УДК 681.5.015 DOI: 10.14529/mmp230110

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В ЗАДАЧЕ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В.Л. Хацкевич[1]***, О.А. Махинова***[1]
[1]Военно-Воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация

Рассматривается динамическая система, описываемая линейным дифференциальным уравнением высокого порядка с постоянными коэффициентами. Методом функций Грина установлена зависимость между числовыми характеристиками случайного сигнала на входе и выходе динамической системы, а именно между математическими ожиданиями и между корреляционными функциями. В отличие от известных результатов, не предполагается стационарность входного и выходного случайных сигналов.

Ключевые слова: непрерывные случайные процессы; математические ожидания; корреляционные функции; динамические системы со случайными функциями.

Введение

Случайные процессы описывают случайные явления в динамике их развития. Они широко используются в различных прикладных задачах, в частности, в теории автоматического регулирования, при обработке и передаче сигналов радиотехнических устройств, в экономике, в теории массового обслуживания [1]. Различные аспекты этой тематики представлены в недавних работах [2–4].

В данной работе рассматриваются непрерывные случайные процессы с непрерывным временем. В ней установлена связь между числовыми характеристиками случайного процесса на входе и выходе динамической системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами n-го порядка. А именно, в работе получены формулы, выражающие зависимость между математическими ожиданиями входного и выходного случайных сигналов, а также между соответствующими корреляционными функциями.

Результаты данной статьи опираются на развитие метода функции Грина на случай дифференциальных уравнений со случайными функциями. Предлагаемый подход является альтернативой стандартному подходу в классической задаче о преобразовании стационарного случайного сигнала линейной динамической системой с постоянными коэффициентами [1, гл. 8], который предполагает стационарность (в какомлибо смысле) рассматриваемых случайных процессов.

Математическое ожидание решения линейной системы дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами без предположения о стационарности изучено в работе [4] с использованием вариационных производных. В отличие от [4] в настоящей работе рассмотрены не только математические ожидания, но и корреляционные функции.

Приведем определения и известные свойства математических ожиданий и корреляционных функций случайных процессов [6, гл. V]. Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство некоторого стохастического эксперимента, где Ω – множество элементарных событий, Σ – сигма-алгебра борелевских подмножеств из Ω, P – вероятностная мера. Пусть $[t_0, T]$ – отрезок расширенной числовой прямой.

Случайным процессом (с.п.) называют семейство случайных величин $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ при $\omega \in \Omega$ на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P), зависящее от параметра $t \in [t_0, T]$. При этом параметр t интерпретируется как время.

Обозначим через $L^2 = L^2(\Omega, \Sigma, P)$ – гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом $M\xi^2 < \infty$, где символ M обозначает математическое ожидание. Скалярное произведение для случайных величин $\xi, \eta \in L^2$ определяют формулой $(\xi, \eta) = M\xi\eta$. Ниже будем предполагать, что случайный процесс $\xi(t) \in L^2$ при всех $t \in [t_0, T]$.

Математическим ожиданием с.п. $\xi(t)$ называют неслучайную функцию $m_\xi(t) = M\xi(t)$, которая при каждом фиксированном $t \in [t_0, T]$ равна математическому ожиданию $\xi(t)$. Корреляционная функция с.п. $\xi(t)$ определяется формулой $K_\xi(t,s) = M[(\xi(t) - M\xi(t))(\xi(s) - M\xi(s))]$.

Утверждение 1. *Математическое ожидание от производной дифференцируемого случайного процесса $\xi(t)$, производная которого $\xi'(t)$ интегрируема, совпадает с производной от математического ожидания:* $M(\xi'(t)) = \frac{d}{dt}M(\xi(t))$.

Утверждение 2. *Пусть $\xi(t)$ – интегрируемый на $[t_0, T]$ случайный процесс. Тогда* $M(\int\limits_{t_0}^{T} \xi(\tau)d\tau) = \int\limits_{t_0}^{T} M(\xi(\tau))d\tau$.

1. Метод функций Грина

Устройство называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются случайные сигналы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве L^2 случайных величин с конечным вторым моментом

$$\begin{aligned} &a_n\eta^{(n)}(t) + a_{n-1}\eta^{(n-1)}(t) + ... + a_1\eta'(t) + a_0\eta(t) = \\ &= b_m\xi^{(m)}(t) + b_{m-1}\xi^{(n-1)}(t) + ... + b_1\xi'(t) + b_0\xi(t) \equiv h(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь коэффициенты a_i $(i = 0, ..., n)$ и b_i $(i = 0, ..., m)$ – постоянные числа.

Приведем некоторые вспомогательные сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывной ограниченной на всей числовой оси функцией $f(t)$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_1 x' + a_0 x = f(t). \tag{2}$$

Функцию $G(t)$ называют функцией Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2), если она удовлетворяет следующим условиям [6, гл. 2, §2]:

1) $G(t)$ непрерывно дифференцируема $(n-2)$ раза при всех t, а $(n-1)$-я и n-я производные непрерывно дифференцируемы при всех t за исключением $t = 0$, причем $G^{(n-1)}(+0) - G^{(n-1)}(-0) = 1$;

2) во всех точках, кроме $t = 0$, функция $G(t)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (2) (при $f(t) \equiv 0$);

3) функция Грина и ее производные подчинены оценке $|G^{(i)}(t)| \le Me^{-\gamma|t|}$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$; $-\infty < t < +\infty$, где M и γ – некоторые положительные постоянные.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. [5, гл. 2, §8] *Пусть корни характеристического уравнения* $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$ *не содержат точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей оси функции $f(t)$ уравнение (2) имеет* *ограниченное на всей оси решение, причем единственное. Оно дается формулой* $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)ds$, *где* $G(t)$ *– функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).*

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $x' + \beta x = f(t)$ при $\beta > 0$. Его функция Грина G_1 в задаче об ограниченных решениях согласно определению имеет вид $G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$

Так что ограниченное на всей оси решение данного уравнения характеризуется формулой $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)} f(s)ds$.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t)$. Пусть, например, корни характеристического уравнения $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ вещественны и различны, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Тогда функция Грина G_2 задачи об ограниченных решениях имеет вид

$$G_2(t) = \begin{cases} \left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}\right)\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^{-1} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Так что ограниченное на всей оси решение данного уравнения определяется формулой

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)}\right) f(s)ds.$$

2. Преобразование непрерывного случайного процесса линейной динамической системой

Связь между математическими ожиданиями входного и выходного случайных сигналов динамической системы (1) характеризует следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть случайный процесс* $h(t)$ *на входе динамической системы (1) непрерывен и ограничен на всей числовой оси, а характеристическое уравнение* $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ *не имеет корней на мнимой оси. Тогда математическое ожидание* $M\eta(t)$ *случайного процесса на выходе динамической системы (1) представимо в виде*

$$M\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)Mh(s)ds, \tag{3}$$

где G *– функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).*

Доказательство. Действительно, рассмотрим математическое ожидание от левой и правой части равенства (1). Используя свойства аддитивности и однородности математических ожиданий, а также утверждение 1, получим

$$\begin{aligned} a_n(M\eta(t))^{(n)} + a_{n-1}(M\eta(t))^{(n-1)} + \ldots + a_1(M\eta(t))' + a_0 M\eta(t) = \\ = b_m(M\xi(t))^{(m)} + b_{m-1}(M\xi(t))^{(m-1)} + \ldots + b_1(M\xi(t))' + b_0(M\xi(t)) \equiv Mh(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда для скалярной функции $m_\eta(t) = M\eta(t)$ выполнено уравнение (2) при $f(t) = Mh(t)$. Так как в условиях теоремы 1 правая часть уравнения (4) – ограниченная на всей оси функция, то согласно лемме 1 функция $m_\eta(t)$ является ограниченным на всей оси решением уравнения (4) и справедлива формула (3). $\square$

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 1 на вход поступает «квазистационарный» сигнал, т.е.* $M\xi(t) = m_\xi = const$. *Тогда на выходе также будет «квазистационарный» сигнал, причем его математическое ожидание* $M\eta(t) = m_\eta = \frac{b_0}{a_0}m_\xi$.

Связь между корреляционными функциями случайных сигналов на выходе и на входе динамической системы (1) характеризует следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно вещественные части всех корней соответствующего характеристического уравнения отрицательны* ($Re\lambda_i < 0 \;\; i = 1, ..., n$). *Тогда корреляционная функция* $K_\eta(t_1, t_2)$ *случайного сигнала* $\eta(t)$ *на выходе динамической системы (1) определяется формулой*

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} G(t_1 - s_1)G(t_2 - s_2)K_h(s_1, s_2)ds_1ds_2, \tag{5}$$

где $K_h(s_1, s_2)$ *– корреляционная функция входного сигнала* $h(t) = \sum_{i=1}^n b_i\xi^{(i)}(t)$, *а* G *– функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).*

Доказательство. В условиях теоремы 2 ограниченное решение уравнения (1) имеет следующий вид $\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-s)h(s)ds$. При этом согласно теореме 1 $M\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-s)Mh(s)ds$.

Определим центрированный процесс $\overset{\circ}{\eta}(t) = \eta(t) - M\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-s)\overset{\circ}{h}(s)ds$, где $\overset{\circ}{h}(s) = h(s) - Mh(s)$. Тогда $\overset{\circ}{\eta}(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{t_1} G(t_1 - s_1)\overset{\circ}{h}(s_1)ds_1$, $\overset{\circ}{\eta}(t_2) = \int\limits_{-\infty}^{t_2} G(t_2 - s_2)\overset{\circ}{h}(s_2)ds_2$. Следовательно,

$$\overset{\circ}{\eta}(t_1)\overset{\circ}{\eta}(t_2) = \left(\int\limits_{-\infty}^{t_1} G(t_1 - s_1)\overset{\circ}{h}(s_1)ds_1\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{t_2} G(t_2 - s_2)\overset{\circ}{h}(s_2)ds_2\right) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} (G(t_1 - s_1)G(t_2 - s_2))\overset{\circ}{h}(s_1)\overset{\circ}{h}(s_2)ds_1ds_2.$$

Поэтому

$$M\left[\overset{\circ}{\eta}(t_1), \overset{\circ}{\eta}(t_2)\right] = M\left[\int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} (G(t_1 - s_1)G(t_2 - s_2))\overset{\circ}{h}(s_1)\overset{\circ}{h}(s_2)ds_1ds_2\right].$$

Меняя здесь порядок операций нахождения математического ожидания и интегрирования (на основании утверждения 2), получим

$$K_\eta(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} M\left[(G(t_1-s_1)G(t_2-s_2))\overset{\circ}{h}(s_1)\overset{\circ}{h}(s_2)\right] ds_1 ds_2.$$

Вынося за знак математического ожидания под интегралом неслучайную функцию $G(t_1-s_1)G(t_2-s_2)$, получим требуемую формулу (5). $\square$

Случайный процесс называют стационарным в широком смысле, если он имеет постоянное математическое ожидание, а его корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Взаимосвязь между корреляционными функциями входного и выходного случайных процессов динамической системы (1) при дополнительном предположении о стационарности в широком смысле определяется широко известным алгоритмом [1, гл. 8], опирающимся на теорему Винера – Хинчина. Подчеркнем, что результат теоремы 2 не предполагает стационарности входного либо выходного случайных сигналов динамической системы (1).

Пример 3. На вход интегрирующей RC-цепочки, описываемой дифференциальным уравнением $\eta'(t)+\beta\eta(t)=\beta\xi(t)$, $\beta=\frac{1}{RC}>0$, (где R – сопротивление, C – емкость), поступает непрерывный случайный ограниченный на всей оси сигнал $\xi(t)$. Тогда математическое ожидание и корреляционная функция сигнала $\eta(t)$ на выходе, согласно теоремам 1, 2 и примеру 1, имеют вид: $M\eta(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}M\xi(s)ds$, $K_\eta(t_1,t_2)=\beta^2 e^{-\beta(t_1+t_2)}\int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} e^{\beta(\tau_1+\tau_2)}K_\xi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$.

Пример 4. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением $\eta''(t)+4\eta'(t)+3\eta(t)=\xi(t)$, поступает непрерывный случайный ограниченный на всей оси сигнал $\xi(t)$. Укажем характеристики выходного случайного сигнала $\eta(t)$.

Заметим, что корни соответствующего характеристического уравнения $\lambda^2+4\lambda+3=0$ имеют вид $\lambda_1=-3,\lambda_2=-1$. Тогда в соответствии с теоремами 1, 2 и примером 2: $M\eta(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} G_2(t-s)M\xi(s)ds$, $K_\eta(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} G_2(t_1-\tau_1)G_2(t_2-\tau_2)K_\xi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$.

Здесь G_2 – функция Грина, определенная в примере 2.

Заключение

В данной работе продемонстрировано применение методики функций Грина к решению задачи о преобразовании случайных сигналов линейной динамической системой. Предлагаемый подход позволил получить в рассматриваемой предметной области новые результаты, отказавшись от общепринятого ограничительного условия – стационарности рассматриваемых случайных процессов. Результаты представленной работы дают возможность расширить область практических приложений.

Подчеркнем, что основная техническая трудность предлагаемой методики состоит в построении явного вида функций Грина для конкретных ситуаций. Отметим, что важные результаты по методу функций Грина в задаче об ограниченных решениях для дифференциальных уравнений n-го порядка получил А.И. Перов [6].

Литература

1. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и их инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Кнорус, 2016.
2. Лихтциндер, Б.Я. Об оценках средней длины очереди для одноканальных систем массового обслуживания через статистические безусловные моменты второго порядка модифицированого входного потока / Б.Я. Лихтциндер, И.А. Блатов, Е.В. Китаева // Автоматика и телемеханика. – № 1. – 2022. – С. 113–129.
3. Шайкин, М.Е. Анализ динамического регулятора по выходному сигналу для стохастических систем мультипликативного типа / М.Е. Шайкин // Автоматика и телемеханика. – № 3. – 2022. – С. 54–68.
4. Задорожний, В.Г. Математическое ожидание решения линейной системы дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами / В.Г. Задорожний // Теория вероятности и ее применение. – 2021. – Т. 66, № 2. – С. 284–304.
5. Красносельский, М.А. Нелинейные почти периодические колебания / М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов. – М.: Наука, 1970.
6. Перов, А.И. Ограниченные решения векторно-операторных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешенных относительно старшей производной / А.И. Перов, Е.В. Иванова // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2012. – № 2. – С. 198–206.

Владимир Львович Хацкевич, доктор технических наук, профессор, кафедра математики, Военно-Воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина (г. Воронеж, Российская Федерация), vlkhats@mail.ru.

Ольга Алексеевна Махинова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, Военно-Воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина (г. Воронеж, Российская Федерация), olga.maxinova@list.ru.

Поступила в редакцию 18 мая 2022 г.

MSC 93E99 **DOI: 10.14529/mmp230110**

THE GREEN FUNCTION METHOD IN THE PROBLEM OF RANDOM SIGNAL TRANSFORMATION BY A LINEAR DYNAMIC SYSTEM

V.L. Khatskevich[1]***, O.A. Makhinova***[1]
[1]Air Force Academy named after N.E. Zhukovsky and Y.U. Gagarin, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vlkhats@mail.ru, olga.maxinova@list.ru

A dynamic system is considered, which is described by a high order linear differential equation with constant coefficients. The Green's function method established the relationship between the numerical characteristics of a random signal at the input and output of a dynamic system, namely between mathematical expectations and between correlation functions. In contrast to the known results, the stationarity of the input and output random signals is not assumed.

Keywords: continuous random processes; mathematical expectations; correlation functions; dynamical systems with random functions.

References

1. Ventcel E.S., Ovcharov L.A. *Teorija sluchajnyh processov i ih inzhenernye prilozheniya* [Theory of Random Processes and Their Engineering Applications], Moscow, Knorus, 2016.
2. Likhttsinder B.Y., Blatov I.A., Kitaeva E.V. On Estimates of the Mean Queue Length for Single-Channel Queuing Systems in Terms of Statistical Unconditional Second-Order Moments Of The Modified Arrival Flow. *Automation and Remote Control*, 2022, no. 1, pp. 113–129.
3. Shaykin M.E. Analysis of Dynamical Output Regulator for Stochastic Multiplicative Type Systems. *Automation and Remote Control*, 2022, no. 3, pp. 54–68. DOI: 10.31857/S0005231022030059
4. Zadorozhniy V.G. The Expectation of a Solution of a Linear System of Differential Equations with Random Coefficients. *Theory of Probability and its Applications*, 2021, vol. 66, no. 2, pp. 228–244.
5. Krasnoselskij M.A., Burd V.Sh., Kolesov Yu.S. *Nelineinye pochti periodicheskie kolebaniya* [Nonlinear Almost Periodic Oscillations]. Moscow, Nauka, 1970.
6. Perov A.I., Ivanova E.B. Bounded Solutions of Nonlinear Vector-Operator Differential Equations of the n-th Order, is not Permitted for the Highest Derivative. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 198–206.

Received May 18, 2022