Fizmatlit, 2008. (in Russian)
2. Kuropatenko V.F. *Osnovi chislennikh metodov mekhaniki sploshnykh sred* [Essentials of Numerical Methods in Continuum Mechanics]. Chelyabinsk, South Ural State University Publishing Centre, 2017. (in Russian)
3. Kuropatenko V.F. [Shockwave Calculation Method]. *Academy of Sciences of USSR Reports*, 1960, vol. 3, no. 4, pp. 771–772. (in Russian)
4. Kuropatenko V.F. [A Method for Constructing Difference Schemes for the Numerical Integration of the Equations of Gas Dynamics]. *Russian Mathematics*, 1962. no. 3 (28), pp. 75–83. (in Russian)
5. Kuropatenko V.F., Makeeva I.R. Calculational Technique for Shock Waves with Elevated Monotonicity. *Finite-Difference Methods: Theory and Application*. Minsk, National Academy of Sciences of Belarus, 1998, pp. 80–85.
6. Kuropatenko V.F., Kuznetsova I.I., Makeeva I.R., Murashko A.S., Uvarov V.N. [Study of the Influence of Pulsating Injection on the Flow Near the Streamlined Body]. *Atomic Science and Technology Issues. Series: Mathematical Modelling of Physical Processes*, 2002. no. 3. pp. 60–71. (in Russian)
7. Moukalled F., Mangani L., Darwis M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*. Springer, 2015. DOI: 10.1007/978-3-317-16874-6
8. Sod G.A. Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 1978, vol. 27, pp. 1–31. DOI: 10.1016/0021-9991(78)90023-2
9. Zaliznyak V. *Osnovi vychislitelnoy fiziki. Chast 1. Vvedenie v Konechno-raznostnie Metody* [Essentials of Computational Physics. Part 1. Introduction into Finite-Difference Methods]. Moscow, Technosphaera, 2008. (in Russian)

*Received March 1, 2020*