УДК 519.115 **DOI: 10.14529/mmp210310**

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ДВОЙНОЙ ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЕМ

Н.Ю. Энатская, Высшая школа экономики, г. Москва, Российская Федерация

В классе схем деления частиц на части заданных размеров для рассматриваемой схемы с различимыми частицами и учетом порядка частей деления (схема A) строится вероятностная модель полного нумерованного перечисления ее исходов, на основе которой проводится ее исследование по следующим направлениям перечислительной комбинаторики: нахождения их числа, установления взаимно-однозначного соответствия между номерами и видами ее исходов, называемое задачей нумерации в прямой и обратной постановках, определения вероятностей на множестве ее исходов и предложения алгоритма их моделирования. Схемы данного класса различаются по качеству составляющих их элементов (частиц и частей деления) по их различимости. Схема A в этом классе имеет исходы с наибольшей дифференциацией, что дает возможность получения исходов остальных схем этого класса алгоритмическими процедурами, приводящими к определенным группированиям ее исходов. Для организации возможности пересчета из результатов анализа схемы A соответствующих результатов других схем этого класса, требующего отдельного рассмотрения в каждой схеме, модель схемы A строится с разделенными на этапы перечислениями, отдельно учитывающими различимости между собой частей деления и частиц. Целью статьи является анализ схемы A в виде получения аналитических соотношений и построения процедур и алгоритмов по указанным направлениям перечислительной комбинаторики и подготовки его результатов и проведения соответствующего пересчета для схем данного класса.

Ключевые слова: схема перестановки с повторением; схема двойной перестановки с повторением.

Введение

Задача разбиения совокупности рассмотрена в монографии Г. Эндрюса [1], где, в основном, идет речь о разбиении натурального числа на натуральные слагаемые, и в книге Т. Мансура [2] с ретроспективой методов разбиения множеств и также в [3] и статье [4].

Предлагается проведение анализа схемы A – деления различимых частиц на части заданных размеров с учетом порядка частей деления с подготовкой к пересчету его результатов для других схем этого класса с отличием в качестве по различимости составляющих их элементов (частиц и частей деления) построением итерационного случайного процесса их перечисления последовательной реализацией его этапов.

В наглядной интерпретации размещений частиц по ячейкам, где схема A описывает размещение различимых частиц по различимым ячейкам с заданными уровнями их заполнения во всех возможных порядках, определим схемы признаками:
A_1 – различимые частицы и различимые ячейки с заданным порядком уровней их заполнения – это схема перестановок с повторением;
схема B – неразличимые частицы и различимые ячейки;
схема C – различимые частицы и неразличимые ячейки;
схема D – неразличимые частицы и неразличимые ячейки.

Иллюстрацию схемы A представляет приведенный в [5] пример: в лифт 11-этажного дома входят 7 человек. Вероятность того, что они выйдут на этажах группами по 2, 2, 3 человека при равновероятном независимом выхода каждого на любом из 10 этажей, есть

$$P(2,2,3) = \left(\frac{7!}{2!2!3!}\right)\left(\frac{10!}{1!2!7!}\right)/10^7,$$

где оба заключенные в круглые скобки сомножителя числителя вычисляются по схеме перестановки с повторением: первый – дает число делений 7 пассажиров лифта на группы заданных размеров, второй – деления десяти этажей на этажи с совпадающими размерами групп выходящих на них пассажиров, а в знаменателе стоит число всех возможных вариантов выходов пассажиров из лифта. Здесь схема перестановка с повторением применяется последовательно дважды, что соответствует названию итоговой изучаемой схемы А.

1. Вспомогательные результаты

Перечислим ранее изученные схемы, результаты комбинаторного анализа которых будут здесь использованы в части чисел их исходов, их перечисления, решения задачи нумерации (ЗН) и моделирования исходов – это схемы сочетаний, последовательных действий (ПД) и перестановок с повторением. Все они приведены в обзоре [6].

2. Анализ схемы А

Параметры схемы А, вид исхода, процедура перечисления и численность исходов. Совокупность n различимых элементов делят на k групп заданных размеров $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ во всех возможных различимых порядках.

В наглядной интерпретации размещения частиц по ячейкам схема A соответствует размещению n различимых частиц по k различимым ячейкам при заданном наборе $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ уровней заполнения ячеек во всех возможных различимых порядках. Вид исхода схемы A определяется определенным порядком заданных уровней заполнения ячеек в порядке нумерации ячеек.

Теорема 1. *Число исходов схемы A определяется по формуле*

$$N_A = \left(\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}\right)\left(\frac{k!}{\mu_1! \ldots \mu_s!}\right), \tag{1}$$

где $s = max(n_1, \ldots, n_k)$, $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ – маркировка по уровням заполнения ячеек, (μ_j – число ячеек с заданным набором уровней их заполнения $j = \overline{1,s}$).

Доказательство. Число различимых исходов схемы определяется всеми возможными различимыми по составам частиц в ячейках размещениями с заданными уровнями их заполнения во всех различимых порядках, соответствующих различимости содержащих их ячеек. Количества переборов исходов схемы вычисляются числами исходов последовательных схем перестановок с повторением – для первого перебора, учитывающего различимость частиц в составах ячеек в одном порядке их заданных уровней заполнения, а для второго перебора – все возможные порядки этих составов, учитывающего различимость ячеек с этими составами частиц, откуда и следует формула (1). □

Схема A представляет собой схему ПД двух схем перестановок с повторением с известными числами исходов, которые в графе перечисления исходов схемы A соответствено служат размерами пучков двух этих действий в любом порядке, например, на первой итерации имеем пучок размером

$$d_1 = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}, \tag{2}$$

а на второй – имеем число пучков, равное размеру пучка первой итерации, каждый размером

$$d_2 = \frac{k!}{\mu_1! \dots \mu_s!}. \tag{3}$$

Поэтому перечисление исходов схемы A будет происходить по описанному здесь графу.

Задача нумерации (ЗН). Теперь решение ЗН в прямой и обратной постановках будем получать по соответствующим теоремам для схемы ПД при известной по заданных параметрах схемы A вычисляемой по формулам (2) и (3) пучковой структуре графа перечисления ее исходов при $k = 2$, подставляя в качестве d_1 и d_2 значения размеров пучков из (2) и (3).

Вероятностное распределение исходов схемы. Вероятностное распределение исходов схемы при равновероятности исходов составляющих ее схем перестановок с повторением является тоже равновероятным с вероятностью каждого исхода $1/N_A$. Тогда вероятность исходов схемы перестановки с повторением среди исходов схемы A равна $1/d_2$.

При других, отличных от равновероятных распределений исходов схем перестановок с повторением, управляемых случайными процессами перечисления их исходов, составляющих схему A (как последовательные итерации), итоговые вероятности ее исходов вычисляются произведением этих заданных вероятностей итерационных переходов (т. е. по траекториям) в графе перечисления исходов схемы A к каждому из них.

Моделирование исходов схемы. Производим его путем разыгрывания случайным числом его номера с его вероятностным распределением и последующим нахождением соответствующего ему смоделированного вида из результата решения прямой ЗН.

3. Пересчет результатов анализа схемы A в других схемах

О пересчете видов исходов схемы A в других схемах. Исходы остальных рассматриваемых здесь схем данного класса представляют собой определенным способом сгруппированные исходы основной схемы A в зависимости от их специфики. Переборы их видов пересчитываются на основании двух способов обработки исходов схемы A: 1) маркировки по уровням заполнения ячеек с отбраковкой повторов и 2) заранее определенного упорядочения перечисления составов ячеек с отбраковкой повторов, а именно:
для исходов схемы A_1 – упорядочением составов ячеек в заданном в схеме A_1 порядке с отбраковкой повторов;

для исходов схемы B – маркировкой по уровням заполнения в порядке ячеек с отбраковкой повторов;
для исходов схемы C – упорядочением составов ячеек в заранее заданном порядке (например, в порядке роста минимальных номеров частиц в них) с отбраковкой повторов;
для исходов схемы D – маркировкой по уровням заполнения в заранее заданном порядке (например, в порядке роста уровней) с отбраковкой повторов.

О пересчете чисел исходов схемы A в других схемах. Покажем, как при данной в п. 2 интерпретации представления (1) числа N_A могут быть получены формулы для чисел N_{A_1}, N_B, N_C, N_D исходов остальных схем, в котором каждый из сомножителей (a) и (b) является числом исходов схемы перестановок с повторением, где (a) учитывает различимость частиц при их размещении по различимым ячейкам с заданными уровнями заполнения в заданном порядке, а (b) – различимость ячеек при различимости и неразличимости частиц, или число всех порядков заданных уровней заполнения ячеек относительно ячеек. Поэтому для определения числа исходов схем данного класса при неразличимости частиц в различимых ячейках сомножитель (a), а при неразличимости ячеек с неразличимыми частицами– сомножитель (b) приравниваются к единице. В случае же размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам сомножитель (a) завышает его соответствующее схеме значение за счет разных порядков ячеек с совпадающими в них составами частиц, не приводящими к новым исходам в ней, и должен быть уменьшен в $(\mu_1!\mu_2!\dots\mu_s!)$ раз.

Из приведенных интерпретаций частей представления (1) для N_A получим явные формулы для чисел исходов остальных рассматриваемых схем:

$$N_{A_1} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$$

– известная формула для числа исходов схемы перестановок с повторением, соответствующая виду (1), где сомножитель (b) равен 1, т.к. порядок уровней заполнения ячеек фиксирован и дает число различимых размещений n различимых частиц по k различимым ячейкам с заданными уровнями заполнений ячеек в их заданном порядке.

Теорема 2. *Число исходов схемы B определяется по формуле*

$$N_B = \frac{k!}{\mu_1!\cdots\mu_s!}.$$

Доказательство. Число N_B различимых исходов схемы определяется по формуле (1) при неразличимости частиц, когда первый сомножитель в ней равен единице. □

Теорема 3. *Число исходов схемы C определяется по формуле*

$$N_C = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!\mu_1!\cdots\mu_s!}.$$

Доказательство. Число N_{A_1} превышает значение N_C (в условиях неразличимости ячеек в схеме) в $\prod_{j=1}^{s}\mu_j!$ раз за счет несущественности разных взаимных порядков в схеме C групп заданных совпадающих уровней заполнения ячеек (в соответствии с неразличимостью ячеек в схеме) в количествах $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ – результатов маркировки заданных уровней заполнения ячеек, поэтому $N_C = N_{A_1}/\prod_{j=1}^{s}\mu_j!$, откуда и следует утверждение теоремы. □

Теорема 4. *Число исходов схемы D определяется по формуле $N_D = 1$.*

Доказательство. следует из учета в формуле (1) неразличимости и ячеек и частиц, т. е. исход схемы определяется только маркировкой уровней заполнения ячеек в заранее заданном порядке, например, в порядке роста заданных уровней заполнения и имеет единственное представление. □

Пример 1. Расчет чисел исходов в схемах при $n = 4,\ k = 3,\ \bar{n} = (1,1,2), \mu_1 = 2,\ \mu_2 = 1$:

$$N_A = \frac{4!}{1!1!2!}\frac{3!}{2!1!} = 36,$$

где виды исходов – составы ячеек в порядке ячеек; к тому же ответу приводит перечисление исходов при выборе $C_4^2 = 6$ способами пар частиц в одной ячейке ((1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)) с последующей перестановкой составов ячеек 3!=6 способами;

$$N_{A_1} = \frac{4!}{1!1!2!} = 12,$$

где виды исходов – составы ячеек в любом порядке их уровней заполнения; к тому же ответу приводит перечисление исходов при выборе $C_4^2 = 6$ способами пар частиц в одной ячейке ((1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)) с последующей перестановкой составов по одной частице в первых двух ячейках 2!=2 способами;

$$N_B = \frac{3!}{2!1!} = 3,$$

это исходы (2,1,1),(1,2,1),(1,1,2), где виды исходов – заданные уровни заполнения ячеек во всех порядках;

$$N_C = \frac{4!}{1!1!2!2!1!} = 6,$$

где виды исходов – составы ячеек в одном заранее указанном порядке, например, в порядке роста уровней их заполнения и в лексико-графическом порядке – составы ячеек с совпадающими уровнями заполнения; к тому же ответу приводит перечисление исходов при выборе $C_4^2 = 6$ способами пар частиц в одной ячейке ((1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)) с предшествующими составами по одной частицы в одном указанном порядке;
$N_D = 1$, это исход (2,1), означающий перечень чисел ячеек с растущими уровнями заполнения 1 и 2.

О пересчете результатов из ЗН схемы A для исходов в других схемах. Исходы в других схемах данного класса представляют собой определенные сгруппированные исходы схемы A. Для пересчета результатов решения ЗН в схеме

A к исследуемой S^* введем общие обозначения для указанных случаев взаимнооднозначно попарно соответствующих в схемах A и S^* для N_A^* и $N_{S^*}^*$ – номеров их исходов и R_A^* и $R_{S^*}^*$ – их видов в этих схемах. Тогда пересчет результатов решения ЗН схемы A для схемы S^* реализуется двумя следующими алгоритмами в прямой ЗН (ПЗН – по данному $N_{S^*}^*$ найти $R_{S^*}^*$) и обратной ЗН (ОЗН – по данному $R_{S^*}^*$ найти $N_{S^*}^*$).

Алгоритм решения ПЗН

Шаги:

1) приводим исходы схемы A к виду исходов схемы S^* (с повторами за счет уменьшения различий в них) – получаем исходы в том же количестве в порядке исходов схемы A;

2) в порядке исходов схемы A в виде результата шага 1) считаем число N_A^* сравнений каждого со всеми предыдущими в результате шага 1) до получения $N_{S^*}^*$-ого нового включительно;

3) по номеру N_A^* из шага 2) по результату решения ПЗН в схеме A находим его вид R_A^*, совпадающий с искомым $R_{S^*}^*$ в схеме S^*.

Алгоритм решения ОЗН

Шаги:

1) приводим исходы схемы к виду исходов схемы S^* (с повторами за счет уменьшения различий в них) – получаем исходы в том же количестве в порядке исходов схемы A;

2) в результате шага 1) находим номер N_A^* первого совпавшего исхода с данным вида $R_{S^*}^*$;

3) в порядке исходов схемы A в виде результата шага 1) маркируем их по совпадениям исходов от 1 до N_A^*, считая число маркировок, которое и дает искомый номер $N_{S^*}^*$.

О пересчете вероятностей исходов схемы A для исходов в других схемах. Бесповторность перечисления исходов схем перестановок с повторением приводит к получению вероятности каждого исхода остальных схем класса из распределения исходов схемы A суммированием вероятностей соответствующей группы ее исходов.

О моделировании исхода в других схемах. По смоделированному исходу схемы A для моделирования исхода каждой из остальных схем применяем к нему соответствующую процедуру приведения его к виду исхода изучаемой схемы, данную выше.

Другой способ состоит в моделировании каждого исхода изучаемой схемы по результату решения ПЗН путем разыгрывания его номера с полученным распределением из схемы A одним случайным числом.

Литература

1. Эндрюс, Г. Теория разбиений / Г. Эндрюс. – М.: Наука 1982.

2. Mansur, T. Combinatorics of Set Partitions / T. Mansur. – Boca Raton; London; New York: CRC Press, 2012.

3. Сачков, В.Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе / В.Н. Сачков. – М.: Наука, 1978.

4. Энатская, Н.Ю. Комбинаторное представление схемы размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам / Н.Ю. Энатская // Дискретная математика. – 2017. – Т. 29, № 1. – С. 120–135.

5. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / В. Феллер. – М.: Мир, 1967.

6. Энатская, Н.Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров / Н.Ю. Энатская // Труды Карельского научного центра РАН. – 2018. – № 7. – С. 117–133.

Наталия Юрьевна Энатская, кандидат физико-математических наук, доцент, департамент «Прикладная математика», Национальный исследовательский университет, Высшая школа экономики, МИЭМ (г. Москва, Российская Федерация), nat1943@mail.ru.

Поступила в редакцию 6 марта 2021 г.

MSC 60F15 **DOI: 10.14529/mmp210310**

COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE SCHEME OF DUAL REPEATED TRANSFERS

N.Yu. Enatskaya, Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation, nat1943@mail.ru

In the class of schemes for dividing particles into parts of given sizes, for the considered scheme with distinguishable particles and taking into account the order of the division parts (scheme A), a probabilistic model is constructed for a complete numbered listing of its outcomes, based on which it is studied in the following directions of enumerative combinatorics: finding their number, establishing an one-to-one correspondence between the numbers and types of its outcomes called the numbering problem in direct and inverse statements, finding probabilities on the set of its outcomes and proposing an algorithm for their modelling. Schemes of this class differ in the quality of their constituent elements (particles and dividing parts) in terms of their distinguishability. The scheme A in this class has outcomes with the greatest differentiation, which makes it possible to obtain the outcomes of remaining schemes of this class by algorithmic procedures that lead to a certain groupings of its outcomes. To organize the possibility of recalculating from the results of the analysis of the scheme A the corresponding results of other schemes of this class that requires separate consideration in each scheme, the model of the scheme A is constructed with enumerations divided into stages, which separately take into account the distinguishability between the dividing parts and particles. The purpose of the article is to analyze the scheme A in the form of obtaining analytical relations and constructing procedures and algorithms in the indicated directions of enumerative combinatorics and preparing its results and carrying out the corresponding recalculation for schemes of this class.

Keywords: repetition permutation scheme; repetition double permutation scheme.

References

1. Endrus G.E. *The Theory of Partitions*, Cambridge, Cambridge University Press, 1984. DOI: 10.1017/CBO9780511608650
2. Mansur T. *Combinatorics of Set Partitions*, Boca Raton, London, New York, CRC Press, 2012.
3. Sachkov V.N. *Veroyatnostnyye metody v kombinatornom analize* [Probabilistic Methods in Combinatorial Analysis], Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)
4. Enatskaya N.Yu. Combinatorial Representation of the Scheme of Allocation of Distinguishable Particles in Indistinguishable Cells. *Discrete Mathematics*, 2017, vol. 29, no. 1, pp. 120–135. (in Russian)
5. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1*, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley and Sons, 1970.
6. Enatskaya N.Yu. Analysis Combinatorial Schemes in the Pre-Asymptotic Region of Parameter Change. *Proceedings of the Kola Science Center of the Russian Academy of Science*, 2018, no. 7, p. 117–133. (in Russian)

Received March 6, 2021