УДК 531.36 DOI: 10.14529/mmp230204

# О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ВЫШЕ 2-Й СТЕПЕНИ

***В.Д. Иртегов*[1], *Т.Н. Титоренко*[1]**
[1]Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация

Исследуется семейство дифференциальных уравнений, возникшее в результате обобщения классических интегрируемых случаев динамики твердого тела. Исследуемая система допускает полиномиальные первые интегралы 4 и 6 степени. При определенных ограничениях на параметры семейства дифференциальные уравнения интерпретируются как уравнения движения твердого тела в центральном поле сил, идеальной жидкости, электрически заряженного тела. Проводится качественный анализ уравнений: находятся особые инвариантные множества различной размерности и исследуется их устойчивость по Ляпунову. Для анализа задачи используются обобщения метода Рауса – Ляпунова и программные средства компьютерной алгебры.

*Ключевые слова: твердое тело; уравнения движения; первые интегралы; инвариантные множества; устойчивость; компьютерная алгебра.*

## Введение и постановка задачи

Дифференциальные уравнения Эйлера – Пуассона, описывающие движение твердого тела с одной неподвижной точкой, и их многочисленные обобщения являются одной из удачных математических моделей, которая получила широкое применение при описании разнообразных физических явлений и процессов. Так уравнениями Эйлера для абстрактной модели бесконечномерного диссипативного волчка

$$\frac{d}{dt}A\psi + \varepsilon B\psi + [\psi, A\psi] = \varepsilon f, \tag{1}$$

где $[\psi, A\psi]$ – скобка Пуассона, может быть описано нестационарное плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости в канале с твердыми стенками [1].

Уравнение, описывающее упомянутое движение жидкости, имеет вид:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \varepsilon\Delta\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} = \varepsilon\cos y, \tag{2}$$

где $\psi(t,x,y)$ – функция тока, $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа. При граничных условиях

$$\begin{aligned}
&1)\quad 0 < x < \frac{2\pi}{\alpha},\quad 0 < y < 2\pi,\quad \alpha = \text{const} > 0,\\
&2)\quad \psi(t, x + \frac{2\pi}{\alpha}, y) = \psi(t,x,y),\\
&3)\quad \psi|_{y=0} = \frac{\partial\psi}{\partial y}|_{y=0} = \psi|_{y=2\pi} = \frac{\partial\psi}{\partial y}|_{y=2\pi} = 0
\end{aligned}$$

(3-е условие указывает на нулевой расход жидкости) уравнение (2) отождествляется с (1) при следующем соответствии между операторами:

$$A \equiv -\Delta,\quad B \equiv \Delta\Delta,\quad [\psi,\varphi] \equiv \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Модель бесконечномерного волчка используется в [1] для доказательства устойчивости плоскопараллельного течения жидкости. Наиболее полные результаты при качественном анализе уравнений Эйлера удается получить в случаях, когда они вполне интегрируемы. Тогда уравнения движения допускают достаточно много первых интегралов и фазовое пространство имеет простую структуру. В данной работе представлены некоторые результаты качественного анализа семейства дифференциальных уравнений, полученного в результате обобщения классических интегрируемых случаев динамики твердого тела [2]. Как отмечено в [3], интегрируемые системы являются редким исключением в динамике твердого тела. Известны только три случая – Эйлера, Лагранжа, Ковалевской [4], – когда задача о движении твердого тела с неподвижной точкой может быть сведена к квадратурам. Поэтому возможные обобщения классических интегрируемых случаев и их исследование продолжают вызывать интерес. Для анализа задачи применяется вычислительный подход, основанный на сочетании методов компьютерной алгебры (КА) и обобщений метода Рауса – Ляпунова [5–7]. Сочетание этих методов позволяет не только достаточно эффективно решать задачи качественного анализа дифференциальных уравнений непосредственно в исходном фазовом пространстве, но и исследовать как интегрируемые [8], так и неинтегрируемые системы [9].

Рассматривается семейство дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} = (B-C)(qr-\nu\gamma_2\gamma_3) - \mu_3 q + \mu_2 r,\\
&B\dot{q} = (C-A)(pr-\nu\gamma_3\gamma_1) - \mu_1 r + \mu_3 p,\\
&C\dot{r} = (A-B)(pq-\nu\gamma_1\gamma_2) - \mu_2 p + \mu_1 q,\\
&\dot{\gamma_1} = r\gamma_2 - q\gamma_3,\ \dot{\gamma_2} = p\gamma_3 - r\gamma_1,\ \ \dot{\gamma_3} = q\gamma_1 - p\gamma_2,
\end{aligned} \tag{3}$$

описывающее движение твердого тела с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Здесь

$$\begin{aligned}
&\mu_1 = \gamma_1\{(A-B-C)(n+n_1G) + 2n_1(AG-\bar{G})\},\\
&\mu_2 = \gamma_2\{(B-A-C)(n+n_1G) + 2n_1(BG-\bar{G})\},\\
&\mu_3 = \gamma_3\{(C-A-B)(n+n_1G) + 2n_1(CG-\bar{G})\},\\
&\nu = 2b - (n+2n_1G)^2 + n_1^2G^2,\\
&G = A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2,\ \bar{G} = A^2\gamma_1^2 + B^2\gamma_2^2 + C^2\gamma_3^2,
\end{aligned}$$

$b, n, n_1$ – параметры семейства. Система (3) вполне интегрируемая, так как кроме общих интегралов

$$\begin{aligned}
&2V_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + G[2b - (n+n_1G)^2] = c_1,\\
&V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\\
&V_3 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 + (n+n_1G)\,G = c_3,
\end{aligned} \tag{4}$$

допускает интеграл

$$\begin{aligned}
2V_4 = {} & A^2[p+\gamma_1(n+n_1G)]^2 + B^2[q+\gamma_2(n+n_1G)]^2 + \\
& + C^2[r+\gamma_3(n+n_1G)]^2 - 2\{b - n_1[Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 + \\
& + (n+n_1G)\,G]\}(BC\gamma_1^2 + CA\gamma_2^2 + AB\gamma_3^2).
\end{aligned} \tag{5}$$

При $n_1 = 0$ уравнения (3) соответствуют случаю Клебша в задаче о движении твердого тела в жидкости. При $n = n_1 = 0$ их можно интерпретировать как уравнения движения твердого тела под действием ньютоновского поля притяжения или задачи Бруна [4]. При $n_1 = b = 0$ уравнения представляют обобщение интегрируемого случая в задаче о движении электрически заряженного тела [10]. Если $n = n_1 = b = 0$, то система (3) соответствует случаю Эйлера.

Поставим задачу качественного анализа уравнений (3), а именно выделения особых инвариантных множеств этих уравнений и исследования их устойчивости. В качестве особых рассматриваются инвариантные множества любой конечной размерности, на которых удовлетворяются необходимые условия экстремума первых интегралов задачи (или их комбинаций). Нульмерные множества, обладающие указанным свойством, называют стационарными решениями. Множества положительной размерности будем называть стационарными инвариантными многообразиями (ИМ).

## 1. Выделение стационарных решений и ИМ

Как было отмечено ранее, для нахождения стационарных решений и ИМ дифференциальных уравнений (3) и последующего их анализа используется метод Рауса – Ляпунова и его обобщения. Искомые решения этим методом можно получить посредством решения задачи на условный экстремум первых интегралов этих уравнений (см., напр., [11]). В рассматриваемой задаче первые интегралы – это полиномы степени 2, 4, 6, что требует при применении классического варианта указанного метода решения системы полиномиальных уравнений 5-й степени с параметрами. Как показано в [12], задача существенно упрощается, если решать эту систему относительно части фазовых переменных и части параметров семейства интегралов. Такой подход дает возможность получить как ИМ исследуемых дифференциальных уравнений, так и первые интегралы дифференциальных уравнений на этом ИМ.

### 1.1. ИМ максимальной размерности

Согласно выбранному методу, образуем линейную комбинацию из интегралов (4), (5)

$$K = \lambda_0 V_1 - \frac{1}{2}\lambda_1 V_2 - \lambda_2 V_3 - \lambda_3 V_4 \tag{6}$$

и запишем необходимые условия экстремума интеграла $K$ относительно фазовых переменных $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

$$\begin{aligned}
&\partial K/\partial p = A[\lambda_0 p - \lambda_2\gamma_1 - \lambda_3(\hat{G}_1 n_1\gamma_1 + A((n+Gn_1)+p)\gamma_1)] = 0,\\
&\partial K/\partial q = B[\lambda_0 q - \lambda_2\gamma_2 - \lambda_3(\hat{G}_1 n_1\gamma_2 + B((n+Gn_1)+q)\gamma_2)] = 0,\\
&\partial K/\partial r = C[\lambda_0 r - \lambda_2\gamma_3 - \lambda_3(\hat{G}_1 n_1\gamma_3 + C((n+Gn_1)+r)\gamma_3)] = 0,\\
&\partial K/\partial \gamma_1 = \lambda_0 A\gamma_1(2b-(n+Gn_1)(n+3Gn_1)) - \lambda_1\gamma_1 - \lambda_2 A(2(n+2Gn_1)\gamma_1+p)+\\
&+\lambda_3\{2BC(b-n_1(\hat{G}_2+G(n+Gn_1)))\gamma_1 - A^2G_1((2A\gamma_1^2+G)n_1+n)-\\
&-An_1[\hat{G}_1(2(n+2Gn_1)\gamma_1+p)+2\gamma_1(B^2G_2\gamma_2+C^2G_3\gamma_3)]\} = 0,\\
&\partial K/\partial \gamma_2 = \lambda_0 B(2b-(n+Gn_1)(n+3Gn_1))\gamma_2 - \lambda_1\gamma_2 - \lambda_2 B(2(n+2Gn_1)\gamma_2+q)+\\
&+\lambda_3\{2A[C(b-n_1(\hat{G}_2+G(n+Gn_1))) - ABn_1G_1\gamma_1]\gamma_2-\\
&-B[B((2B\gamma_2^2+G)n_1+n)G_2 + n_1(2C^2G_3\gamma_2\gamma_3+\hat{G}_1(2(n+2Gn_1)\gamma_2+q))]\} = 0,\\
&\partial K/\partial \gamma_3 = \lambda_0 C(2b-(n+Gn_1)(n+3Gn_1))\gamma_3 - \lambda_1\gamma_3 - \lambda_2 C(2(n+2Gn_1)\gamma_3+r)+\\
&+\lambda_3\{2A[B(b-n_1(\hat{G}_2+G(n+Gn_1))) - ACn_1G_1\gamma_1]\gamma_3-\\
&-C[n_1(2B^2G_2\gamma_2\gamma_3+\hat{G}_1(2(n+2Gn_1)\gamma_3+r)) + C((2C\gamma_3^2+G)n_1+n)G_3]\} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\hat{G}_1 = BC\gamma_1^2 + AC\gamma_2^2 + AB\gamma_3^2,\ \hat{G}_2 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3,$

$$G_1 = (n+Gn_1)\gamma_1 + p,\ G_2 = (n+Gn_1)\gamma_2 + q,\ G_3 = (n+Gn_1)\gamma_3 + r.$$

Как для получения решений системы (7), так и решения последующих вычислительных задач используется система КА «Mathematica».

Для полиномов системы (7) построим лексикографический базис Гребнера относительно переменных $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, q, r$ при следующем их лексикографическом упорядочении $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > q > r$. Результатом будет система уравнений:

$$\begin{array}{l} G_1[2(A-B)(b-AG_1\gamma_1 n_1)\gamma_1\gamma_3^2 - A\gamma_3 G_1 G_3 + G_3\gamma_1(C(\gamma_3 n + r) + (3CG- \\ -2AB(\gamma_1^2+\gamma_2^2) - 2C(A-B+C)\gamma_3^2)\gamma_3 n_1)] - 2G_3(B-C)(CG_3\gamma_3 n_1 - b)\gamma_1^2\gamma_3 = 0, \\ 2(B-C)[b-(BG_2\gamma_2 + CG_3\gamma_3)n_1]\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - G_1[B\gamma_3 q - C\gamma_2 r + \\ +(B-C)(n + (2A\gamma_1^2 + G)n_1)\gamma_2\gamma_3] = 0, \end{array} \tag{8}$$

$$\begin{array}{l} (2b\gamma_1^2 - G_1(\gamma_1(n+3Gn_1)+p))\gamma_3\lambda_2 - [2(B-C)(n+Gn_1)CG_3 n_1\gamma_1^2\gamma_3^2 + \\ +G_1\gamma_1(2\gamma_3 n_1(B(An+(A+C)Gn_1)\gamma_1^2 + A((Bn+(B+C)Gn_1)\gamma_2^2 + \\ +(Cn+(B+C)Gn_1)\gamma_3^2)) - CG_3(n+Gn_1) - 2\gamma_3(b(A-B) + \\ +(B-C)CG_3\gamma_3 n_1)) - 2b(B(n+Gn_1)+n_1\hat{G}_1)\gamma_1^2\gamma_3 + G_1^2((A+C)\gamma_3 n + \\ +Cr + \gamma_3 n_1((A+C)G + 2A(A-B)\gamma_1^2 + \hat{G}_1))]\lambda_3 = 0, \\ (G_1 + 2n_1(B-C)\gamma_1\gamma_2^2)\gamma_1\gamma_3\lambda_1 + G_1[2\gamma_1(B(A+C)(CG_3 n_1\gamma_3 - b)\gamma_3 + \\ +CG_3(A+B)Cn_1\gamma_2^2) + AG_1(2B(A+C)\gamma_1^2\gamma_3 n_1 - CG_3)]\lambda_3 = 0, \\ (G_1(\gamma_1(n+3Gn_1)+p) - 2b\gamma_1^2)\gamma_3\lambda_0 + (2bB\gamma_1^2\gamma_3 + G_1(CG_3\gamma_1 - AG_1\gamma_3) - \\ -2(AG_1(G-(A-B)\gamma_1^2) + (B-C)CG_3\gamma_1\gamma_3)\gamma_1\gamma_3 n_1)\lambda_3 = 0. \end{array} \tag{9}$$

Непосредственно вычислением по определению ИМ можно проверить, что первые два уравнения системы (уравнения (8)) определяют ИМ коразмерности 2 дифференциальных уравнений (3). Отметим, что при $n = n_1 = 0$ и $b = 1/2$ уравнения (8) эквивалентны уравнениям ИМ [(2.4), 13].

Дифференциальные уравнения на ИМ (8) имеют вид:

$$\begin{array}{l} A\dot{p} = (B-C)(\bar{q}\,\bar{r} - \nu\gamma_2\gamma_3) - \mu_3\bar{q} + \mu_2\bar{r}, \\ \dot{\gamma}_1 = \bar{r}\gamma_2 - \bar{q}\gamma_3,\ \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - \bar{r}\gamma_1,\ \ \dot{\gamma}_3 = \bar{q}\gamma_1 - p\gamma_2, \end{array} \tag{10}$$

где $\bar{q}, \bar{r}$ – найденные из (8) выражения для $q,\ r$.

Уравнения (9) позволяют получить первые интегралы дифференциальных уравнений на найденном ИМ, что также можно проверить прямым вычислением. Для этого нужно разрешить эти уравнения относительно $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ и продифференцировать найденные выражения в силу дифференциальных уравнений (10).

## 1.2. Стационарные решения и ИМ коразмерности 4, 5

Для нахождения стационарных решений приравняем к нулю правые части уравнений (3), добавим к ним соотношение $V_2 = 1$ (4) и построим для полиномов получившейся системы лексикографический базис относительно $p > q > r > \gamma_1$. Результатом будут уравнения

$$\begin{array}{l} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ ((n_1(A-C)\,\gamma_3^2 - (n+z))\,\gamma_3 - r)((3n_1(A-C)\,\gamma_3^2 - (n+3z))\,\gamma_3 - r) - 2b\,\gamma_3^2 = 0, \\ r\gamma_2 - q\gamma_3 = 0,\ r\gamma_1 - p\gamma_3 = 0, \end{array} \tag{11}$$

определяющие ИМ коразмерности 4 уравнений движения (3). Здесь $z = n_1(A-(A-B)\gamma_2^2$.

Дифференциальные уравнения $\dot{\gamma}_2 = 0,\ \dot{\gamma}_3 = 0$ на этом ИМ имеют семейство решений:

$$\gamma_2 = \gamma_2^0 = \text{const},\ \gamma_3 = \gamma_3^0 = \text{const}. \tag{12}$$

Таким образом, с геометрической точки зрения, уравнения (11) определяют в пространстве $\mathbb{R}^6$ двумерную поверхность, каждая точка которой соответствует неподвижной точке фазового пространства исследуемой системы.

Совместно уравнения (11) и (12) определяют 4 семейства решений дифференциальных уравнений (3):

$$\begin{aligned}&p = \mp\varrho_2(n + \varrho_1 + 2n_1\varrho),\; q = -\gamma_2^0(n + \varrho_1 + 2n_1\varrho),\\ &r = -\gamma_3^0(n + \varrho_1 + 2n_1\varrho),\; \gamma_1 = \pm\varrho_2,\; \gamma_2 = \gamma_2^0,\; \gamma_3 = \gamma_3^0,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&p = \mp\varrho_2(n - \varrho_1 + 2n_1\varrho),\; q = -\gamma_2^0(n - \varrho_1 + 2n_1\varrho),\\ &r = -\gamma_3^0(n - \varrho_1 + 2n_1\varrho),\; \gamma_1 = \pm\varrho_2,\; \gamma_2 = \gamma_2^0,\; \gamma_3 = \gamma_3^0,\end{aligned} \tag{14}$$

где $\gamma_2^0$, $\gamma_3^0$ – параметры семейств, $\varrho = A\varrho_2^2 + B\gamma_2^{0^2} + C\gamma_3^{0^2}$, $\varrho_1 = [2b + n_1^2(A - (A - B)\gamma_2^{0^2} - (A - C)\gamma_3^{0^2})^2]^{1/2}$, $\varrho_2 = [1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2}]^{1/2}$.

Решения (13), (14) будут вещественными, в частности, при выполнении следующих ограничений на параметры семейства:

$$b > 0 \wedge \Big((\gamma_2^0 = 0 \wedge (\gamma_3^0 = -1 \vee \gamma_3^0 = 1) \vee (-1 < \gamma_3^0 < 1 \wedge -\sqrt{1 - \gamma_3^{0^2}} < \gamma_2^0 < \sqrt{1 - \gamma_3^{0^2}})\Big).$$

С механической точки зрения, элементы семейств (вещественных) решений (13), (14) соответствуют при $n_1 = 0$ винтовым движениям тела в жидкости, при $n = n_1 = 0$ ($n_1 = b = 0$) – перманентным вращениям тела под действием ньютоновского поля притяжения (электрически заряженного тела), при $n = n_1 = b = 0$ – положениям равновесия тела при отсутствии влияния сил. Подставив решения (13) в уравнения (7), найдем $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = -(n + 2n_1(A - (A - B)\gamma_2^{0^2} - (A - C)\gamma_3^{0^2}) + \varrho_1)\,\lambda_0$, при которых эти решения удовлетворяют указанным уравнениям. Затем подставим последние выражения в (6) и получим интеграл

$$\Omega_1 = V_1 + (n + 2n_1(A - (A - B)\gamma_2^{0^2} - (A - C)\gamma_3^{0^2}) + \varrho_1)V_3,$$

принимающий стационарное значение на элементах семейств решений (13). Аналогично находим интеграл, который принимает стационарное значение на элементах семейств решений (14):

$$\Omega_2 = V_1 + (n + 2n_1(A - (A - B)\gamma_2^{0^2} - (A - C)\gamma_3^{0^2}) - \varrho_1)V_3.$$

Изложенным выше способом при $p = q = r = 0$ получены следующие решения дифференциальных уравнений (3):

$$\begin{aligned}&p = q = r = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,\; \gamma_3 = \pm 1;\; p = q = r = \gamma_1 = \gamma_3 = 0,\; \gamma_2 = \pm 1;\\ &p = q = r = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,\; \gamma_1 = \pm 1\end{aligned} \tag{15}$$

и

$$p = 0,\; q = 0,\; r = 0,\; (n + n_1\rho)(n + 3n_1\rho) - 2b = 0,\; \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \tag{16}$$

где $\rho = A\gamma_1^2 + C\gamma_3^2 - B(\gamma_1^2 + \gamma_3^2 - 1)$.

Решения (15) соответствуют неподвижным точкам фазового пространства системы (3). Уравнения (16) определяют одномерное ИМ дифференциальных уравнений (3). Дифференциальное уравнение $\dot\gamma_1 = 0$ на этом ИМ имеет семейство решений:

$$\gamma_1 = \gamma_1^0 = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Таким образом, с геометрической точки зрения, уравнения (16) определяют в пространстве $\mathbb{R}^6$ кривую, каждая точка которой соответствует неподвижной точке фазового пространства исследуемой системы.

Совместно уравнения (16) и (17) определяют 8 семейств решений дифференциальных уравнений (3):

$$\begin{array}{l} p = q = r = 0,\ \gamma_1 = \gamma_1^0,\ \gamma_2 = \pm\frac{\rho_1}{\sqrt{3(B-C)\,n_1}},\ \gamma_3 = \pm\frac{\rho_2}{\sqrt{3(B-C)\,n_1}}; \\ p = q = r = 0,\ \gamma_1 = \gamma_1^0,\ \gamma_2 = \pm\frac{\rho_3}{\sqrt{3(B-C)\,n_1}},\ \gamma_3 = \pm\frac{\rho_4}{\sqrt{3(B-C)\,n_1}}. \end{array} \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{array}{l} \rho_1 = [-2n - \bar{\rho} - 3n_1(C + (A-C)\gamma_1^{0^2})]^{1/2}, \rho_2 = [2n + \bar{\rho} + 3n_1(B + (A-B)\gamma_1^{0^2})]^{1/2}, \\ \rho_3 = [-2n + \bar{\rho} - 3n_1(C + (A-C)\gamma_1^{0^2})]^{1/2}, \rho_4 = [2n - \bar{\rho} + 3n_1(B + (A-B)\gamma_1^{0^2})]^{1/2}, \end{array}$$

$\gamma_1^0$ – параметр семейств, $\bar{\rho} = (6b + n^2)^{1/2}$.

В частности, первые 4 решения (18) будут вещественными, когда

$$A > B > C,\ -1 < \gamma_1^0 < 1,\ n < 0,\ 0 \le 2b < n^2 \ \wedge\ -\frac{\bar{\rho} - 2n}{\chi_1} < 3n_1 < -\frac{\bar{\rho} + 2n}{\chi_2},$$

последние 4 при выполнении условий:

$$A > B > C,\ -1 < \gamma_1^0 < 1,\ n < 0,\ b \ge 0 \ \wedge\ \frac{\bar{\rho} - 2n}{\chi_1} < 3n_1 < \frac{\bar{\rho} - 2n}{\chi_2},$$

где $\chi_1 = B + (A-B)\gamma_1^{0^2}$, $\chi_2 = C + (A-C)\gamma_1^{0^2}$. Очевидно, решения (15) удовлетворяют всему семейству дифференциальных уравнений (3), решения (18) – некоторому его подсемейству, так как эти решения определены при $B \ne C$, $n_1 \ne 0$. Семейство интегралов

$$\begin{array}{l} 2\Omega_3 = \Big[2V_1 + C((n + Cn_1)(n + 3Cn_1) - 2b)\,V_2\Big]\lambda_0 + \Big[(2AB(Cn_1(n + Cn_1) - b) \\ \quad -C^2(n + Cn_1)^2)\,V_2 + 2((ABn_1 + C(n + Cn_1))V_3 - V_4)\Big]\,\lambda_3 \end{array}$$

и каждое из его подсемейств (коэффициенты при $\lambda_0, \lambda_3$) принимает стационарное значение на первых двух решениях (15), что можно проверить непосредственно вычислением. Соответствующие семейства интегралов для остальных решений (15) идентичны по структуре $\Omega_3$. В случае решений (18), интеграл $V_1$ принимает стационарное значение на элементах семейств этих решений.

Нетрудно показать, что решения (11), (13) – (16), (18) принадлежат ИМ (8). Для этого нужно разрешить уравнения (11) относительно $p, q, r, \gamma_1$ и подставить полученные выражения в (8). Последние обратятся в тождество. Откуда и следует принадлежность ИМ (11) ИМ (8). Принадлежность остальных решений ИМ (8) доказывается аналогично.

## 2. Анализ устойчивости

При исследовании устойчивости найденных решений методом Рауса – Ляпунова интегралы, принимающие стационарное значение на этих решениях, используются для получения достаточных условий их устойчивости.

### 2.1. Об устойчивости стационарных решений

Исследуем решения (15). Для получения достаточных условий устойчивости первых двух решений (15) воспользуемся интегралом

$$\bar{\Omega} = 2V_1 + C((n + Cn_1)(n + 3Cn_1) - 2b)\, V_2,$$

принадлежащим семейству интегралов $\Omega_3$. Введем отклонения $\xi_1 = p,\ \xi_2 = q,\ \xi_3 = r,\ \eta_1 = \gamma_1,\ \eta_2 = \gamma_2,\ \eta_3 = \gamma_3 \pm 1$. Вторая вариация $\bar{\Omega}$ на множестве

$$\delta V_1 = \mp C((n + Cn_1)(n + 3Cn_1) - 2b)\, \eta_3 = 0,$$

записывается так:

$$2\delta^2\bar{\Omega} = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 + (2b - (n + Cn_1)(n + 3Cn_1))[(A - C)\, \eta_1^2 + (B - C)\, \eta_2^2].$$

Условия положительной определенности квадратичной формы $\delta^2\bar{\Omega}$ являются достаточными для устойчивости исследуемых решений. Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим случай $b = Cn_1(n + Cn_1)$. При этом ограничении квадратичная форма $\delta^2\bar{\Omega}$ примет вид:

$$2\delta^2\tilde{\Omega} = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 - (n + Cn_1)^2[(A - C)\, \eta_1^2 + (B - C)\, \eta_2^2].$$

Очевидно, последняя квадратичная форма положительно определена при выполнении условий:

$$A < C,\, B < C\ \wedge\ (n \neq 0 \vee n_1 \neq 0\ \vee\ (n \neq 0,\, n_1 \neq 0\ \wedge\ n \neq -Cn_1)). \tag{19}$$

Ограничения на параметры $b, n, n_1$ выделяют из семейства дифференциальных уравнений (3) подсемейства, для которых исследуемые решения устойчивы.

Для получения необходимых условий устойчивости воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению [14]. Уравнения первого приближения и соответствующее характеристическое уравнение с учетом введенного ограничения на параметр $b$ записываются так:

$$\begin{array}{l} A\dot{\xi}_1 = \pm[(A + B - C)(n + Cn_1)\, \xi_2 + (B - C)(n + Cn_1)^2\eta_2], \\ B\dot{\xi}_2 = \mp[(A + B - C)(n + Cn_1)\, \xi_1 + (A - C)(n + Cn_1)^2\eta_1], \\ \dot{\xi}_3 = 0,\, \dot{\eta}_1 = \mp\xi_2,\, \dot{\eta}_2 = \pm\xi_1,\, \dot{\eta}_3 = 0; \end{array} \tag{20}$$

$$\lambda^2[\lambda^2 + (n + Cn_1)^2][AB\lambda^2 + (A - C)(B - C)(n + Cn_1)^2] = 0. \tag{21}$$

Очевидно, при $A < C,\, B < C\ \vee\ A > C,\, B > C$ характеристическое уравнение (21) имеет только нулевые и чисто мнимые корни.

Как показали вычисления, при условиях $n = n_1 = 0$ или $n \neq 0, n_1 \neq 0 \wedge n = -Cn_1$ жорданова форма характеристической матрицы $\lambda E - A$ ($A$ – матрица системы (20)) становится недиагональной, т.е. имеет место неустойчивость по первому приближению. Таким образом, необходимыми для устойчивости исследуемых решений будут следующие условия:

$$A < C,\, B < C\ \vee\ A > C,\, B > C\ \wedge\ (n \neq 0,\, n_1 \neq 0\ \wedge\ n \neq -Cn_1). \tag{22}$$

Сопоставление их с (19) показывает, что достаточные условия близки к необходимым. Аналогичные результаты получены для остальных решений (15).

Исследуем устойчивость элементов первых 4-х семейств решений (18), используя интеграл $V_1$ для получения достаточных условий. Введем отклонения: $\xi_1 = p$, $\xi_2 = q$, $\xi_3 = r$, $\eta_1 = \gamma_1 - \gamma_1^0$, $\eta_2 = \gamma_2 \mp \rho_1/\sqrt{3(B-C)\,n_1}$, $\eta_3 = \gamma_3 \mp \rho_2/\sqrt{3(B-C)\,n_1}$. Вариация интеграла $V_1$ записывается так: $2\Delta V_1 = \delta^2 V_1 + Q$, где

$$\begin{array}{l}\delta^2 V_1 = (A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2) + (2b - n^2)(Az_1^2 + Bz_2^2 + Cz_3^2),\\ Q = -n_1(Az_1^2 + Bz_2^2 + Cz_3^2)^2(2n + n_1(Az_1^2 + Bz_2^2 + Cz_3^2)),\\ z_1 = \eta_1 + \gamma_1^0,\ z_2 = \eta_2 \pm \rho_1/\sqrt{3(B-C)\,n_1},\ z_3 = \eta_2 \pm \rho_2/\sqrt{3(B-C)\,n_1}.\end{array}$$

Очевидно, квадратичная форма $\delta^2 V_1$ будет положительно определенной $\forall\, b > n^2/2$. Откуда следует устойчивость исследуемых решений по переменным $p$, $q$, $r$, $\gamma_1 - \gamma_1^0$, $\gamma_2 \mp \rho_1/\sqrt{3(B-C)\,n_1}, \gamma_3 \mp \rho_2/\sqrt{3(B-C)\,n_1}$. Устойчивость остальных решений доказывается аналогично. Для решений (13), (14) доказана неустойчивость по первому приближению, исходя из жордановой формы характеристической матрицы системы.

### 2.2. Об устойчивости ИМ

Исследуем устойчивость ИМ (11) при $b = 0$. В этом случае система (11) разделяется на две подсистемы

$$\begin{array}{l}\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\ (3n_1(A-C)\,\gamma_3^2 - [n + 3n_1(A - (A-B)\gamma_2^2)])\,\gamma_3 - r = 0,\\ r\gamma_2 - q\gamma_3 = 0,\ r\gamma_1 - p\gamma_3 = 0\end{array} \tag{23}$$

и

$$\begin{array}{l}\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\ (n_1(A-C)\,\gamma_3^2 - [n + n_1(A - (A-B)\gamma_2^2)])\,\gamma_3 - r = 0,\\ r\gamma_2 - q\gamma_3 = 0,\ r\gamma_1 - p\gamma_3 = 0,\end{array} \tag{24}$$

которые определяют два ИМ коразмерности 4 дифференциальных уравнений (3).

Непосредственно вычислением, используя карты

$$p = \pm z\tilde{z},\ q = -\gamma_2\tilde{z},\ r = -\gamma_3\tilde{z},\ \gamma_1 = \mp z \tag{25}$$

некоторого атласа на ИМ (23), можно показать, что интеграл

$$\Phi_1 = \Big(\frac{\tilde{V}_1}{V_3} + n\Big)^2 + 2n_1 V_3$$

принимает стационарное значение на этом ИМ. Здесь введены обозначения $z^2 = 1 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2$, $\tilde{z} = n + 3n_1(Az^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$; $\tilde{V}_1$ – интеграл $V_1$ при $b = 0$. Аналогично показывается, что интеграл $\Phi_2 = \tilde{V}_1 V_3$ принимает стационарное значение на ИМ (24).

Исследуем устойчивость ИМ (23), используя интеграл $\Phi_1$ для получения достаточных условий устойчивости. Исследование проводится в обоих картах (25). Введем отклонения $y_1 = p \mp z\tilde{z}$, $y_2 = q + \gamma_2\tilde{z}$, $y_3 = r + \gamma_3\tilde{z}$, $y_4 = \gamma_1 \pm z$. Вторая вариация $\Phi_1$ на множестве

$$\delta V_3 = B\gamma_2 y_2 + C\gamma_3 y_3 \mp Az\,[y_1 + (n + n_1(Az^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2))\,y_4] = 0,$$

записывается так: $\delta^2\Phi_1 = a_{11}y_1^2 + a_{12}y_1y_2 + a_{13}y_1y_3 + a_{22}y_2^2 + a_{23}y_2y_3 + a_{33}y_3^2$, где

$$a_{11}=\tfrac{4An_1^2(3Az^2+G_2)}{G_1^2},\ a_{12}=\mp\tfrac{4B\gamma_2 n_1(n+3n_1(2Az^2+G_2))}{G_1^2 z},\ a_{13}=\mp\tfrac{4C\gamma_3 n_1(n+3n_1(2Az^2+G_2))}{G_1^2 z},$$

$$a_{22}=\tfrac{B}{AG_1^2G_2z^2}\Big[n^2(Az^2+B\gamma_2^2)+G_2n_1[9B^2\gamma_2^4n_1+Az^2(2n+n_1(Az^2+C\gamma_3^2))+$$

$$+B\gamma_2^2(6n+n_1(22Az^2+9C\gamma_3^2))]\Big],$$

$$a_{23}=\tfrac{2BC\gamma_2\gamma_3}{AG_1^2G_2z^2}\Big[n^2+3G_2n_1(2n+n_1(4Az^2+3G_2))\Big],$$

$$a_{33}=\tfrac{C}{AG_1^2G_2z^2}\Big[n^2(Az^2+C\gamma_3^2)+G_2n_1[9C^2\gamma_3^4n_1+Az^2(2n+n_1(Az^2+B\gamma_2^2))+$$

$$+C\gamma_3^2(6n+n_1(22Az^2+9B\gamma_2^2))]\Big],\ G_1=n+n_1G_2,\ G_2=Az^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2.$$

Условия положительной определенности

$$\Delta_1=\frac{An_1^2\,(4Az^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2)}{(n+n_1\,\Lambda)^2}>0,\ \Delta_2=\frac{ABn_1^2(4(Az^2+B\gamma_2^2)+C\gamma_3^2)}{(Az^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2)(n+n_1\Lambda)^2}>0,$$
$$\Delta_3=\frac{ABCn_1^2}{(Az^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2)(n+n_1\Lambda)^2}>0,\quad \Lambda=Az^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2$$

квадратичной формы $\delta^2\Phi_1$ будут достаточными для устойчивости исследуемого ИМ.

Учитывая, что интеграл $\Phi=\tilde{V}_1/V_3$ на ИМ (23) принимает вид $\Phi|_0=-[n+2n_1\,(B\gamma_2^2+C\gamma_3^2+A(1-\gamma_2^2-\gamma_3^2))]=c=\text{const}$, а соотношения $\gamma_2=\gamma_2^0=\text{const}$, $\gamma_3=\gamma_3^0=\text{const}$ представляют собой первые интегралы дифференциальных уравнений на этом ИМ, последние неравенства можно переписать следующим образом:

$$\Delta_1=\frac{n_1((c+n)(B-4A)+6An_1((B-C)\gamma_3^{0^2}-B))}{(A-B)(c-n)^2}>0,$$
$$\Delta_2=\frac{n_1^2(2(c+n)+3Cn_1\gamma_3^{0^2})}{(c-n)^2(c+n)}>0,\ \Delta_3=-\frac{n_1^3}{(c-n)^2(c+n)}>0. \tag{26}$$

Неравенства (26) совместны, в частности, при следующих ограничениях на параметры $n,n_1,c,\gamma_3^0$:

$$A>B>C\ \wedge\ \Big(\gamma_3^0<-\sigma_1\ \vee\ \gamma_3^0>\sigma_1\Big)\ \wedge$$
$$\bigg(\Big(c\le 0\ \wedge\ \Big(((n<c\ \vee\ c<n<-c)\ \wedge\ 0<n_1<\sigma_2)\ \vee(n>-c\ \wedge\ \sigma_2<n_1<0)\Big)\Big)$$
$$\vee\ \Big(c>0\ \wedge\ \Big((n<-c\ \wedge\ 0<n_1<\sigma_2)\ \vee\ ((-c<n<c\ \vee\ n>c)\ \wedge\ \sigma_2<n_1<0)\Big)\Big)\bigg),$$
$$\text{где } \sigma_1=2\sqrt{\frac{A}{4A-C}},\ \sigma_2=-\frac{2(c+n)}{3C\gamma_3^{0^2}}.$$

Условия на параметры $c,\gamma_3^0$ представляют собой ограничения на константы интегралов дифференциальных уравнений на ИМ (23). Условия на параметры $n,n_1$ выделяют из семейства дифференциальных уравнений (3) подсемейство, для которого исследуемое решение устойчиво.

## Заключение

Представлены результаты качественного анализа семейства дифференциальных уравнений, описывающего при определенных ограничениях на параметры семейства движение твердого тела в центральном поле сил, идеальной жидкости, электрически заряженного тела. С использованием метода базисов Гребнера найдены стационарные решения и ИМ различной размерности. Показано, что все найденные решения принадлежат ИМ максимальной размерности. Проведен анализ их устойчивости по Ляпунову. Для части стационарных решений получены достаточные условия устойчивости и сопоставлены с необходимыми, для остальных доказана устойчивость по части переменных или неустойчивость по первому приближению. Проведено исследование устойчивости ИМ, состоящего из неподвижных точек фазового пространства системы. Получены достаточные условия устойчивости в виде ограничений на параметры семейства исследуемых дифференциальных уравнений.

## Литература


1. Опарина, Е.И. Устойчивость течения Колмогорова в канале с твердыми стенками / Е.И. Опарина, О.В. Трошкин // Доклады Российской академии наук. – 2004. – Т. 398, № 4. – С. 487–491.
2. Yehia, H.M. New Generalizations of the Integrable Problems in Rigid Body Dynamics / H.M. Yehia // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1997. – V. 30, № 20. – P. 7269–7275.
3. Yehia, H.M. New Generalizations of all the Known Integrable Problems in Rigid-Body Dynamics / H.M. Yehia // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1999. – V. 32, № 43. – P. 7565–7580.
4. Борисов, А.В. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – М.: Институт компьютерных исследований, 2005.
5. Routh, E.J. The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies / E.J. Routh. – London: MacMillan, 1905.
6. Ляпунов, А.М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости / А.М. Ляпунов // Собрание сочинений. – 1954. – Т. 1. – С. 237–319.
7. Сальвадори, Л. Об устойчивости движения / Л. Сальвадори // Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. –1970. – Т. 124, № 6. – С. 3–19.
8. Иртегов, В.Д. О стационарных движениях обобщенного волчка Ковалевской и их устойчивости / В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 1. – С. 101–114.
9. Иртегов, В.Д. О качественном анализе уравнений движения твердого тела в магнитном поле / В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2022. – Т. 25, № 1. – С. 54–66.
10. Яхья, Х.М. Новые решения задачи о движении гиростата в потенциальном и магнитном полях / Х.М. Яхья // Вестник Московского университета. Серия: Математика. Механика. – 1985. – № 5. – С. 60–63.
11. Иртегов, В.Д. Методы компьютерной алгебры в исследовании нелинейных дифференциальных систем / В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 6. – С. 1027–1040.
12. Иртегов, В.Д. Об инвариантных многообразиях систем с первыми интегралами / В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, № 4. – С. 531–537.
13. Иртегов, В.Д. Об инвариантных многообразиях в задаче Клебша – Тиссерана – Бруна / В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, № 3. – С. 374–382.

14. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.

Валентин Дмитриевич Иртегов, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), irteg@icc.ru

Татьяна Николаевна Титоренко, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), titor@icc.ru

*Поступила в редакцию 14 января 2023 г.*

**MSC 34C30, 34D20** **DOI: 10.14529/mmp230204**

## ON THE QUALITATIVE ANALYSIS OF A FAMILY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FIRST INTEGRALS OF DEGREE MORE THEN 2

***V.D. Irtegov*[1], *T.N. Titorenko*[1]**
[1]Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russian Federation
E-mail: irteg@icc.ru, titor@icc.ru

We study a family of differential equations that arose as a result of a generalization of the classical integrable cases in rigid body dynamics. The system under study admits polynomial first integrals of the 4th and 6th degrees. Under appropriate constraints on the parameters of the family, the differential equations are interpreted as those of motion of a rigid body in a central force field and an ideal fluid, as well as the equations of motion of an electrically charged body. The qualitative analysis of the equations is done. We find special invariant sets of various dimensions and investigate their Lyapunov stability. For the analysis of the problem, generalizations of the Routh-Lyapunov method and software tools of computer algebra are applied.

*Keywords: rigid body; the equations of motion; first integrals; invariant sets; stability; computer algebra.*

# References

1. Oparina E.I., Troshkin O.V. Stability of Kolmogorov Flow in a Channel with Rigid Walls. *Doklady Physics*, 2004, vol. 49, no. 10, pp. 583–587. DOI: 10.1134/1.1815419
2. Yehia H.M. New Generalizations of the Integrable Problems in Rigid Body Dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1997, vol. 30, no. 20, pp. 7269–7275. DOI: 10.1088/0305-4470/30/20/025
3. Yehia H.M. New Generalizations of all the Known Integrable Problems in Rigid-Body Dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1999, vol. 32, no. 43, pp. 7565–7580. DOI: 10.1088/0305-4470/32/43/309
4. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela. Gamil'tonovy metody, integriruemost', khaos* [Rigid Body Dynamics. Hamiltonian Methods, Integrablity, Chaos]. Moscow, Institute of Computer Science, 2005. (in Russian)
5. Routh E.J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies.* London, MacMillan, 1905.
6. Lyapunov A.M. [On the Permanent Helical Motions of a Rigid Body in Fluid]. *Collected Works*, 1954, vol. 1, pp. 276–319. (in Russian)

7. Salvadori L. Sulla Stabilita del Movimento. *Matematiche*, 1969, vol. 24, no. 1, pp. 218–239.
8. Irtegov V.D., Titorenko T.N. About Stationary Movements of the Generalized Kovalevskaya Top and their Stability. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 1, pp. 81–91. DOI: 10.3103/S0025654419010072
9. Irtegov V.D., Titorenko T.N. On the Qualitative Analysis of the Equations of Motion of a Rigid Body in a Magnetic Field. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2022, vol. 16, no. 1, pp. 58–69. DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.104
10. Yehia H.M. [New Solutions of the Problem on the Motion of a Gyrostat in Potential and Magnetic Fields]. *Proceedings of Moscow University. Series: Mathematics and Mechanics*, 1985, no. 5, pp. 60–63. (in Russian)
11. Irtegov V.D., Titorenko T.N. Computer Algebra Methods in the Study of Nonlinear Differential Systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no 6, pp. 845–857.
12. Irtegov V.D., Titorenko T.N. The Invariant Manifolds of Systems with First Integrals. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 4, pp. 379–384. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.08.014.
13. Irtegov V.D., Titorenko T.N. Invariant Manifolds in the Clebsch–Tisserand–Brun Problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 3, pp. 268–274. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.07.002
14. Lyapunov A.M. *The General Problem of the Stability of Motion.* London, Taylor and Francis, 1992.


*Received January 14, 2023*