

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ЗАГНУТЫМ ЭЛЕКТРОДОМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.Н. Шпак¹, С.А. Сухина¹, М.В. Голуб¹

¹Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Российская Федерация

В работе излагается схема применения метода спектральных элементов для моделирования динамического поведения пьезоэлектрического преобразователя сложной формы в трехмерном случае. Предлагаемая в данной работе математическая модель необходима для обобщения гибридного метода для описания возбуждения и измерения бегущих волн в протяженных конструкциях в трехмерном случае. Рассматриваются различные типы электродирования пьезоэлектрических преобразователей, а также различные граничные условия для описания процессов возбуждения (актуаторы) и измерения (сенсоры). Неизвестные перемещения аппроксимируются с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа на узлах Гаусса – Лежандра – Лобатто, система линейных алгебраических уравнений формулируется относительно значений вектора перемещений и электрического потенциала в узловых точках. Проводится сравнение результатов моделирования с расчетами в коммерческом конечноэлементном пакете COMSOL Multiphysics. Анализируются электромеханические характеристики динамического поведения преобразователей в зависимости от режима работы и особенностей электродирования. Рассчитываются резонансные частоты преобразователя и приводятся соответствующие собственные формы колебаний.

Ключевые слова: упругие волны; пьезоэлектрический преобразователь; обернутый электрод; метод спектральных элементов; имитационное моделирование.

Введение

Системы мониторинга целостности конструкций, основанные на использовании бегущих волн, имеют большой потенциал в задачах оценки надежности протяженных конструкций [1–3]. Такие системы широко используются для мониторинга композитных тонкостенных конструкций в авиакосмической промышленности [4] и других отраслях, например, при диагностике трубопроводов, лопастей ветрогенераторов, баков высокого давления и резервуаров для хранения нефти [5]. Для возбуждения и измерения бегущих волн, как правило, используются пьезоэлектрические преобразователи различных типов, что допускает автоматическое тестирование инспектируемой конструкции согласно утвержденному графику [5]. Поскольку системы мониторинга основываются на обработке измеренных с помощью датчиков данных, то методы обработки сигналов должны позволять определять различия в измеренных данных, вызванные внешними условиями, дефектами в структуре или частично отслоившимися датчиками. Таким образом, для создания и успешного применения на практике ультразвуковых систем мониторинга необходимы быстрые и надежные трехмерные математические модели, описывающие процессы возбуждения, распространения, рассеивания бегущих волн, генерируемых пьезоэлектрическими преобразователями.

Для описания распространения бегущих волн в слоистых структурах удобно использовать полуаналитические методы, которые позволяют быстро рассчитывать волновые поля и учитывать простые дефекты [6]. Для моделирования неоднородных структур, дефектов сложной формы и пьезоэлектрических элементов используют сеточные методы, которые обеспечивают высокую точность, но при этом требуют больших вычислительных ресурсов. Поэтому для решения волновых задач активно развиваются гибридные подходы, в которых области со сложной геометрией, описываются прямыми численными методами, а распространение волн в протяженных

структурах – с помощью аналитических и полуаналитических подходов, см. обзор в [7]. Полуаналитический гибридный подход для моделирования бегущих волн, возбуждаемых частично отклеенным пьезоэлектрическим преобразователем в двумерном случае, был описан в статье [8]. При таком подходе пьезопреобразователь описывается методом спектральных элементов (МСЭ) в частотной области [9], а распространение упругих волн в неограниченном слое – с помощью метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) [10]. Этот гибридный подход позволяет учитывать поведение пьезоэлектрической структуры и при этом быстро и эффективно описывать волновые поля в слое, моделировать отдельные моды, рассчитывать волновую энергию и резонансные частоты всей структуры. Точность вычислений на основе двумерной модели падает с ростом частоты колебаний. Кроме того, некоторые физические характеристики (например, импеданс) не могут быть достоверно рассчитаны в рамках двумерной модели, поскольку они зависят от характеристик трехмерной структуры. Таким образом, необходимо разрабатывать полную трехмерную математическую модель для описания возбуждения бегущих волн в протяженной структуре пьезоэлектрическими преобразователями.

На практике часто используются пьезоэлектрические преобразователи с загнутым электродом, что позволяет припаивать контакты с одной (обычно верхней) стороны датчика. При этом, было показано влияние загнутого электрода на возбуждаемые актуатором волновые поля [11, 12], что обуславливает необходимость учета этой особенности при моделировании. В данной статье описано применение МСЭ в частотной области для описания динамического поведения пьезоэлектрического преобразователя в трехмерном случае. Одно из преимуществ МСЭ – возможность моделировать преобразователи сложной формы и/или с загнутыми электродами, которые зачастую и используются на практике ввиду практичности и легкости в установке. В данной работе были разработаны две модели преобразователя – с загнутым электродом и без, произведен численный анализ для обоих случаев. Для моделирования загнутого электрода разработана схема неравномерного разбиения области на конечные элементы. Производится оценка сходимости решения, а также необходимого количества конечных элементов для получения точного решения. Рассчитываются резонансные частоты пьезоэлектрического преобразователя и приводятся собственные формы колебаний. Результаты моделирования сравниваются с расчетами в коммерческом конечноэлементном пакете COMSOL Multiphysics.

Предлагаемая математическая модель пьезопреобразователя будет в дальнейшем использоваться при разработке гибридного подхода для решения связанной трехмерной задачи о преобразователе, приклеенном на поверхности упругого волновода. В связи с этим, задаются граничные условия на напряжения на нижней грани преобразователя – вдоль которой будет производиться «сшивка» с МГИУ на основе непрерывности перемещений и напряжений. Рассматривается действие преобразователя как актуатора и как сенсора, задаются соответствующие граничные условия.

1. Математическая модель

1.1. Постановка задачи

Рассматриваются пьезоэлектрические преобразователи с двумя электродированными нижней и верхней поверхностями (рис. 1а), а также с загнутым снизу электродом (рис. 1б). Прямоугольный пьезоэлектрический преобразователь занимает область $\Omega = [0, w] \times [0, e] \times [0, h]$ с границей $\partial\Omega$ в декартовой системе координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$ с центром на одном из углов преобразователя и осями, направленными параллельно боковым граням.

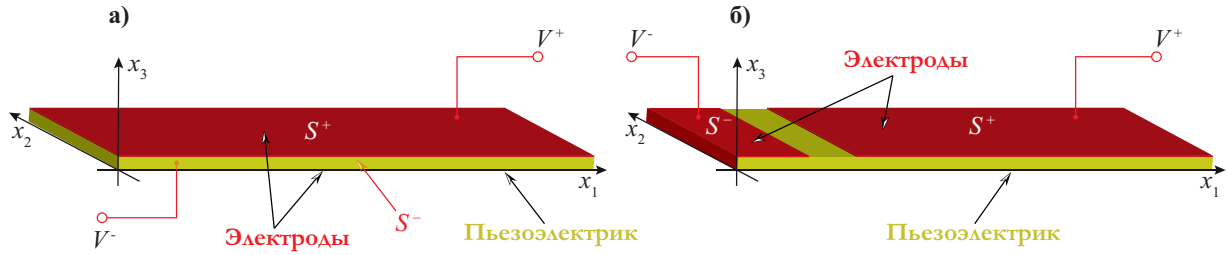


Рис. 1. Геометрия задачи для пьезоэлектрического преобразователя с нижним незагнутом (а) и нижним загнутым электродом (б)

Уравнения состояния для пьезоэлектрического материала имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^E s_{kl} - e_{ijk}^\theta E_k, \\ D_i &= e_{ijk}^\theta s_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, s_{kl} – компоненты тензора деформации, D_i – компоненты вектора электрического смещения, $E_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ – компоненты вектора напряженности электрического поля. Свойства материала задаются при помощи тензора упругих констант C_{ijkl} , тензора констант пьезоэлектрических напряжений e_{ijk} , тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij}^S и плотностью ρ .

Нестационарные колебания преобразователя описываются уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (2)$$

и уравнениями электростатики:

$$D_{i,i} = 0. \quad (3)$$

Гибридный подход, описанный в [8], предполагает решение гармонической задачи с последующим применением преобразования Лапласа для нахождения нестационарного решения, поэтому в работе рассматриваются гармонические колебания в перемещениях $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ с круговой частотой ω , что позволяет привести уравнение (2) к виду:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_j = 0. \quad (4)$$

Все границы пьезоэлектрического преобразователя свободны от напряжений, за исключением нижней грани $S_{\text{load}} = \{x_3 = 0\} \cap \partial\Omega$, где задается некоторая нагрузка:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \cdot n_j &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus S_{\text{load}}, \\ \sigma_{i3}(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_{\text{load}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее \mathbf{n} обозначает вектор нормали к поверхности.

У пьезоэлектрического преобразователя имеются две электродированные поверхности S^\pm . В случае загнутого электрода $S^- = \{\{x_3 = 0\} \cup \{x_1 = 0\} \cup \{x_3 = h, 0 \leq x_1 \leq b\}\} \cap \partial\Omega$ и $S^+ = \{x_3 = h, b + c \leq x_1 \leq w\} \cap \partial\Omega$, а для незагнутого нижнего электрода $S^- = \{x_3 = 0\} \cap \partial\Omega$ и $S^+ = \{x_3 = h\} \cap \partial\Omega$. Здесь величины b и c характеризуют ширину загнутого электрода и неэлектродированной полосы на верхней грани преобразователя. Различаются условия для пьезоэлектрического преобразователя, работающего в режиме возбуждения (актуатор) и в режиме измерения (сенсор). В обоих случаях нижний электрод считается заземленным:

$$\phi(\mathbf{x}) = V^- = 0, \quad \mathbf{x} \in S^-. \quad (6)$$

На второй электродированной поверхности в случае работы в режиме актуатора задается постоянный электрический потенциал:

$$\phi(\mathbf{x}) = V^+, \quad \mathbf{x} \in S^+, \quad (7)$$

тогда как в режиме сенсора электрический потенциал на электроде $\mathbf{x} \in S^+$ предполагается неизвестным, а электрический заряд равным нулю:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, h) &= \theta, \quad \mathbf{x} \in S^+, \\ \int_{S^+} D_3(x_1, x_2, h) dx_1 dx_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В практике применения систем мониторинга, неэлектродированные поверхности преобразователя $S_D = \partial\Omega \setminus (S^+ \cup S^-)$ контактируют только с воздушной средой, что позволяет использовать следующие граничные условия:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_D. \quad (9)$$

1.2. Общая схема решения

Динамическое поведение пьезоэлектрического преобразователя описывается с помощью метода спектральных элементов в частотной области. Для записи вариационной формулировки уравнений движения вводится пространство тестовых функций W , выбор которых обуславливают граничные условия (6) – (8):

$$\begin{aligned} W_v &= \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) | v_i(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)\}, \\ W_\psi &= \{\psi(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega), \quad \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S^+ \cup S^-\}. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом уравнения (3) и (4) проецируются на пространство тестовых функций (10), где для каждого уравнения (3) и (4) вводятся свои тестовые функции:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} v_i^s(\mathbf{x}) dV + \int_{\Omega} \rho \omega^2 u_i(\mathbf{x}) v_i^s(\mathbf{x}) dV = 0, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial D_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}) dV = 0. \quad (12)$$

После этого, используя интегрирование по частям, уравнения (11), (12) приводятся к слабой постановке:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \oint_{\partial\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^3 e_{kil} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] n_j dS - \\ & - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^3 e_{kil} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] dV + \\ & + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \rho \omega^2 u_i(\mathbf{x}) dV = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \oint_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 e_{ikl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] n_i dS - \\ & - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^3 e_{kil} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для реализации МСЭ рассматриваемая область разбивается на подобласти (конечные элементы), на каждой из которых находится численное решение, после чего происходит его сопряжение на границах конечных элементов. Так, прямоугольная область Ω разбивается на M_i элементов по оси x_i . При равномерном разбиении области на элементы (когда длина каждого элемента соответствует величине w/M_1 , ширина – e/M_2 , а высота – h/M_3) нужно использовать более частое разбиение на элементы, что приводит к увеличению вычислительной нагрузки. Поэтому для решения задачи о пьезоэлектрическом преобразователе с загнутым электродом, использовалось неравномерное разбиение на элементы, когда размер элементов увеличивается ближе к краям преобразователя. В этом случае разбиение на элементы проводилось пропорционально узловым точкам.

Решение в пьезоэлектрическом преобразователе по каждой координате аппроксимируется интерполяционными полиномами Лагранжа $C^i(x_k)$ степени N на узлах Гаусса – Лежандра – Лобатто λ_k , $k = \overline{1, N+1}$ (см. подробнее в [8, 13]):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \left\{ \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{l_3=1}^{M_3} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \sum_{i_3=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 l_3 i_1 i_2 i_3} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) C^{i_3}(\xi_3^{l_3}) \right\}, k = 1, 2, 3, \\ \phi(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{l_3=1}^{M_3} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \sum_{i_3=1}^{N+1} \phi^{l_1 l_2 l_3 i_1 i_2 i_3} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) C^{i_3}(\xi_3^{l_3}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\xi_i^{l_i}$, $l_i \in [1, M_i]$ – координата узловой точки в локальной системе координат элемента. Для тестовых функций используются те же интерполяционные полиномы, причем на каждом элементе вводятся свои тестовые функции:

$$\begin{aligned} v_i^s(\mathbf{x}) &= \delta_{is} C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}) C^{p_3}(\xi_3^{t_3}), \quad \mathbf{v}^s(\mathbf{x}) \in W_v, \\ \psi(\mathbf{x}) &= C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}) C^{p_3}(\xi_3^{t_3}), \quad \psi(\mathbf{x}) \in W_\psi, \\ t_i &= \overline{1, M_i}, \quad p_i = \overline{1, N+1}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad s = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Представления (15) и (16) подставляются в (13), (14), что после преобразований с учетом свойства $C^i(\lambda_k) = \delta_{ik}$ интерполяционных полиномов приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (17)$$

относительно неизвестных значений перемещений \mathbf{u} и электрического потенциала ϕ в узловых точках $\mathbf{y} = \{\{u_k^{l_1 l_2 l_3 i_1 i_2 i_3}\}, \{\phi^{l_1 l_2 l_3 i_1 i_2 i_3}\}\}$. Система линейных алгебраических уравнений, возникающих при дискретизации (13) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{l_3=1}^{M_3} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \sum_{i_3=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 l_3 i_1 i_2 i_3} \left\{ (\delta_{k1} + \delta_{k2} + \delta_{k3}) \left(\sum_{i=1}^3 \delta_{is} \left[\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2} S_3^{l_3}} C_{i1k1} \right. \right. \right. \\ & \cdot \left. \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1}) w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_3^{l_3}} C_{i_2 k_1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{S_2^{l_2}} C_{i3k1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} D_{i_3 p_3} - \frac{1}{S_3^{l_3}} C_{i1k2} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \\
 & -\frac{1}{S_2^{l_2}} C_{i1k3} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{p_3} D_{p_3 i_3} - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1} S_3^{l_3}} C_{i2k2} \sum_{k_2=1}^{N+1} (w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2}) w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \\
 & -\frac{1}{S_1^{l_1}} C_{i2k3} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} w_{p_3} D_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_1^{l_1}} C_{i3k2} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} w_{i_3} D_{i_3 p_3} - \\
 & -\frac{S_3^{l_3}}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} C_{i3k3} \sum_{k_3=1}^{N+1} (w_{k_3} D_{k_3 p_3} D_{k_3 i_3}) w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} \left. + \rho \omega^2 \frac{1}{S_1^{l_1} S_2^{l_2} S_3^{l_3}} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} \right) + \\
 & + \delta_{k_4} \sum_{i=1}^3 \delta_{is} \left[-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2} S_3^{l_3}} e_{1i1} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1}) w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_3^{l_3}} e_{1i2} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \right. \\
 & -\frac{1}{S_2^{l_2}} e_{1i3} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} D_{i_3 p_3} - \frac{1}{S_3^{l_3}} e_{2i1} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \\
 & -\frac{1}{S_2^{l_2}} e_{3i1} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{p_3} D_{p_3 i_3} - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1} S_3^{l_3}} e_{2i2} \sum_{k_2=1}^{N+1} (w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2}) w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \\
 & -\frac{1}{S_1^{l_1}} e_{3i2} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} w_{p_3} D_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_1^{l_1}} e_{2i3} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} w_{i_3} D_{i_3 p_3} - \\
 & \left. -\frac{S_3^{l_3}}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} e_{3i3} \sum_{k_3=1}^{N+1} (w_{k_3} D_{k_3 p_3} D_{k_3 i_3}) w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^3 \delta_{is} \delta_{p_3 i} \delta_{t_3 1} \frac{1}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} w_{p_1} w_{p_2} q_i \left(\frac{x_1^{t_1+1} - x_1^{t_1}}{2} \lambda_{k_1} + \frac{x_1^{t_1+1} + x_1^{t_1}}{2}, \frac{x_2^{t_2+1} - x_2^{t_2}}{2} \lambda_{k_2} + \frac{x_2^{t_2+1} + x_2^{t_2}}{2}, \lambda_1 \right).
 \end{aligned}$$

Здесь используются следующие обозначения: $D_{ki} = \frac{dC^i(\lambda_k)}{dx}$, w_k – весовые коэффициенты для квадратурных формул, используемых при численном интегрировании, см. подробнее [13]. Вторая часть системы, формируемая при дискретизации (14), имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{l_3=1}^{M_3} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \sum_{i_3=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 l_3 i_1 i_2 i_3} \left\{ (\delta_{k1} + \delta_{k2} + \delta_{k3}) \left(-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2} S_3^{l_3}} e_{1k1} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1}) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_3^{l_3}} e_{2k1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_2^{l_2}} e_{3k1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} D_{i_3 p_3} - \frac{1}{S_3^{l_3}} \\
 & \cdot e_{1k2} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_2^{l_2}} e_{1k3} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{p_3} D_{p_3 i_3} - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1} S_3^{l_3}} e_{2k2} \sum_{k_2=1}^{N+1} (w_{k_2} D_{k_2 p_2} \cdot \\
 & \cdot D_{k_2 i_2}) w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_1^{l_1}} e_{2k3} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} w_{p_3} D_{p_3 i_3} - \frac{1}{S_1^{l_1}} e_{3k2} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} w_{i_3} D_{i_3 p_3} - \\
 & \left. -\frac{S_3^{l_3}}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} e_{3k3} \sum_{k_3=1}^{N+1} (w_{k_3} D_{k_3 p_3} D_{k_3 i_3}) \cdot w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} \right) + \delta_{k_4} \left(-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2} S_3^{l_3}} e_{11} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1}) \cdot \right. \\
 & \left. \cdot w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} + \frac{1}{S_3^{l_3}} e_{21} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} + \frac{1}{S_2^{l_2}} e_{31} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{i_3} D_{i_3 p_3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{S_3^{l_3}} \epsilon_{12} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} + \frac{1}{S_2^{l_2}} \epsilon_{13} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} w_{p_3} D_{p_3 i_3} + \\
 & + \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1} S_3^{l_3}} \epsilon_{22} \sum_{k_2=1}^{N+1} (w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2}) \cdot w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_3} \delta_{p_3 i_3} + \frac{1}{S_1^{l_1}} \epsilon_{23} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} w_{p_3} D_{p_3 i_3} + \\
 & \left. + \frac{1}{S_1^{l_1}} \epsilon_{32} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} w_{i_3} D_{i_3 p_3} + \frac{S_3^{l_3}}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} \epsilon_{33} \sum_{k_3=1}^{N+1} (w_{k_3} D_{k_3 p_3} D_{k_3 i_3}) \cdot w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

При моделировании пьезоэлектрического сенсора к вектору неизвестных добавляется значение потенциала θ на верхней границе S^+ , которое отыскивается из условий равенства нулю электрического заряда (8). В результате в системе (17) добавляется новая строка, коэффициенты которой имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{l_3=1}^{M_3} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \sum_{i_3=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 l_3 i_1 i_2 i_3} \left\{ \left(\frac{1}{S_2^{l_2}} \epsilon_{3k1} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 i_1}) \cdot w_{i_2} \delta_{i_3 N+1} \delta_{l_3 M_3} + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{S_1^{l_1}} \epsilon_{3k2} \sum_{k_2=1}^{N+1} (w_{k_2} D_{k_2 i_2}) \cdot w_{i_1} \delta_{i_3 N+1} \delta_{l_3 M_3} + \left. \frac{S_3^{l_3}}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} \epsilon_{3k3} w_{i_1} w_{i_2} D_{N+1, i_3} \delta_{l_3 M_3} \right) \cdot (\delta_{k_1} + \delta_{k_2} + \delta_{k_3}) + \\
 & + \delta_{k_4} \left(- \frac{1}{S_2^{l_2}} \epsilon_{31} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 i_1}) \cdot w_{i_2} \delta_{i_3 N+1} \delta_{l_3 M_3} - \frac{1}{S_1^{l_1}} \epsilon_{32} \sum_{k_2=1}^{N+1} (w_{k_2} D_{k_2 i_2}) \cdot w_{i_1} \delta_{i_3 N+1} \delta_{l_3 M_3} - \right. \\
 & \left. - \frac{S_3^{l_3}}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} \epsilon_{33} w_{i_1} w_{i_2} D_{N+1, i_3} \delta_{l_3 M_3} \right) \left. \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Требование выполнения граничных условий (6) – (8), связанных с электрическим потенциалом ϕ , обуславливает то, что все строки, относящиеся к узловым точкам на электродированных поверхностях преобразователя заполняются нулями, за исключением диагональных элементов, равных единице. В правой части системы (17) в строках, соответствующих узловым точкам в силу условия (7), расположены значения V^+ . Собственные частоты колебаний f_n пьезоэлектрического преобразователя могут быть определены как нули определителя правой части системы (17):

$$\det(A(f_n)) = 0. \tag{18}$$

2. Численный анализ

Для численного анализа и верификации модели, реализованной на языке программирования Fortran, были проведены расчеты динамического поведения пьезоэлектрического преобразователя, работающего как актуатор и как сенсор, в том числе при наличии загнутого электрода. Во всех случаях рассматривается пьезоэлектрический преобразователь, размером $30 \times 10 \times 1$ мм, на верхний электрод которого (в случае актуатора) подавалось напряжение $V^+ = 50$ В.

В упрощенных моделях действие актуатора заменяется некоторой нагрузкой, приложенной к поверхности волновода. Так, в монографии [5, формула 252 на с. 293] для аппроксимации распределения напряжений при действии прямоугольного пьезоэлектрического преобразователя, используется гиперболический синус. Так как данная модель рассматривается с точки зрения разработки трехмерной гибридной модели, описывающей контакт преобразователя с волноводом, то в будущем на S_{load} будет производиться «сшивка» МСЭ с МГИУ. По этой причине нагрузка на нижней поверхности актуатора $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ по умолчанию предполагается заданной в следующем виде:

$$q_1(x_1, x_2, 0) = \beta sh(\Gamma(w/2 - x_1)), q_2(x_1, x_2, 0) = \beta sh(\Gamma(e/2 - x_2)), q_3(x_1, x_2, 0) = 0. \tag{19}$$

Коэффициент Γ зависит от размеров преобразователя и свойств его материала. В расчетах использовались $\beta = 1$ Па, материал PIC 255 производства PI Ceramics и $\Gamma = 528,74 \text{ м}^{-1}$.

2.1. Верификация модели

На рис. 2 приведены перемещения u_1, u_2, u_3 , напряжения σ_{13} и электрические смещения D_3 на нижней грани пьезоактуатора на частоте $f = 100$ кГц, рассчитанные при помощи разработанной математической модели и конечноэлементного пакета COMSOL. Для расчетов в МСЭ использовались интерполяционные полиномы степени $N = 6$ и 12 элементов ($M_1 = 6, M_2 = 2, M_3 = 1$), всего 3367 узловых точек. В конечноэлементном пакете Comsol использовалось 2025 элементов и полиномы четвертой степени (Quartic Lagrange discretization) модуля механики сплошной среды и полиномы второго порядка (Quadratic) модуля электростатики с граничными условиями, соответствующими условиям (5) – (9). Анализируя рис. 2, можно заключить, что волновые поля, рассчитанные обеими моделями, совпадают как качественно, так и количественно.

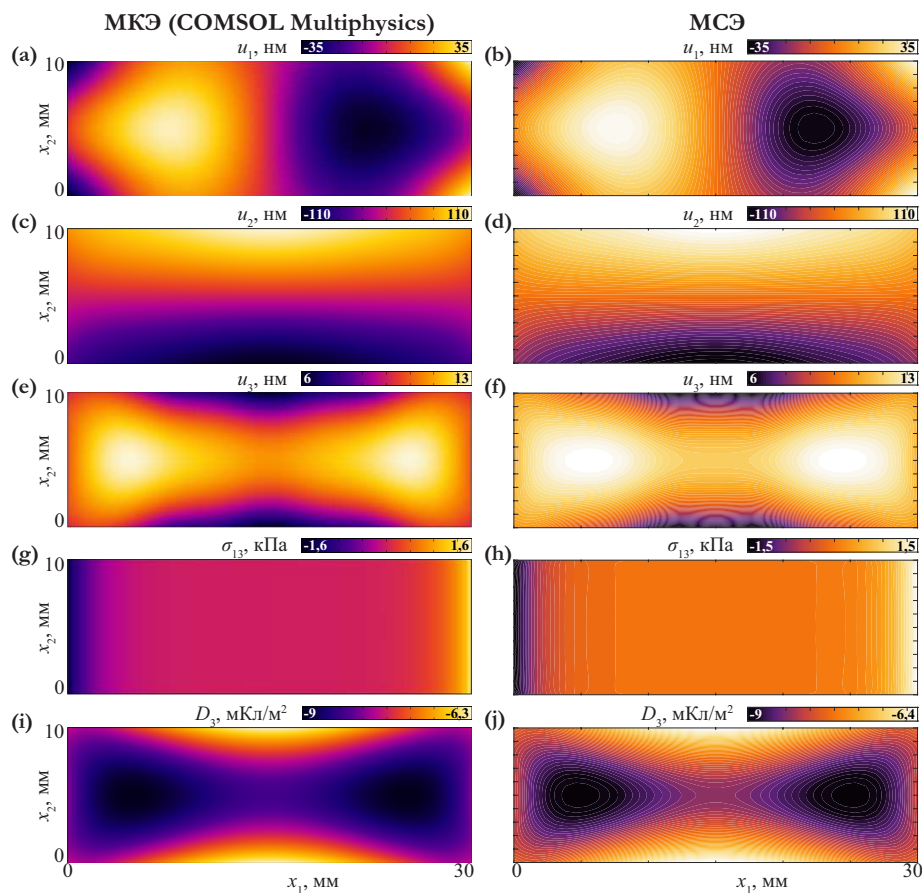


Рис. 2. Сравнение МСЭ и МКЭ для актуатора с незагнутым электродом; $x_3 = 0$ мм, $f = 100$ кГц

Результаты расчетов для преобразователя с загнутым электродом на частоте 100 кГц представлены на рис. 3: наблюдается хорошее совпадение с МКЭ. При этом в МСЭ использовалось 48 ($M_1 = 12, M_2 = 4, M_3 = 1$) элементов при степени полиномов $N = 4$, всего 4165 узловых точек. В пакете Comsol – 14217 элементов с полиномами четвертого порядка (Quartic Lagrange discretization). Поскольку у используемых ак-

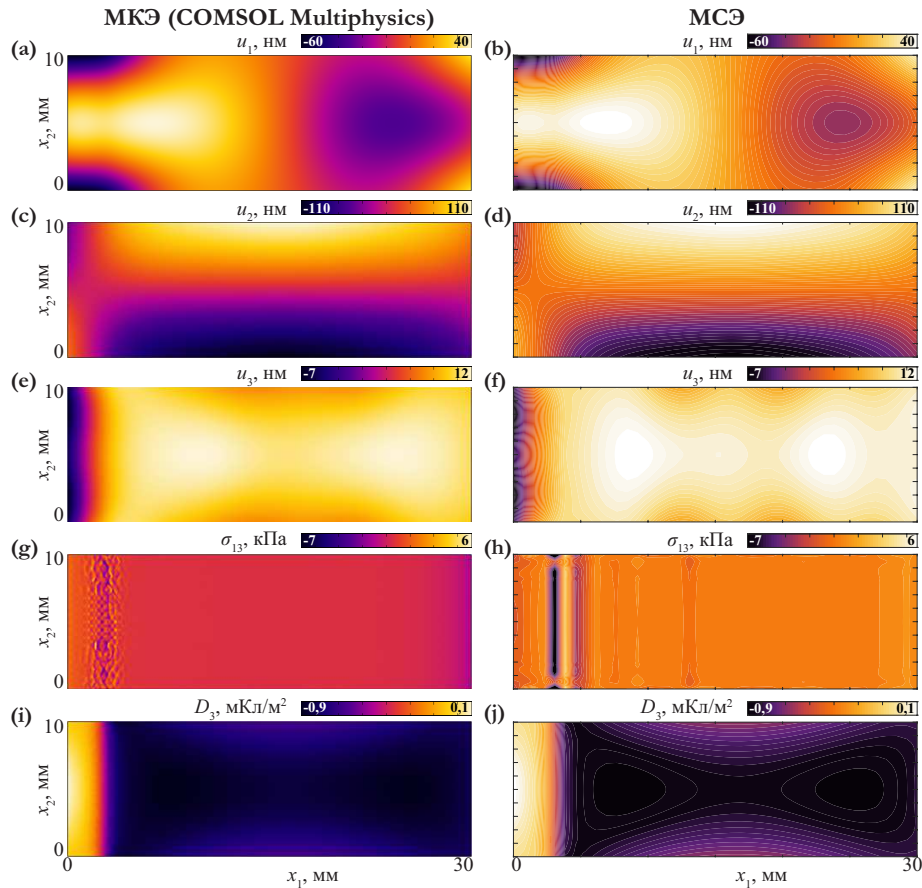


Рис. 3. Сравнение МСЭ и МКЭ для актуатора с загнутым электродом; $x_3 = 0$ мм, $f = 100$ кГц

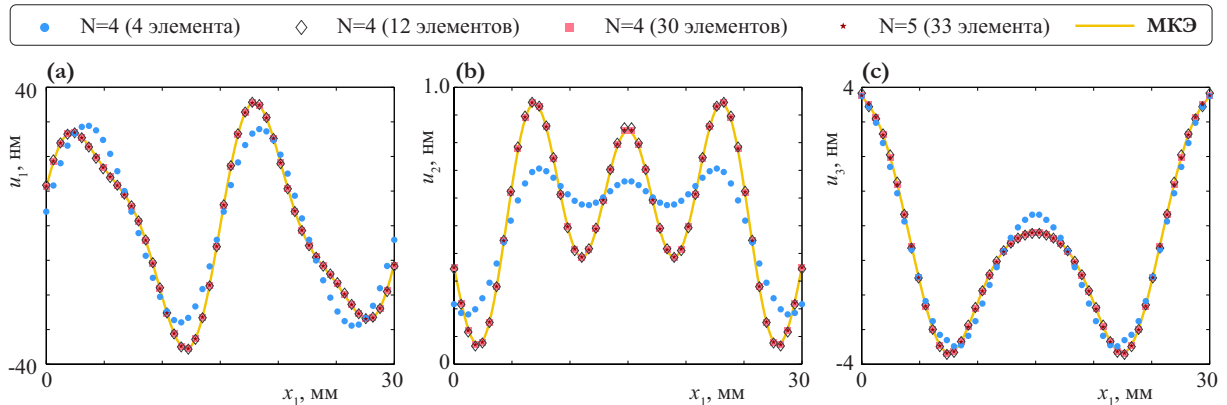


Рис. 4. Перемещения $u_k(x_1, 2, 5, 0, 25)$ мм, рассчитанные с помощью МКЭ и МСЭ на частоте $f = 200$ кГц

туаторов неэлектродированная полоса на верхней поверхности очень узкая, то необходимо так разбивать область на элементы, чтобы в эту полосу попала как минимум одна узловая точка. Для этого использовалось неравномерное разбиение области на элементы: их размеры уменьшались по мере приближения к краям преобразователя. При этом, сравнивая графики, представленные на рис. 2 и 3, можно заключить, что загнутый электрод оказывает существенное влияние на динамическое поведение пьезоэлектрического преобразователя.

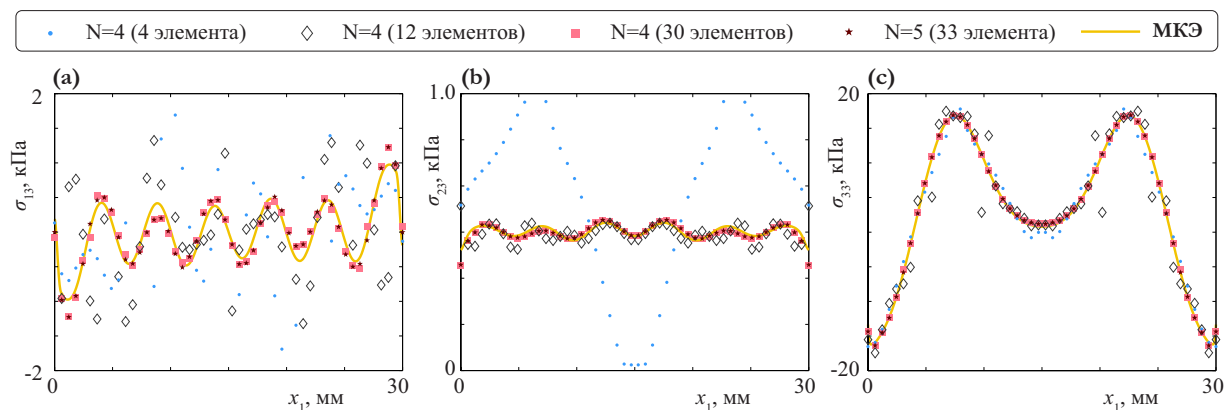


Рис. 5. Касательные и нормальные напряжения $\sigma_{k3}(x_1, 2, 5, 0, 25)$ мм, рассчитанные с помощью МКЭ и МСЭ на частоте $f = 200$ кГц

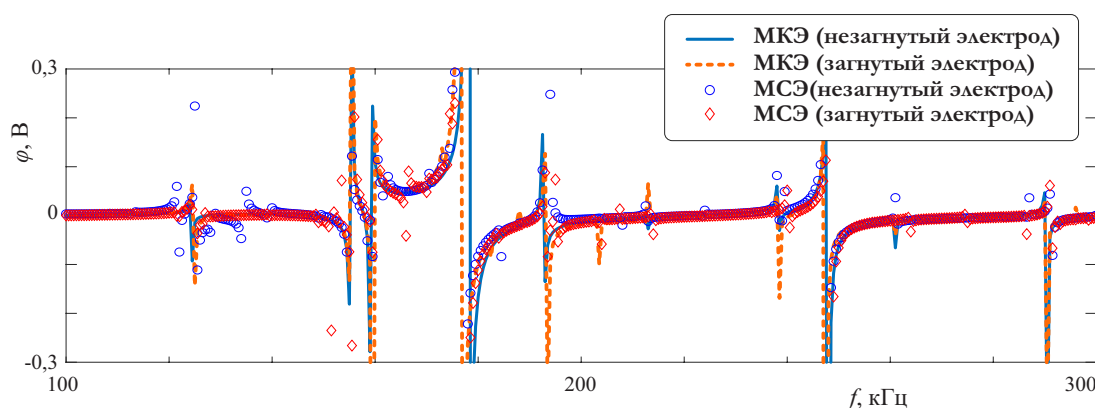


Рис. 6. Электрический потенциал $\theta(f)$, снимаемый с сенсора с загнутым и незагнутым электродом; МКЭ (сплошные линии), МСЭ (маркеры)

Был проведен анализ сходимости реализованного метода при увеличении количества узловых точек. Перемещения и напряжения, рассчитанные с помощью МСЭ и в конечноэлементном пакете Comsol, вдоль линии $0 \leq x_1 \leq w$, $x_2 = 2,5$ мм, $x_3 = 0,25$ мм представлены на рис. 4, 5 для разного количества узловых точек на частоте $f = 200$ кГц. Как и можно было ожидать, решение в перемещениях сходится значительно быстрее, чем в напряжениях. На частоте $f = 200$ кГц достаточно уже 12 элементов со степенью полиномов $N = 4$ (1125 узловых точек) для достаточно хорошего совпадения с МКЭ и результатами, получаемыми с помощью МСЭ при большем количестве элементов. При этом в напряжениях на той же частоте примерно такой же результат достигается лишь при использовании 30 элементов со степенью полиномов $N = 4$ (2665 узловых точек). Сравнение решения с расчетам в среде Comsol позволяет заключить, что перемещения, рассчитанные двумя методами, сходятся к одним и тем же значениям, причем довольно быстро. В то же время сходимость в напряжениях для МСЭ медленнее и результаты немного отличаются от аналогичных расчетов, выполненных в Comsol. Анализ сходимости позволяет заключить, что разработанная математическая модель позволяет получить устойчивое решение в перемещениях и напряжениях.

Для верификации компьютерной реализации МСЭ в случае использования пьезоэлектрического преобразователя как сенсора, было рассчитано значение электрического потенциала θ , снимаемого с верхнего электрода преобразователя при действии

механической нагрузки, в зависимости от частоты. На рис. 6 представлены графики потенциала, рассчитанного для сенсора двумя методами, в диапазоне частот от 100 до 300 кГц для разных вариантов электродирования. Экстремумы на графике, как правило, соответствуют собственным частотам, на которых чувствительность преобразователя возрастает. Как видно из этого графика, наличие загнутого электрода практически не оказывает влияния на измеряемый сенсором потенциал. По представленным графикам можно сделать вывод, что разработанная трехмерная модель на основе МСЭ адекватно описывает динамическое поведение пьезоэлектрического преобразователя, работающего в режиме как актуатора, так и сенсора, в том числе с разной электродированностью.

2.2. Собственные частоты колебаний

Собственные частоты могут значительно сдвигаться при наличии повреждений в пьезоэлектрическом преобразователе или при его отклейке от поверхности подложки. Ввиду этого разрабатываемая математическая модель должна позволять проводить анализ резонансных свойства исследуемых структур. Поскольку в данной статье рассматривается пьезоэлектрическое тело конечных размеров и количество резонансных частот значительно, то здесь приводятся резонансные частоты в диапазоне 100 – 130 кГц, см. таблицу. В рамках разработанной модели резонансные частоты для обоих случаев рассчитывались как нули характеристического уравнения (18) при разбиении на 18 элементов и степени интерполяционных полинов $N = 6$. Для расчета собственных частот в конечноэлементном коммерческом пакете Comsol использовалось разбиение на 2025 элементов для преобразователя без загнутого электрода и 14217 элементов в случае загнутого электрода.

Таблица

Собственные частоты прямоугольных пьезоэлектрических преобразователей размером $30 \times 10 \times 1$ мм с загнутым и незагнутым нижним электродом рассчитанные с помощью МКЭ и МСЭ

МКЭ		МСЭ	
загнутый	незагнутый	загнутый	незагнутый
98,53	98,66	100,32	100,41
106,78	106,82	105,10	105,19
109,39	109,46	108,09	108,12
109,87	109,86	109,95	109,90
112,47	112,45	112,58	112,56
114,33	114,47	116,06	116,17
115,84	115,88	119,75	119,75
115,84	115,88	119,75	119,75
121,55	121,55	121,82	121,81
124,18	124,14	124,4	124,352
124,39	124,29	125,10	124,46
126,72	126,80	128,22	128,25
127,37	127,53	129,73	129,84

Как видно из таблицы, МСЭ и МКЭ позволяют получить одинаковое количество собственных частот в рассматриваемом диапазоне. Следует заметить, что значения собственных частот, полученные двумя методами, немного отличаются, причем при изменении условий электродированности частоты немного сдвигаются в большую или

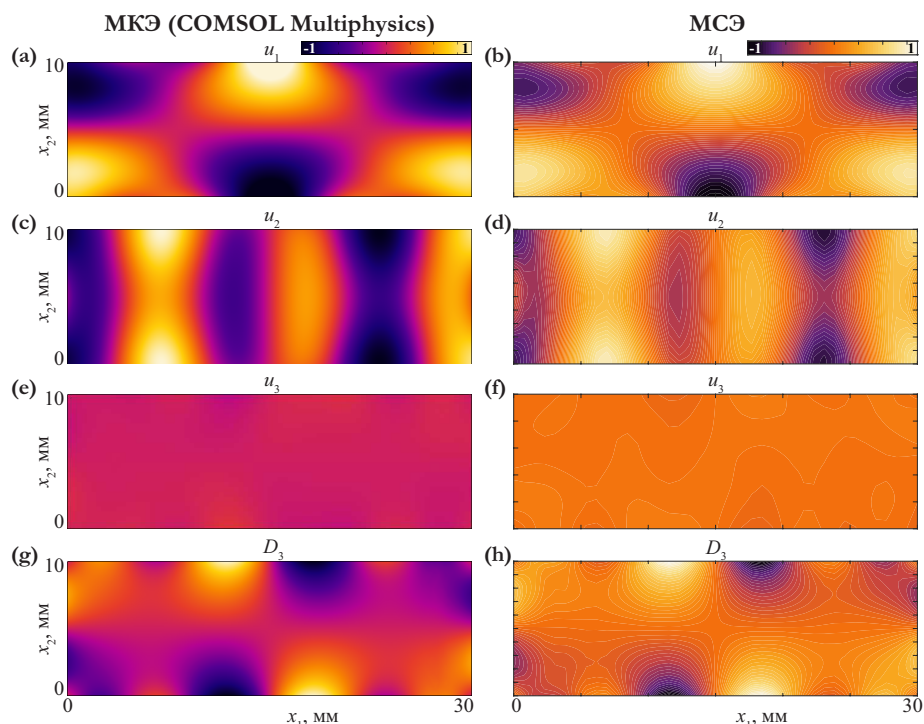


Рис. 7. Собственные формы для $f \approx 109,86$ кГц (МКЭ) и $f \approx 109,90$ кГц (МСЭ)

меньшую сторону, но сдвиг практически одинаков для обоих методов. Для корректного сравнения результатов был проведен анализ собственных форм колебаний, который показал хорошее совпадение собственных форм для МСЭ и МКЭ, что позволяет сделать вывод о достоверности вычислений, выполненных на основе разработанной модели. Так как наличие загнутого электрода имеет незначительное влияние на резонансные частоты, то в качестве иллюстрации сравнения на рис. 7 представлены собственные формы колебаний только для актуатора с незагнутым электродом, рассчитанные на резонансной частоте $f \approx 109,86$ кГц для МКЭ и $f \approx 109,90$ кГц для МСЭ (соответствующая строка в таблице выделена цветом). На рис. 7 приведены графики компонент вектора перемещений $\mathbf{u}_i(x_1, x_2, x_3 = 0)$, вертикальных электрических смещений $D_3(x_1, x_2, x_3 = 0)$ на нижней границе пьезоэлектрического преобразователя, при этом для нормировки использовались значения $\max(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2})$ и $\max |D_3|$ соответственно.

Заключение

В статье представлена математическая модель для описания динамического поведения пьезоэлектрического преобразователя с загнутым электродом в трехмерном случае. Рассмотрены граничные условия для описания колебаний пьезоэлектрического преобразователя как актуатора и как сенсора при механическом и электрическом воздействии. Показана необходимость учитывать особенности электродирования пьезоэлектрических преобразователей. Разработанная модель успешно верифицирована путем сравнения результатов моделирования с помощью МСЭ с расчетами в коммерческом конечноэлементном пакете Comsol. Предлагаемая модель будет в дальнейшем использоваться при разработке трехмерной гибридной математической модели для описания распространения бегущих упругих волн, возбуждаемых пьезоэлектрическим преобразователем в протяженных композитных структурах.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № FZEN-2020-0017.

Литература

1. Rose, J.L. *Ultrasonic Guided Waves in Solid Media* / J.L. Rose. – Cambridge, Cambridge University Press, 2014.
2. Бурков, М.В. Диагностика ударных повреждений монолитных и сотовых углепластиков с помощью ультразвуковых волн Лэмба / М.В. Бурков, А.В. Еремин, А.В. Бяков, П.С. Любутин, С.В. Панин // Дефектоскопия. – 2021. – № 2. – С. 33–43.
3. Юрлова, Н.А. Моделирование деформирования пластины с помощью расположенных на ее поверхности пьезоэлементов / Н.А. Юрлова, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, И.Е. Ковалев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 415–426.
4. Moll, J. Multi-Site Damage Localization in Anisotropic Plate-Like Structures Using an Active Guided Wave Structural Health Monitoring System / J. Moll, R.T. Schulte, B. Hartmann, C.-P. Fritzen, O. Nelles // Smart Materials and Structures. – 2010. – V. 19, № 4. – Article ID: 045022.
5. Giurgiutiu, V. *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors* / Giurgiutiu V. – Elsevier Academic Press, 2014.
6. Глушков, Е.В. Резонансный метод обнаружения и идентификации расслоений в композитных пластинах ультразвуковыми бегущими волнами / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, М.В. Голуб, А.А. Еремин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 125–133.
7. Mitra, M. Guided Wave Based Structural Health Monitoring: a Review / M. Mitra, S. Gopalakrishnan // Smart Materials and Structures. – 2016. – V. 25, № 5. – Article ID: 053001.
8. Golub, M.V. Semi-Analytical Hybrid Approach for the Simulation of Layered Waveguide with a Partially Debonded Piezoelectric Structure / M.V. Golub, A.N. Shpak // Applied Mathematical Modelling. – 2019. – № 65. – P. 234–255.
9. Linlin Shia. Spectral Element Method for Elastic and Acoustic Waves in Frequency Domain / Linlin Shia, Yuanguo Zhoua, Jia-Min Wang, Mingwei Zhuanga, Na Liua, Qing Huo Liu // Journal of Computational Physics. – 2016. – № 327. – P. 19–38.
10. Glushkov, E.V. On the Efficient Implementation of the Integral Equation Method in Elastodynamics / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova // Journal of Computational Acoustics. – 2001. – V. 9, № 3. – P. 889–897.
11. Desilets, C.S. Effect of Wraparound Electrodes on Ultrasonic Array Performance / C.S. Desilets, D.J. Powell, N. Abboud, G.L. Wojcik // IEEE Ultrasonics Symposium. – 1998. – № 2. – P. 993–997.
12. Moll, J. Non-Axisymmetric Lamb Wave Excitation by Piezoelectric Wafer Active Sensors / J. Moll, M. Golub, E. Glushkov, N. Glushkova, C.-P. Fritzen // Sensors and Actuators: Physical. – 2012. – № 174. – P. 113–121.
13. Голуб, М.В. Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности / М.В. Голуб, А.Н. Шпак, И. Бюте, К.-П. Фритцен // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – № 4. – С. 397–407.

Алиса Николаевна Шпак, кандидат физико-математических наук, лаборатория волновой диагностики, Кубанский государственный университет (г. Краснодар, Российская Федерация), alisashpak7@gmail.com.

Софья Андреевна Сиухина, аспирант, кафедра теории функций, Кубанский государственный университет (г. Краснодар, Российская Федерация), glinkvasfja@gmail.com.

Михаил Владимирович Голуб, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра теории функций, Кубанский государственный университет (г. Краснодар, Российская Федерация), m_golub@inbox.ru.

Received November 24, 2021

MSC 74H15, 74H45, 74J20, 35Q74

DOI: 10.14529/mmp220307

SIMULATION OF THE VIBRATIONS OF A PIEZOELECTRIC TRANSDUCER WITH A WRAPPED ELECTRODE USING THE SPECTRAL ELEMENT METHOD

A.N. Shpak¹, S.A. Siuhina¹, M.V. Golub¹

¹Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

E-mail: alisashpak7@gmail.com, glinkvasfja@gmail.com, m_golub@inbox.ru

The paper presents an approach to the modelling of the dynamic behavior of a piezoelectric transducer of a complex shape in a three-dimensional case based on the spectral element method. The proposed mathematical model will be a part of the hybrid approach to the modelling of the guided waves excitation and sensing in an elongated structure in a three-dimensional case. Different types of electrodes of piezoelectric transducers as well as various boundary value conditions for the modelling of the actuation and sensing operations are considered. Unknown displacements are approximated with Lagrange polynomials at the Gauss-Legendre-Lobatto nodal points and the system of linear algebraic equations is obtained in terms of the displacement vector and electric potential at the nodal points. The results are compared with the standard finite element calculations provided with the finite-element COMSOL Multiphysics software. The electro-mechanical characteristics of the dynamic behaviour of piezoelectric transducers are analysed depending on the operational conditions and the kind of electrodes. The eigenfrequencies of the piezoelectric transducers are calculated and the corresponding eigenforms are constructed and analysed.

Keywords: elastic waves; piezoelectric transducer; wrapped electrode; spectral element method; simulation.

References

1. Rose J.L. *Ultrasonic Guided Waves in Solid Media*. Cambridge, Cambridge University Press, 2014.
2. Burkov M.V., Eremin A.V., Byakov A.V., Lyubutin P.S., Panin S.V. [Impact Damage Detection in Laminate and Honeycomb CFRPS Using Lamb Wave Ultrasonic Sensing]. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2021, no. 2, pp. 33–43. (in Russian)
3. Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Kovalev I.E. [Modelling the Deformation of a Plate Using Piezoelectric Elements Located on its Surface]. *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 4, pp. 415–426. (in Russian) DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.4.35
4. Moll J., Schulte R.T., Hartmann B., Fritzen C.-P., Nelles O. Multi-Site Damage Localization in Anisotropic Plate-Like Structures Using an Active Guided Wave Structural Health Monitoring System. *Smart Materials and Structures*, 2010, vol. 19, no. 4, article ID: 045022. DOI: 10.1088/0964-1726/19/4/045022

5. Giurgiutiu V. *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Elsevier Academic Press, 2014. DOI: 10.1016/B978-0-12-418691-0.00007-1
6. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Golub M.V., Eremin A.A. Resonant Method for Detection and Identification of Delamination in Composite Plates by Elastic Guided Waves. *Mechanics of Solids*, 2020, no. 6, pp. 865–871. (in Russian) DOI: 10.3103/S0025654420050076
7. Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided Wave Based Structural Health Monitoring: a Review. *Smart Materials and Structures*, 2016, vol. 25, no. 5, article ID: 053001. DOI: 10.1088/0964-1726/25/5/053001
8. Golub M.V., Shpak A.N. Semi-Analytical Hybrid Approach for the Simulation of Layered Waveguide with a Partially Debonded Piezoelectric Structure. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, no. 65, pp. 234–255. DOI: 10.1016/j.apm.2018.08.019
9. Linlin Shia, Yuanguo Zhoua, Jia-Min Wang, Mingwei Zhuanga, Na Liua, Qing Huo Liu. Spectral Element Method for Elastic and Acoustic Waves in Frequency Domain. *Journal of Computational Physics*, 2016, no. 327, pp. 19–38. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.09.036
10. Glushkov E.V., Glushkova N.V. On the Efficient Implementation of the Integral Equation Method in Elastodynamics. *Journal of Computational Acoustics*, 2001, vol. 9, no. 3, pp. 889–897. DOI: 10.1142/S0218396X01001169
11. Desilets C.S., Powell D.J., Abboud N., Wojcik G.L. Effect of Wraparound Electrodes on Ultrasonic Array Performance. *IEEE Ultrasonics Symposium*, 1998, no. 2, pp. 993–997.
12. Moll J., Golub M., Glushkov E., Glushkova N., Fritzen C.-P. Non-Axisymmetric Lamb Wave Excitation by Piezoelectric Wafer Active Sensors. *Sensors and Actuators: Physical*, 2012, no. 174, pp. 113–121. DOI: 10.1016/j.sna.2011.11.008
13. Golub M.V., Shpak A.N., Buethel I., Fritzen C.-P. [Harmonic Motion Simulation and Resonance Frequency Determination for a Piezoelectric Strip-Like Actuator Using High Precision Finite Element Method]. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, no. 4, pp. 397–407. (in Russian) DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.34

Поступила в редакцию 24 ноября 2021 г.