

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ NVIDIA

В.Ф. Масыгин¹, Р.В. Жалнин¹, В.Ф. Тушкин²

¹Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, Российская Федерация

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

В работе предложена неявная схема разрывного метода Галеркина для решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. Неявная схема основана на представлении системы сеточных уравнений в «дельта-форме». Для решения полученной в ходе аппроксимации исходных уравнений СЛАУ применяются решатели из библиотеки NVIDIA AmgX. Для верификации численного алгоритма был произведен расчет течения невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином и решена задача об обтекании симметричного профиля НАСА0012. Проведено сравнение полученных результатов с результатами эксперимента и известными численными решениями представленных задач. Сделан вывод о хорошем совпадении численных и экспериментальных данных.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики; метод Галеркина с разрывными базисными функциями; неявная схема; NVIDIA AmgX.

Введение

При численном решении многих задач газовой динамики и гидродинамики, необходимо учитывать процессы теплопроводности и диффузионные процессы. Как правило, данные задачи рассматриваются в областях сложной геометрической формы и их решение требуется находить с высоким порядком точности. Для того, чтобы при математическом моделировании учесть сложную структуру рассматриваемой области и как можно ближе приблизиться к ней, необходимо использовать неструктурированные сетки. Таким образом, для решения таких задач нужен численный метод, который бы обладал высоким порядком точности и при этом был хорошо адаптирован к неструктурированным сеткам. Одним из таких методов является широко известный метод Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ) [1–5]. Данный метод обладает целым рядом конкурентных преимуществ: характеризуется высоким порядком точности получаемого решения, слабо зависит от вида используемой расчетной сетки, что позволяет работать с неструктурированными сетками и при этом обладает компактным вычислительным шаблоном. Последнее означает, что для повышения порядка точности на каждом шаге вычислений данному методу требуются значения из текущей ячейки сетки и ее соседей по ребру. При всех перечисленных достоинствах РМГ требует существенных вычислительных затрат, что, при использовании явных схем, приводит к значительным временам расчета. Одним из перспективных направлений исследований является разработка эффективных неявных алгоритмов для РМГ на неструктурированных сетках. Несмотря на явные преимущества, предъявляет значительные требования к эффективному хранению СЛАУ в памяти и организации параллельных вычислений.

Данная работа посвящена разработке неявной схемы РМГ для решения уравнений газовой динамики на неструктурированных треугольных сетках. Численный алгоритм решения при таком подходе сводится к решению одной СЛАУ на каждом шаге по времени. Для параллельного исполнения этой операции на сегодняшний день разработано много эффективных решений для различных архитектур параллельного программирования. Но при этом стоит отметить, что неявная схема при всех ее достоинствах, имеет значительную сложность в реализации. Это связано с тем, что неявная схема требует существенно более сложного численного алгоритма, эффективного подхода при работе с памятью и особого внимания к матричным структурам, возникающим при выполнении расчетов.

На сегодняшний день в России и за рубежом активно ведется работа по созданию эффективных неявных схем РМГ [6–9]. Разработкой неявной схемы для РМГ применительно к решению уравнений Эйлера и Навье–Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках с использованием р-многосетевого метода рассмотрено в работе Волкова А.В. [10]. Серия работ посвящена построению явно-неявных схем РМГ для решения уравнений конвекции-диффузии [11–13].

В настоящий момент все более популярными становятся параллельные вычисления на устройствах GPU. Несмотря на то, что перенос алгоритмов на архитектуру графических процессоров, существенно отличающуюся от архитектуры центральных процессоров, представляет собой достаточно сложную задачу, GPU все чаще используются в вычислительной механике, задачах газовой динамики и в вычислительной математике в целом [14]. Благодаря своей архитектуре, основанной на большом числе вычислительных ядер, и новому подходу к организации вычислений, применение GPU в вычислениях является очень востребованным. Организация таких вычислений требует мощной, гибкой и при этом простой по своей логике технологии, которая бы дала возможность использовать все возможности GPU в уже существующих алгоритмах.

В представленной работе для решения СЛАУ используется библиотека NVIDIA AmgX, написанная на языке CUDA C. К достоинствам библиотеки следует отнести поддержку параллелизма как на уровне нескольких графических процессоров, так и на уровне нескольких вычислительных кластеров, что обеспечивается посредством поддержки технологии MPI. Также библиотека AmgX предоставляет гибкую систему конфигурации, и благодаря этому появляется возможность создавать иерархию решающих алгоритмов с произвольной глубиной, в которой внешний решающий алгоритм будет использовать внутренние в качестве предобработчиков и предобуславливателей, которые сами могут быть обработаны другими методами. Такой подход позволяет пользователю быстро экспериментировать с различными схемами [15]. В настоящий момент библиотека находит все более широкое применение в современном промышленном и научном численном анализе. В частности, AmgX является составной частью коммерческого вычислительного программного обеспечения ANSYS Fluent [16]. Показателем актуальности и эффективности используемой библиотеки является и тот факт, что на данный момент она используется в качестве стандарта для сравнения эффективности и скорости работы новых численных алгоритмов для решения СЛАУ, наряду с такими мощными средствами как библиотека HYPRE [16].

Ранее авторы в работах [17, 18] разработали численную методику для неявной схемы метода Галеркина с разрывными базисными функциями применительно к ре-

шению задач газовой динамики. В приведенных работах рассматривалась математическая модель без учета эффектов вязкости. Неявная схема записывалась в так называемой «дельта-форме», когда рассматриваются не сами искомые функции, а их приращения на каждом шаге по времени. Для решения итоговой СЛАУ применялись решатели из библиотеки HYPRE.

Данная работа продолжает ранние работы и расширяет их, рассматривая модель, учитывающую влияние эффектов вязкости. Для решения полученной на каждом шаге по времени СЛАУ применяются решатели из библиотеки NVIDIA AmgX.

1. Математическая модель и вычислительный алгоритм

Рассмотрим двумерную систему уравнений Навье – Стокса, представленную в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((\rho E + p)v)}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{xx}u + \tau_{xy}v)}{\partial x} - \frac{\partial(\tau_{yx}u + \tau_{yy}v)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где $E = e + \frac{u^2+v^2}{2}$ – удельная полная энергия, e – удельная внутренняя энергия, ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{v} = (u_x, u_y) = (u, v)$ – вектор скорости, τ_{ij} ($i, j = x, y$) – компоненты тензора вязких напряжений.

Система замыкается уравнением состояния $p = \rho \varepsilon (\gamma - 1)$, где γ – показатель адиабаты, и дополняется начальными и граничными условиями, соответствующими постановке конкретной задачи.

Тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{ij}\}$ определяется формулами

$$\tau_{ij} = \mu \left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla_k u_k \right), \quad i, j = x, y,$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, δ_{ij} – символ Кронекера.

Для удобства дальнейших рассуждений введем следующие обозначения

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}), \quad \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)}),$$

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} H_1^{(1)} \\ H_2^{(1)} \\ H_3^{(1)} \\ H_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} H_1^{(2)} \\ H_2^{(2)} \\ H_3^{(2)} \\ H_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3}\mu u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2}{3}\mu v \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\mu v) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu u) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2}{3}\mu u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4}{3}\mu v \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(2)}), \quad \mathbf{Q}^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} \frac{4}{3}u \\ v \\ \frac{2}{3}u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}v \\ u \\ \frac{4}{3}v \end{pmatrix}.$$

Дискретизация по пространству вязкого члена уравнений Навье – Стокса в методе Галеркина с разрывными базисными функциями [19] строится с помощью обращения к смешанной конечно-элементной формулировке. Производные первого порядка от консервативных переменных приводят к производным второго порядка, когда мы преобразуем дивергенцию вязких потоков. Однако производные второго порядка не могут быть согласованы напрямую в слабой вариационной формулировке, используя пространство разрывных функций. Следовательно, мы рассматриваем $\nabla \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{W}(\mathbf{U})$ как вспомогательные неизвестные уравнений Навье – Стокса [20], которые переформулируются в следующую сопряженную систему для неизвестных \mathbf{W} , \mathbf{U} и \mathbf{Q} :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{H}(\mathbf{U}, \mathbf{W})) = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{W} = \nabla \cdot \mathbf{Q}. \tag{6}$$

Для аппроксимации уравнений область $\Omega \in \mathbb{R}^2$, на которой ищется решение, покроем сеткой $\Omega_h = \{K_j | j = 1, \dots, N_h\}$, состоящей из треугольных элементов таких, что $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_h} K_j$, $\dim(K_i \cap K_j) < 2$, $i, j = 1, \dots, N_h$, $i \neq j$.

Введем пространство кусочно-полиномиальных функций

$$V_h^K = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{K_j} \in P_K(K_j), j = 1, \dots, N_h\},$$

где $P_K(K_j)$ – пространство полиномов степени не выше чем K на элементе K_j .

Зададим в V_h^K базис $\varphi_{jk}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x-x_{cj}}{\Delta x_j}\right)^{\alpha_k} \left(\frac{y-y_{cj}}{\Delta y_j}\right)^{\beta_k}, & \text{если } (x, y) \in K_j, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$

где $\alpha_k + \beta_k \leq K$, $k = 1, \dots, N_\phi$, $N_\phi = (K + 1)(K + 2)/2$, (x_{cj}, y_{cj}) – координаты центра масс ячейки, а $\Delta x_j, \Delta y_j$ – характерные размеры ячейки.

Дискретный аналог системы (5), (6) получаем, полагая, что внутри каждого элемента K_i сетки приближенное решение \mathbf{U}_{ih} , \mathbf{Q}_{ih} и \mathbf{W}_{ih} представляется в виде:

$$\mathbf{U}_{ih}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_\phi} \mathbf{U}_{ik}(t) \varphi_{ik}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{Q}_{ih}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_\phi} \mathbf{Q}_{ik}(t) \varphi_{ik}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{W}_{ih}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_\phi} \mathbf{W}_{ik}(t) \varphi_{ik}(\mathbf{x}).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{K_i} \sum_{k=1}^{N_\phi} \frac{d\mathbf{U}_{ik}}{dt} \varphi_{ik} \varphi_{il} dS + \oint_{\partial K_i} (\hat{\mathbf{F}}_n^\sigma - \hat{\mathbf{H}}_n^\sigma) \varphi_{il} d\sigma - \\ & - \int_{K_i} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{ih}) - \mathbf{H}(\mathbf{U}_{ih}, \mathbf{W}_{ih})) \cdot \nabla \varphi_{il} dS = 0, l = 1, \dots, N_h, \\ & \int_{K_i} \sum_{k=1}^{N_\phi} \mathbf{W}_{ik} \varphi_{ik} \varphi_{il} dS - \int_{\partial K_i} \hat{\mathbf{Q}}_n^\sigma \varphi_{il} d\sigma + \int_{K_i} \mathbf{Q}_{ih} \cdot \nabla \varphi_{il} dS = 0, l = 1, \dots, N_\phi, \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{F}}_n^\sigma = \hat{\mathbf{F}}^\sigma \cdot \mathbf{n}$, $\hat{\mathbf{H}}_n^\sigma = \hat{\mathbf{H}}^\sigma \cdot \mathbf{n}$, $\hat{\mathbf{Q}}_n^\sigma = \hat{\mathbf{Q}}^\sigma \cdot \mathbf{n}$ – функции потока, которые будут определены ниже.

Заменим производную $\frac{d\mathbf{U}_{ik}}{dt}$ дискретным аналогом и с учетом шага по времени Δt перепишем систему в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{K_i} \sum_{k=1}^{N_\phi} \frac{\mathbf{U}_{ik}^{m+1} - \mathbf{U}_{ik}^m}{\Delta t} \varphi_{ik} \varphi_{il} dS + \oint_{\partial K_i} (\hat{\mathbf{F}}_n^\sigma)^{m+1} \varphi_{il} d\sigma - \oint_{\partial K_i} (\hat{\mathbf{H}}_n^\sigma)^{m+1} \varphi_{il} d\sigma - \\ & - \int_{K_i} \left(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial x} + \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial y} \right) dS + \\ & + \int_{K_i} \left(\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}, \mathbf{W}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial x} + \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}, \mathbf{W}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial y} \right) dS = 0, l = 1, \dots, N_\phi, \quad (7) \\ & \int_{K_i} \sum_{k=1}^{N_\phi} \mathbf{W}_{ik}^{m+1} \varphi_{ik} \varphi_{il} dS - \int_{\partial K_i} (\hat{\mathbf{Q}}_n^\sigma)^{m+1} \varphi_{il} d\sigma + \\ & + \int_{K_i} \left(\mathbf{Q}_{ih}^{(1)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial x} + \mathbf{Q}_{ih}^{(2)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial y} \right) dS = 0, l = 1, \dots, N_\phi. \quad (8) \end{aligned}$$

Далее рассмотрим нахождение элементов результирующей матрицы от конвективных слагаемых системы (7)

$$\mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) = \mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{U}_{ih}^m) + \frac{\partial \mathbf{F}^{(\alpha)}}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}_{ih}^{m+1} - \mathbf{U}_{ih}^m), \quad \alpha = 1, 2.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{(\alpha)}}{\partial \mathbf{U}} \right)^m \Big|_{\mathbf{U}=\hat{\mathbf{U}}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^- + \mathbf{\Lambda}^+, \quad \mathbf{\Lambda}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda} - |\mathbf{\Lambda}|), \quad \mathbf{\Lambda}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda} + |\mathbf{\Lambda}|), \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}^- + \mathbf{A}^+, \quad \mathbf{A}^- = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}^-\mathbf{R}, \quad \mathbf{A}^+ = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}^+\mathbf{R}, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}|_{\mathbf{n}=(1,0)}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}|_{\mathbf{n}=(0,1)}, \end{aligned}$$

где \mathbf{R}, \mathbf{L} – матрицы, составленные из правых и левых собственных векторов матрицы \mathbf{A} , $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы \mathbf{A} , $\hat{\mathbf{U}}$ соответствует решениям задачи о распаде произвольного разрыва. В работе используется потоковая функция Годунова [21].

Рассмотрим нахождение элементов результирующей матрицы от диффузионных слагаемых системы (7). Введем обозначения: $\mathbf{G}^1 = \frac{\partial \mathbf{H}_n}{\partial \mathbf{U}}, \mathbf{G}^{1(1)} = \mathbf{G}^1|_{\mathbf{n}=(1,0)}, \mathbf{G}^{1(2)} = \mathbf{G}^1|_{\mathbf{n}=(0,1)}, \mathbf{G}^2 = \frac{\partial \mathbf{H}_n}{\partial \mathbf{W}}, \mathbf{G}^{2(1)} = \mathbf{G}^2|_{\mathbf{n}=(1,0)}, \mathbf{G}^{2(2)} = \mathbf{G}^2|_{\mathbf{n}=(0,1)}$.

Потоковые значения от конвективных и диффузионных слагаемых системы (7) с учетом введенных ранее обозначений находятся в виде: $(\hat{\mathbf{F}}_n^\sigma)^{m+1} = (\hat{\mathbf{F}}_n^\sigma)^m + \mathbf{A}^+(\mathbf{U}_{ih}^{m+1} - \mathbf{U}_{ih}^m) + \mathbf{A}^-(\mathbf{U}_{jh}^{m+1} - \mathbf{U}_{jh}^m), (\hat{\mathbf{H}}_n^\sigma)^{m+1} = (\hat{\mathbf{H}}_n^\sigma)^m + \mathbf{G}^{1+}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1} - \mathbf{U}_{ih}^m) + \mathbf{G}^{1-}(\mathbf{U}_{jh}^{m+1} - \mathbf{U}_{jh}^m) + \mathbf{G}^{2+}(\mathbf{W}_{ih}^{m+1} - \mathbf{W}_{ih}^m) + \mathbf{G}^{2-}(\mathbf{W}_{jh}^{m+1} - \mathbf{W}_{jh}^m)$, где $\mathbf{G}^{1-} = \mathbf{G}^1|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_{jh}^m, \mathbf{W}=\mathbf{W}_{jh}^m}, \mathbf{G}^{1+} = \mathbf{G}^1|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_{ih}^m, \mathbf{W}=\mathbf{W}_{ih}^m}, \mathbf{G}^{2-} = \mathbf{G}^2|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_{jh}^m, \mathbf{W}=\mathbf{W}_{jh}^m}, \mathbf{G}^{2+} = \mathbf{G}^2|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_{ih}^m, \mathbf{W}=\mathbf{W}_{ih}^m}$.

Для нахождения значения $(\hat{\mathbf{F}}_n^\sigma)^m$ в работе используется потоковая функция Годунова. Значение $(\hat{\mathbf{H}}_n^\sigma)^m$ находится как среднее между двумя поверхностными состояниями: $(\hat{\mathbf{H}}_n^\sigma)^m = \frac{1}{2} ((\mathbf{H}_n)_i^m + (\mathbf{H}_n)_j^m)$. Нормаль \mathbf{n} к ребру σ направлена из ячейки с индексом i в ячейку с индексом j .

Рассмотрим нахождение элементов результирующей матрицы от диффузионных слагаемых системы (8). Введем обозначения: $\mathbf{I}^1 = \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial \mathbf{U}}, \mathbf{I}^{1(1)} = \mathbf{I}^1|_{\mathbf{n}=(1,0)}, \mathbf{I}^{1(2)} = \mathbf{I}^1|_{\mathbf{n}=(0,1)}$.

Потоковые значения от диффузионных слагаемых ищем в виде $(\hat{\mathbf{Q}}_n^\sigma)^{m+1} = (\hat{\mathbf{Q}}_n^\sigma)^m + \mathbf{I}^{1+}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1} - \mathbf{U}_{ih}^m) + \mathbf{I}^{1-}(\mathbf{U}_{jh}^{m+1} - \mathbf{U}_{jh}^m)$, где $\mathbf{I}^{1-} = \mathbf{I}^1|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_{jh}^m}, \mathbf{I}^{1+} = \mathbf{I}^1|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_{ih}^m}$.

Значение $(\hat{\mathbf{Q}}_n^\sigma)^m$ находится как среднее между двумя поверхностными состояниями: $(\hat{\mathbf{Q}}_n^\sigma)^m = \frac{1}{2} ((\mathbf{Q}_n)_i^m + (\mathbf{Q}_n)_j^m)$. Нормаль \mathbf{n} к ребру σ направлена из ячейки с индексом i в ячейку с индексом j .

Обозначим за Γ_{ij} границу между ячейками с индексами i и j . Введем в рассмотрение приращение за шаг по времени от решения $\Delta \mathbf{U}_{ih}^{m+1}$ и вспомогательных переменных $\Delta \mathbf{W}_{ih}^{m+1}, \Delta \mathbf{Q}_{ih}^{m+1}$: $\Delta \mathbf{U}_{ih}^{m+1} = \mathbf{U}_{ih}^{m+1} - \mathbf{U}_{ih}^m, \Delta \mathbf{W}_{ih}^{m+1} = \mathbf{W}_{ih}^{m+1} - \mathbf{W}_{ih}^m, \Delta \mathbf{Q}_{ih}^{m+1} = \mathbf{Q}_{ih}^{m+1} - \mathbf{Q}_{ih}^m$.

Приращения искоемых функций будем искать в том же пространстве базисных функций, что и сами функции: $\Delta \mathbf{U}_{ih}^{m+1} = \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{U}_{ik}^{m+1} \varphi_{ik}, \Delta \mathbf{W}_{ih}^{m+1} = \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{W}_{ik}^{m+1} \varphi_{ik}, \Delta \mathbf{Q}_{ih}^{m+1} = \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{Q}_{ik}^{m+1} \varphi_{ik}$.

Полученную СЛАУ в «дельта-форме» решаем с использованием решателей из библиотеки NVIDIA AmgX.

Для подавления нефизичных осцилляций используется лимитер Кокбурна [19]. Как показано в работах [22, 23] при использовании линейных базисных функций лимитер Кокбурна показывает порядок точности 1,5 – 2,2 на гладких решениях. Для получения представленных ниже результатов расчетов использовались линейные базисные функции.

2. Результаты расчетов

2.1. Используемые вычислительные средства и библиотеки

Для проведения вычислительных экспериментов использовался персональный компьютер с процессором Intel Core i5-8265U и видеокартой NVIDIA GeForce MX250. Ниже представлены результаты, полученные с использованием решателей СЛАУ FGMRES и PBCGSTAB, реализованных в библиотеке AmgX версии 2.1.0.131-opensource. За среднее время выполнения одной итерации в расчетах ниже бралось общее время расчета всей задачи, поделенное на общее количество шагов по времени.

Для построения геометрических моделей и сеток использовался свободно распространяемый конечно-элементный генератор сетки Gmsh.

2.2. Течение невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином

Был выполнен расчет течения невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином при $M=2$ с числом Куранта, равным 5. Угол клина в канале равен 10° . Моделировалась конфигурация системы скачков уплотнения возникающих при обтекании начального клина и многократного отражения начального скачка от стенок канала при условиях: $p_\infty = 10^5$ Па, $T_\infty = 300$ К, $c_v = 724,4$ Дж/(кг К) [24]. В эксперименте была использована неструктурированная треугольная сетка, состоящая из 17096 ячеек. Слева было задано граничное условие входного потока, справа ставилось граничное условие выходного потока. На верхней и нижней стенках – граничное условие стенки без прилипания. Были выполнены расчеты с использованием решателей FGMRES и PBICGSTAB. На рисунке 1 представлены картины распределения поля давления и поля числа Маха в расчетной области для расчета с использованием решателя FGMRES. Результаты согласуются с результатами, полученными с использованием метода конечных объемов на блочно-структурированных [24, 25] и неструктурированных сетках [26].



Рис. 1. Распределение полей давления (а) и числа Маха (б), полученные с использованием решателя FGMRES

Оба решателя сходятся примерно за 4000 итераций. Среднее время выполнения одного шага по времени представлено в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение производительности решателей

Решатель СЛАУ	Среднее время одного шага по времени, с
FGMRES	1,98
PBICGSTAB	1,51

2.3. Обтекание профиля NASA0012 дозвуковым потоком газа

Был выполнен расчет течения вязкого сжимаемого газа в окрестности аэродинамического профиля NASA0012 с числом Маха $M = 0,7$ под углом атаки $1,49^\circ$ и числом Куранта, равным 5. Использовалась треугольная сетка, состоящая из 9902

ячеек. Характеристический размер ребра на границе профиля порядка 10^{-3} . Слева, сверху и снизу было задано граничное условие входного потока, справа ставилось граничное условие выходного потока. На границе профиля – граничное условие стенки с прилипанием.

Выполнены расчеты с использованием решателей FGMRES и PBICGSTAB. Полученные численные результаты согласуются с результатами, полученными с использованием метода конечных объемов на блочно-структурированных сетках [26] и с экспериментальными данными [27]. На рис. 2 представлено распределение поля давления возле профиля, а на рис. 3 представлено распределение числа Маха, полученные с использованием решателя PBICGSTAB.

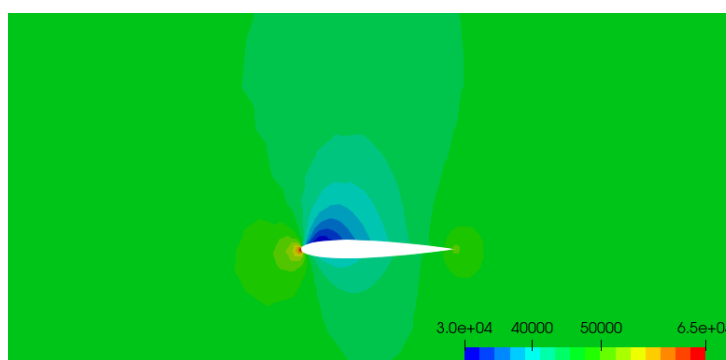


Рис. 2. Распределение поля давления около профиля (PBICGSTAB)

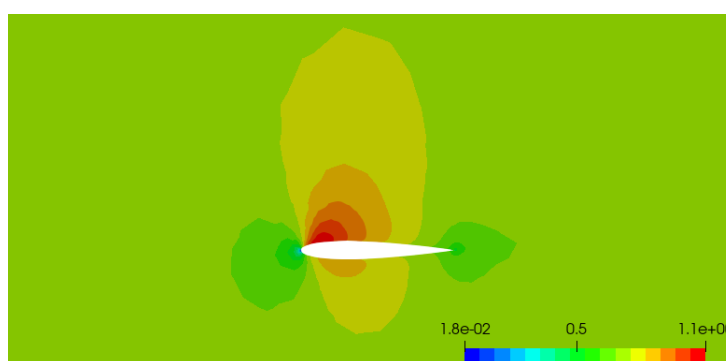


Рис. 3. Распределение поля числа Маха около профиля (PBICGSTAB)

На рис. 4 представлено распределение коэффициента давления на поверхности профиля. Расхождение численных результатов и эксперимента на концах профиля можно объяснить тем фактом, что в численной схеме не учитываются турбулентные эффекты.

Численное решение с использованием решателя PBICGSTAB сходится примерно за 4000 итераций, при использовании решателя FGMRES решение сходится примерно за 5000 итераций.

В табл. 2 представлены средние значения времени выполнения одного шага по времени. Видно, что решатель PBCGSTAB демонстрирует лучшие результаты.

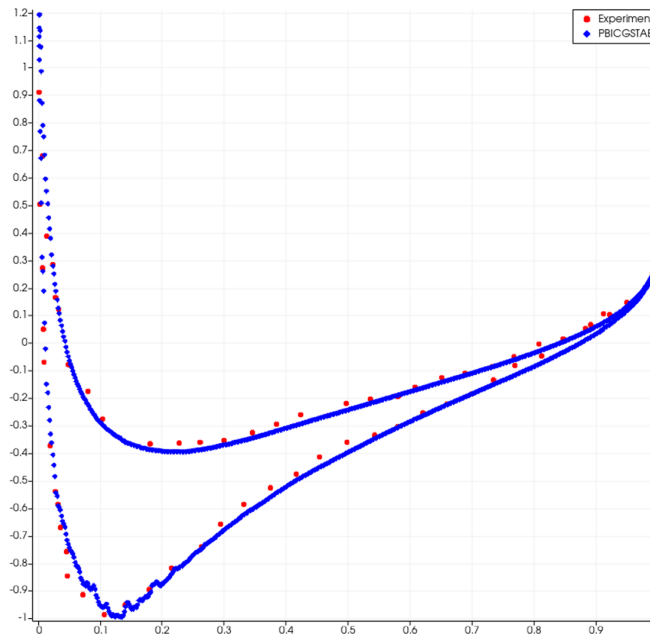


Рис. 4. Распределение коэффициента давления на поверхности профиля в неявной схеме разрывного метода Галеркина (PBICGSTAB) и в эксперименте (Experiment)

Таблица 2

Сравнение производительности решателей

Решатель СЛАУ	Среднее время одного шага по времени, с
FGMRES	3,52
PBICGSTAB	3,21

Заключение

В работе представлена численная методика на основе неявной схемы разрывного метода Галеркина для решения двумерных уравнений газовой динамики на неструктурированных треугольных сетках. Для решения СЛАУ использовались решатели из библиотеки NVIDIA AmgX. Оба рассмотренных решателя демонстрируют примерно равную производительность. В задаче об обтекании симметричного профиля NASA0012 дозвуковым вязким потоком газа лучшие результаты по сходимости демонстрирует решатель PBICGSTAB. Представленные результаты расчетов говорят о возможности использования разработанной численной схемы для моделирования двумерных задач газовой динамики на неструктурированных сетках. Для ускорения расчетов планируется использовать новый функционал библиотеки NVIDIA AmgX, который позволяет распределенно загружать матрицу. При этом каждый процессор будет работает со своей частью глобальной матрицы.

Работа проводилась при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00131).

Литература

1. Su Wei. High-Order Hybridisable Discontinuous Galerkin Method for the Gas Kinetic Equation / Wei Su, Peng Wang, Yonghao Zhang // *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. – 2019. – V. 33, № 8. – P. 335–342.
2. Li Yunzhang. A Discontinuous Galerkin Method for Stochastic Conservation Laws / Yunzhang Li, Chi-Wang Shu, Shanjian Tang // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2020. – V. 42, № 1. – P. 54–86.
3. Rhebergen S. A Hybridizable Discontinuous Galerkin Method for the Navier–Stokes Equations with Pointwise Divergence-Free Velocity Field / S. Rhebergen, G.N. Wells // *Journal of Scientific Computing*. – 2018. – № 76. – P. 1484–1501.
4. Hajihassanpour, M., Hejranfar K. A High-Order Nodal Discontinuous Galerkin Method to Solve Preconditioned Multiphase Euler/Navier–Stokes Equations for Inviscid/Viscous Cavitating Flows / M. Hajihassanpour, K. Hejranfar // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2020. – V. 92, № 5. – P. 478–508.
5. Ладонкина, М.Е. О повышении устойчивости комбинированной схемы разрывного метода Галеркина / М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.В. Остапенко и др. // *Математическое моделирование*. – 2021. – Т. 33, № 3. – С. 98–108.
6. Schall, E. Implicit Method and Slope Limiter in AHMR Procedure for High Order Discontinuous Galerkin Methods for Compressible Flows / E. Schall, N. Chauchat // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2019. – V. 72. – P. 371–391.
7. Asada, H. A Simple Cellwise High-order Implicit Discontinuous Galerkin Scheme for Unsteady Turbulent Flows / H. Asada, S. Kawai // *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*. – 2019. – V. 62, № 2. – P. 93–107.
8. Luo, H. An Implicit Discontinuous Galerkin Method for the Unsteady Compressible Navier–Stokes Equations / H. Luo, H. Segawa, M.R. Visbal // *Computers & Fluids*. – 2012. – № 53. – P. 133–144.
9. Guthrey, P.T. The Regionally Implicit Discontinuous Galerkin Method: Improving the Stability of DG-FEM / P.T. Guthrey, J.A. Rossmann // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 2019. – V. 57, № 3. – P. 1263–1288.
10. Волков, А.В. Применение многосеточного подхода к решению 3D уравнений Навье – Стокса на гексаэдральных сетках методом Галеркина с разрывными базисными функциями / А.В. Волков // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2010. – Т. 50, № 3. – С. 517–531.
11. Wang Haijin. Third Order Implicit-Explicit Runge–Kutta Local Discontinuous Galerkin Methods with Suitable Boundary Treatment for Convection-Diffusion Problems with Dirichlet Boundary Conditions / Haijin Wang, Qiang Zhang, Shiping Wang, Chi-Wang Shu // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2018. – № 342. – P. 164–179.
12. Wang Haijin. Implicit-Explicit Local Discontinuous Galerkin Methods with Generalized Alternating Numerical Fluxes for Convection-Diffusion Problems / Haijin Wang, Qiang Zhang, Chi-Wang Shu // *Journal of Scientific Computing*. – 2019. – № 80. – P. 2080–2114.
13. Wang Haijin. Local Discontinuous Galerkin Methods with Explicit-Implicit-Null Time Discretizations for Solving Nonlinear Diffusion Problems / Haijin Wang, Qiang Zhang, Chi-Wang Shu // *Science China Mathematics*. – 2020. – № 63. – P. 183–204.

14. Богданов П.Б., Горобец А.В., Суков С.А. Адаптация и оптимизация базовых операций газодинамического алгоритма на неструктурированных сетках для расчетов на массивно-параллельных ускорителях / П.Б. Богданов, А.В. Горобец, С.А. Суков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 8. – С. 1360–1373.
15. Simoncini, V. Flexible Inner-Outer Krylov Subspace Methods / V. Simoncini, D.B. Szvld // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2003. – V. 40, № 6. – P. 2219–2239.
16. Naumov, M. AmgX: a Library for GPU Accelerated Algebraic Multigrid and Preconditioned Iterative Methods / M. Naumov, M. Arsaev, P. Castonguay et al. // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2015. – V. 37, № 5. – P. 602–626.
17. Жалнин, Р.В. Исследование порядка точности неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения задач газовой динамики / Р.В. Жалнин, А.В. Максимкин, В.Ф. Масыгин и др. // Журнал Средневолжского математического общества. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 48–54.
18. Жалнин, Р.В. Об использовании WENO-ограничителя в неявной схеме для метода Галеркина с разрывными базисными функциями / Р.В. Жалнин, А.В. Максимкин, В.Ф. Масыгин и др. // Журнал Средневолжского математического общества. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 75–81.
19. Cockburn, B. The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems / B. Cockburn, C.-W. Shu // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1998. – V. 35, № 6. – P. 2440–2463.
20. Bassi F.A., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations / F.A. Bassi, S. Rebay // Journal of Computational Physics. – 1997. – V. 131, № 2. – P. 267–279.
21. Годунов, С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики / С.К. Годунов // Математический сборник. – 1959. – Т. 47, № 3. – С. 271–306.
22. Ладонкина, М.Е. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина / М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2012. – № 034. – URL: <http://www.mathnet.ru/links/e9e6bfb5cb374bbfe8bb183e382941cc/ipmp52.pdf>
23. Ладонкина, М.Е. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина / М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 12. – С. 124–128.
24. Жалнин, Р.В. Пакет программ ЛОГОС. методика повышенного порядка точности на блочно-структурированных сетках с использованием реконструкции типа WENO / Р.В. Жалнин, Е.А. Веселова, Ю.Н. Дерюгин и др. // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6. – 9 с. – URL: www.science-education.ru/113-10929
25. Веселова, Е.А. Пакет программ ЛОГОС. Методики расчета течения вязкого сжимаемого газа на блочно-структурированных сетках / Е.А. Веселова, Р.В. Жалнин, Ю.Н. Дерюгин и др. // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. – 22 с. – URL: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=12601>
26. Волков, К.Н. Реализация параллельных вычислений на графических процессорах в пакете вычислительной газовой динамики ЛОГОС / К.Н. Волков, Ю.Н. Дерюгин, В.Н. Емельянов и др. // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14, № 3. – С. 334–342.

27. Harris, C.D. Two-Dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel / C.D. Harris // NASA Technical Memorandum 81927. Langley Research Center. – 1981.

Виктор Федорович Масыгин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева (г. Саранск, Российская Федерация), vmasyagin@gmail.com.

Руслан Викторович Жалнин, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой, кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева (г. Саранск, Российская Федерация), zhrv@mrsu.ru.

Владимир Федорович Тишкин, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий отделом, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (г. Москва, Российская Федерация), v.f.tishkin@mail.ru.

Поступила в редакцию 19 августа 2021 г.

MSC 65N30

DOI: 10.14529/mmp220207

APPLICATION OF AN IMPLICIT SCHEME OF THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD TO SOLVING GAS DYNAMICS PROBLEMS ON NVIDIA GRAPHIC ACCELERATORS

V.F. Masyagin¹, R.V. Zhalnin¹, V.F. Tishkin²

¹National Research Mordovia State University, Saransk, Russian Federation

²Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

E-mail: vmasyagin@gmail.com, zhrv@mrsu.ru, v.f.tishkin@mail.ru

The paper proposes an implicit scheme of the discontinuous Galerkin method for solving the gas dynamics equations on unstructured grids. The implicit scheme is based on the representation of the system of grid equations in "delta form". To solve the SLAE obtained during the approximation of the initial equations, solvers from the NVIDIA AmgX library are used. To verify the numerical algorithm, we calculate the flow of an inviscid compressible gas in a flat channel with a wedge and solve the problem of a viscous gas flow around a symmetric airfoil NACA0012. The results obtained are compared with the experimental results and the known numerical solutions to the presented problems. We conclude that the numerical and experimental data are in good agreement.

Keywords: gas dynamics equations; discontinuous Galerkin method; implicit scheme; NVIDIA AmgX.

References

1. Wei Su, Peng Wang, Yonghao Zhang. High-Order Hybridisable Discontinuous Galerkin Method for the Gas Kinetic Equation. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2019, vol. 33, no. 8, pp. 335–342. DOI: 10.1080/10618562.2019.1666110
2. Yunzhang Li, Chi-Wang Shu, Shanjian Tang. A Discontinuous Galerkin Method for Stochastic Conservation Laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2020, vol. 42, no. 1, pp. 54–86. DOI: 10.1137/19M125710X

3. Rhebergen S., Wells G. N. A Hybridizable Discontinuous Galerkin Method for the Navier–Stokes Equations with Pointwise Divergence-Free Velocity Field. *Journal of Scientific Computing*, 2018, no. 76, pp. 1484–1501. DOI: 10.1007/s10915-018-0671-4
4. Hajihassanpour M., Hejranfar K. A High-Order Nodal Discontinuous Galerkin Method to Solve Preconditioned Multiphase Euler/Navier–Stokes Equations for Inviscid/Viscous Cavitating Flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2020, vol. 92, no. 5, pp. 478–508. DOI: 10.1002/fld.4792
5. Ladonkina M.E., Nekliudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. [On Increasing the Stability of the Combined Scheme of the Discontinuous Galerkin Method]. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 33, no. 3, pp. 98–108. DOI: 10.20948/mm-2021-03-07. (in Russian)
6. Schall E., Chauchat N. Implicit Method and Slope Limiter in AHMR Procedure for High Order Discontinuous Galerkin Methods for Compressible Flows. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 72, pp. 371–391. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.12.020
7. Asada H., Kawai S. A Simple Cellwise High-order Implicit Discontinuous Galerkin Scheme for Unsteady Turbulent Flows. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, 2019, vol. 62, no. 2, pp. 93–107. DOI: 10.2322/tjsass.62.93
8. Luo H., Segawa H., Visbal M.R. An Implicit Discontinuous Galerkin Method for the Unsteady Compressible Navier–Stokes Equations. *Computers & Fluids*, 2012, vol. 50, pp. 133–144. DOI: 10.1016/j.compfluid.2011.10.009
9. Guthrey P.T., Rossmanith J.A. The Regionally Implicit Discontinuous Galerkin Method: Improving the Stability of DG-FEM. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2019, vol. 57, no. 3, pp. 1263–1288. DOI: 10.1137/17M1156174
10. Volkov A.V. [Application of the Multigrid Approach for Solving 3D Navier–Stokes Equations on Hexahedral Grids Using the Discontinuous Galerkin Method]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 3, pp. 517–531. (in Russian) DOI: 10.1134/S0965542510030103.
11. Haijin Wang, Qiang Zhang, Shiping Wang, Chi-Wang Shu. Local Discontinuous Galerkin Methods with Explicit-Implicit-Null Time Discretizations for Solving Nonlinear Diffusion Problems. *Science China Mathematics*, 2020, vol. 63, pp. 183–204. DOI: 10.1007/s11425-018-9524-x
12. Haijin Wang, Qiang Zhang, Chi-Wang Shu. Third Order Implicit-Explicit Runge–Kutta Local Discontinuous Galerkin Methods with Suitable Boundary Treatment for Convection-Diffusion Problems with Dirichlet Boundary Conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 342, pp. 164–179. DOI: 10.1016/j.cam.2018.04.004
13. Haijin Wang, Qiang Zhang, Chi-Wang Shu. Implicit-Explicit Local Discontinuous Galerkin Methods with Generalized Alternating Numerical Fluxes for Convection–Diffusion Problems. *Journal of Scientific Computing*, 2019, vol. 81, pp. 2080–2114. DOI: 10.1007/s10915-019-01072-4
14. Bogdanov P.B., Gorobec A.V., Sukov S.A. [Adaptation and Optimization of Basic Operations for an Unstructured Mesh CFD Algorithm for Computation on Massively Parallel Accelerators]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 8, pp. 1360–1373. DOI: 10.7868/S0044466913080048
15. Simoncini V., Szvld D.B. Flexible Inner-Outer Krylov Subspace Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2019, vol. 40, no. 6, pp. 2219–2239. DOI: 10.1137/S0036142902401074

16. Naumov M., Arsaev M., Castonguay P. et al. AmgX: a Library for GPU Accelerated Algebraic Multigrid and Preconditioned Iterative Methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, vol. 37, no. 5, pp. 602–626. DOI: 10.1137/140980260
17. Zhalnin R.V., Maksimkin A.V., Masjagin V.F. et al. [Research of the Order of Accuracy of an Implicit Discontinuous Galerkin Method for Solving Problems of Gas Dynamics]. *Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2015, vol. 17, no. 1, pp. 48–54. (in Russian)
18. Zhalnin R.V., Maksimkin A.V., Masjagin V.F. et al. [About the Use of WENO-Limiter in the Implicit Scheme for the Discontinuous Galerkin Method]. *Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2015, vol. 17, no. 3, pp. 75–81. (in Russian)
19. Cockburn B., Shu C.-W. The Local Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Convection-Diffusion Systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998, vol. 35, no. 6, pp. 2440–2463. DOI: 10.1137/S0036142997316712
20. Bassi F.A., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 1997, vol. 131, no. 2, pp. 267–279. DOI: 10.1006/jcph.1996.5572
21. Godunov S.K. [A Difference Method for Numerical Calculation of Discontinuous Solutions of the Equations of Hydrodynamics]. *Matematicheskii Sbornik*, 1959, vol. 47, no. 3, pp. 271–306. (in Russian)
22. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. [Research of the Impact of Different Limiting Functions on the Order of Solution Obtained by RKDG]. *Modern Problems of Science and Education*, 2012, no. 034, available at: <http://www.mathnet.ru/links/e9e6bfb5cb374bbfe8bb183e382941cc/ipmp52.pdf> (in Russian)
23. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. [Research of the Impact of Different Limiting Functions on the Order of Solution Obtained by RKDG]. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, vol. 24, no. 12, pp. 124–128. (in Russian)
24. Zhalnin R.V., Veselova E.A., Derjugin Ju.N. et al. [Software Package LOGOS. The High Order of Accuracy Method on Block-Structured Meshes with WENO Reconstruction]. *Modern Problems of Science and Education*, 2012, no. 6, 9 p, available at: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=7329> (in Russian)
25. Veselova E.A., Zhalnin R.V., Derjugin Ju.N. et al. [The Software LOGOS. Calculation Method for Viscous Compressible Gas Flows on a Block-Structured Meshes]. *Modern Problems of Science and Education*, 2014, no. 2, 22 p, available at: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=12601> (in Russian)
26. Volkov K.N., Derjugin Ju.N., Emel’janov V.N. [Implementation of Parallel Calculations on Graphics Processor Units in the LOGOS Computational Fluid Dynamics Package]. *Numerical Methods and Programming*, 2013, vol. 14, no. 3, pp. 334–342. (in Russian)
27. Harris C.D. Two-Dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. *NACA Technical Memorandum 81927. Langley Research Center*, 1981.

Received August 19, 2021