

ОБ ОДНОМ ЛАГРАНЖЕВО-ЭЙЛЕРОВОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

Е.С. Шестаковская¹, Я.Е. Стариков¹, И.Р. Макеева^{1,2}

¹Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

²ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТИФ им. академ. Е.И. Забабахина», г. Снежинск, Российская Федерация

В данной работе реализован численный метод расчета двумерных течений в эйлеровых координатах, в основу которого положена явная лагранжево-эйлерова разностная схема. Расчет каждого временного шага проводится в два этапа. На лагранжевом этапе применяется разностная схема, основанная на методе Куропатенко, который обладает нулевой диссипацией энергии на гладких решениях и минимальной дистракцией на сильных разрывах. На эйлеровом этапе применяется перестройка сетки и пересчет всех параметров вещества со старой сетки на новую в соответствии с законами сохранения массы, импульса и энергии. Разработанный численный алгоритм показал работоспособность при тестировании на задачах, имеющих аналитическое или эталонное решение.

Ключевые слова: лагранжево-эйлеровый метод; метод расчета ударных волн; метод Куропатенко.

Введение

Моделирование нестационарных течений жидкостей и газов в условиях динамических нагрузок, как правило, основывается на системе законов сохранения массы, количества движения и энергии, записанных в виде дифференциальных уравнений в форме Эйлера или Лагранжа. В случае высокоинтенсивных нагрузок в системе могут возникать ударные волны и волны разрежения, и решение системы дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой разрывные (ударные волны) или недифференцируемые (волны разрежения) в отдельных точках функции. При построении численного метода используются различные механизмы, позволяющие описывать в том числе разрывные течения: в уравнения вводятся дополнительные члены с искусственной вязкостью [1], применяются специальные формы разностных уравнений [2], используются физические соотношения для разрывных течений [3, 4]. Во всех случаях разрывы заменяются тонким переходным слоем с большими производными газодинамических величин, так называемая дистракция сильных и слабых разрывов. Лагранжевы методы отличаются меньшей дистракцией и позволяют отслеживать контактные границы. При переходе к моделированию дву- и трехмерных течений в Лагранжевых методах возникают проблемы, связанные с сильными деформациями сетки, что может увеличить общую погрешность численного решения. Поэтому представляется целесообразным объединить преимущества лагранжева и эйлерова подходов. Впервые такая идея была высказана В.Ф. Куропатенко в 60-е годы [5]. Другой вариант сочетания лагранжевых и эйлеровых координат в разностном алгоритме реализован в оригинальном методе «частиц в ячейках» Ф. Харлоу [6]. Метод Харлоу получил развитие в работах [7–10]. Активно развиваются и другие лагранжево-эйлеровы методы, например, [11–14]. Идея Куропатенко изложена в [15], где предложен подход к построению численного метода, когда на первом этапе применяются уравнения в форме Лагранжа, а затем решение переинтерполируется на

неподвижную Эйлерову сетку с выполнением всех законов сохранения. Было рассмотрено две модификации – с использованием на первом этапе методов Неймана – Рихтмайера и дивергентного метода Куропатенко. Первая модификация была успешно использована для решения задачи обтекания, а вторая не была доведена до реализации. Дивергентный метод Куропатенко обладает рядом достоинств: отсутствие эмпирических констант, монотонность, минимальная дистракция разрывов, нулевая диссипация энтропии на непрерывных решениях и использование в качестве механизма диссипации энергии на ударных волнах законов сохранения на поверхности сильного разрыва. Еще одним преимуществом предложенного подхода является использование ортогональных сеток, что существенно снижает вычислительную сложность и погрешности при вычислениях нормальных компонентов векторов скорости, а также позволяет более просто реализовать алгоритмы адаптации сетки. Поэтому реализация предложенного метода представляется перспективной и актуальной задачей.

1. Численный метод

Для описания течений газа система уравнений механики сплошной среды в лагранжевых координатах имеет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} + \frac{P}{\rho} \nabla \vec{U} = 0, \quad (3)$$

где ρ – массовая плотность газа, \vec{U} – скорость, P – давление, E – удельная внутренняя энергия. Система уравнений (1) – (3) замыкается уравнением состояния

$$P = P(\rho, E). \quad (4)$$

Численный метод [15] решения системы (1) – (4) предполагает использование ортогональной сетки по пространству, в двумерном случае ячейки которой образуются линиями $x_i = \text{const}$, $y_j = \text{const}$ ($i \in [0...N]$, $j \in [0...M]$), как изображено на рис. 1. Каждый шаг по времени разбивается на два этапа: на лагранжевом этапе происходит расчет величин на подвижной сетке, после этого на эйлеровом этапе выполняется перенос найденных параметров на прямоугольную сетку. Рассмотрим каждый из этапов подробнее. Для вычисления промежуточных величин $P_{2,5}^*$, $U_{2,5}^*$, которые определяются на грани между ячейками O и A , применяются различные уравнения в зависимости от класса рассматриваемого интервала. Если $U_{x,A} < U_{x,O}$, то в интервале происходит сжатие, и в соответствии с методом Куропатенко для определения предварительных параметров применяются законы сохранения на сильном разрыве:

$$U_{x,2,5}^* = U_{x,O}^n, \quad P_{2,5}^* = P_A^n + W (U_{x,A}^n - U_{x,O}^n), \quad P_O^n > P_A^n, \quad (5)$$

$$U_{x,2,5}^* = U_{x,A}^n, \quad P_{2,5}^* = P_O^n + W (U_{x,A}^n - U_{x,O}^n), \quad P_O^n \leq P_A^n. \quad (6)$$

Здесь W – скорость ударной волны, определяемая из уравнений Гюгонио, в которых в качестве состояния вещества перед разрывом берутся параметры из ячейки с

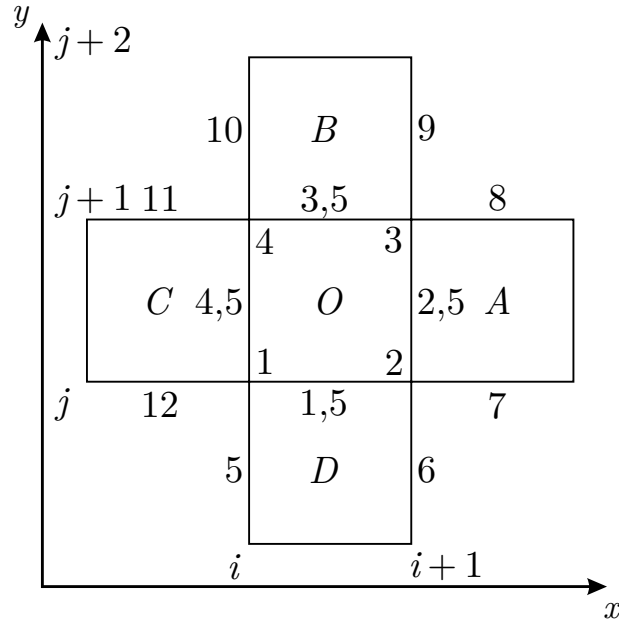


Рис. 1. Шаблон разностной схемы

меньшим давлением, а скачок скорости на разрыве полагается равным разности скоростей в ячейках $|U_{x,A}^n - U_{x,O}^n|$. Если же в рассматриваемом интервале $U_{x,A} \geq U_{x,O}$, то в интервале решение является непрерывным и применяются уравнения

$$U_{x,2,5}^* = U_{x,2,5}^n - \frac{\tau}{2h_x} (P_A^n - P_O^n), \quad (7)$$

$$P_{2,5}^* = \frac{P_A^n + P_O^n}{2} - \frac{\tau[(a_O^n)^2 + (a_A^n)^2]}{4h_x} (U_{x,A}^n - U_{x,O}^n), \quad (8)$$

где

$$U_{x,2,5}^n = \frac{(a_O^n)^2 U_{x,O}^n + (a_A^n)^2 U_{x,A}^n}{(a_O^n)^2 + (a_A^n)^2}, \quad h_x = \frac{1}{2}(x_A^n - x_O^n)(\rho_A^n + \rho_O^n). \quad (9)$$

Здесь a – массовая скорость звука:

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S.$$

Аналогично рассчитываются величины U_x^*, P^* в точках 4,5; 5; 6; 9; 10.

Рассмотрим интервал OB . С помощью уравнений (5) – (9), записанных для оси y , могут быть найдены U_y^*, P^* на грани 1,5 и таким же образом на гранях 3,5; 7; 8; 11; 12. После этого находятся предварительные скорости в узлах путем линейной интерполяции скоростей прилежащих граней. Рассмотрим выражения для узла 1 при условии равенства размеров ячеек O, C, D :

$$U_{x,1}^* = \frac{1}{2} (U_{x,4,5}^* + U_{x,5}^*), \quad U_{y,1}^* = \frac{1}{2} (U_{y,1,5}^* + U_{y,12}^*).$$

Аналогичным образом получаются величины U_x^* и U_y^* в узлах 2, 3, 4. Новые координаты узлов рассчитываются по формулам

$$x_k^{n+1} = x_k^n + \tau U_{x,k}^*, \quad y_k^{n+1} = y_k^n + \tau U_{y,k}^*, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

По координатам рассчитывается площадь ячейки O в момент времени t^{n+1} :

$$S_O^{n+1} = \frac{1}{2} [x_1^{n+1}(y_2^{n+1} - y_4^{n+1}) + x_2^{n+1}(y_3^{n+1} - y_1^{n+1}) + x_3^{n+1}(y_4^{n+1} - y_2^{n+1}) + x_4^{n+1}(y_1^{n+1} - y_3^{n+1})].$$

Из закона сохранения массы находится плотность:

$$\rho_O^{n+1} = \rho_O^n \frac{S_O^n}{S_O^{n+1}}.$$

Значения компонент скорости в момент времени t^{n+1} находятся с помощью уравнений

$$U_{x,O}^{n+1} = U_{x,O}^n + \frac{\tau}{h_x} (P_{2,5}^* - P_{4,5}^*),$$

$$U_{y,O}^{n+1} = U_{y,O}^n + \frac{\tau}{h_y} (P_{3,5}^* - P_{1,5}^*).$$

В конце лагранжева этапа рассчитывается внутренняя энергия в момент времени t^{n+1} . Для этого определяется, претерпела ли ячейка сжатие или растяжение. Если $\rho_O^{n+1} \leq \rho_O^n$, то вещество в ячейке разгружается и используется уравнение изэнтропы:

$$E_O^{n+1} = E_O^n - \int_{V_O^n}^{V_O^{n+1}} P(V, E) dV.$$

Если же $\rho_O^{n+1} > \rho_O^n$, то происходит сжатие вещества и определяются разности скоростей

$$\Delta U_{x,O} = U_{x,2,5}^* - U_{x,4,5}^*, \quad \Delta U_{y,O} = U_{y,3,5}^* - U_{y,1,5}^*.$$

В этом случае для расчета внутренней энергии необходимо учесть сжатие и растяжение по осям. Учет сжатия происходит по формуле

$$E_O^* = E_O^n - \delta_x \left[\frac{\tau}{2h_{x,O}} (P_{2,5}^* + P_{4,5}^*) (U_{x,2,5}^* + U_{x,4,5}^*) - \frac{1}{2} (U_{x,O}^{n+1} - U_{x,O}^n) (U_{x,O}^{n+1} + U_{x,O}^n - U_{x,2,5}^* - U_{x,4,5}^*) \right] - \delta_y \left[\frac{\tau}{2h_{y,O}} (P_{3,5}^* + P_{1,5}^*) (U_{y,3,5}^* + U_{y,1,5}^*) - \frac{1}{2} (U_{y,O}^{n+1} - U_{y,O}^n) (U_{y,O}^{n+1} + U_{y,O}^n - U_{y,3,5}^* - U_{y,1,5}^*) \right].$$

Здесь

$$\delta_x = \begin{cases} 1, & \Delta U_{x,O} < 0, \\ 0, & \Delta U_{x,O} \geq 0, \end{cases} \quad \delta_y = \begin{cases} 1, & \Delta U_{y,O} < 0, \\ 0, & \Delta U_{y,O} \geq 0, \end{cases}$$

$$h_{x,O} = \rho_O^n (x_2^n - x_1^n), \quad h_{y,O} = \rho_O^n (y_3^n - y_2^n).$$

При $\Delta U_{x,O} > 0$ или $\Delta U_{y,O} > 0$ учитывается растяжение по этому направлению с помощью формулы

$$E_O^{n+1} = E_O^* - \int_{V_O^*}^{V_O^{n+1}} P(V, E) dV,$$

в которой объем V_O^* при $\Delta U_{x,O} > 0$ равен

$$V_O^* = V_O^n + \frac{\tau}{h_{x,O}} (U_{x,2,5}^* - U_{x,4,5}^*),$$

а при $\Delta U_{y,O} > 0$

$$V_O^* = V_O^n + \frac{\tau}{h_{y,O}} (U_{y,3,5}^* - U_{y,1,5}^*).$$

Если $\Delta U_{x,O} \leq 0$ и $\Delta U_{y,O} \leq 0$, то растяжения не происходит и в этом случае $E_O^{n+1} = E_O^*$.

Таким образом, после завершения лагранжева этапа определены величины ρ^{n+1} , E^{n+1} , \vec{U}^{n+1} для всех ячеек сетки, а также новые координаты узлов x^{n+1} , y^{n+1} , определяющие положения деформированных ячеек. Эйлеров этап состоит в переносе величин с текущей пространственной сетки на новую ортогональную. При этом сетка, на которую осуществляется интерполяция величин, может быть произвольного разбиения, т. е. доступна возможность измельчения сетки в областях интенсивных процессов. В самом простом случае это сетка, которая была до движения узлов на лагранжевом этапе.

Рассмотрим процесс нахождения величин в ячейках новой сетки [16]. В общем случае, одна эйлерова ячейка может содержать части n деформированных лагранжевых ячеек. Определим объемные и массовые концентрации входящих ячеек

$$\alpha_k = \frac{\Delta S_k}{S_e}, \quad \xi_k = \frac{\rho_k \Delta S_k}{\rho_e S_e}.$$

Индексами k и e обозначены параметры, относящиеся к лагранжевой и эйлеровой сеткам соответственно. ΔS_k – площадь пересечения k ячейки с эйлеровой ячейкой. Из законов сохранения массы, количества движения и энергии следуют уравнения для определения величин в новой ячейке:

$$\rho_e = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k,$$

$$\vec{U}_e = \sum_{k=1}^n \xi_k \rho_k,$$

$$E_e = \sum_{k=1}^n \xi_k \left(E_k + \frac{1}{2} \|\vec{U}_k - \vec{U}_e\|^2 \right).$$

Давление P_e вычисляется по уравнению состояния (4).

2. Результаты тестовых расчетов

Для валидации и верификации численного метода и реализующего его численного алгоритма были решены три тестовые задачи: задача о точечном взрыве (задача Седова), задача о взаимодействии ударных волн различной амплитуды, задача об обтекании ступеньки. Рассмотренные в данной работе задачи широко применяются для тестирования расчетных комплексов, предназначенных для моделирования поведения сплошной среды. Так, в задаче Седова проверяются корректность преобразования потенциальной энергии в кинетическую и работа численного метода на сильных ударных волнах. Наличие аналитического решения позволяет адекватно оценить полученные результаты. Решение задачи о взаимодействии двух ударных волн является сильно зависимым от точности описания разрывов и их дистракции. Моделирование течения в области со ступенькой позволяет проверить точность и устойчивость метода при описании высокоскоростных потоков, а также корректный расчет граничных условий.

I. Задача о точечном взрыве (задача Седова) в одномерной области

Постановка задачи [16]. В одномерной области $0 \leq x \leq 0,5$ находится идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$, с параметрами $P = 0$, $\vec{U} = (0, 0)$. В начальный момент времени $t = 0$ в левой ячейке области задается энерговыделение, соответствующее половине полной энергии взрыва $Q = 1$. Граничные условия – твердые стенки.

Расчеты проводились на равномерной сетке с шагом $h = 0,001$. На рис. 2 представлено сравнение распределений плотности и давления в зависимости от координаты на три момента времени, соответствующих точному и численному решениям. Также представлено решение задачи только на лагранжевом этапе метода, что возможно в одномерном случае и позволяет оценить сглаживание профилей после пересчета величин на эйлеровом этапе.

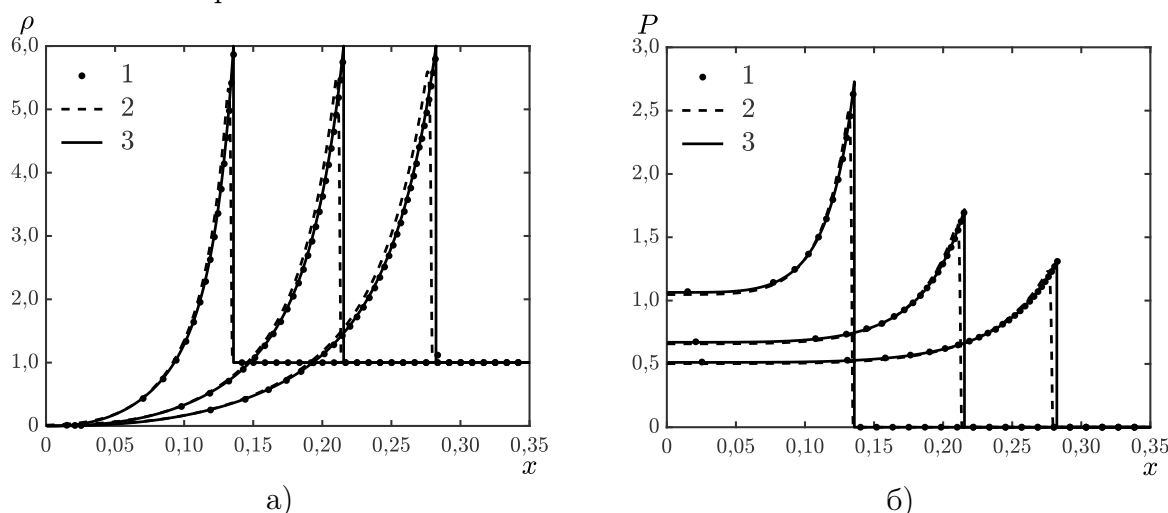


Рис. 2. Профили плотности а) и давления б) на три момента времени $t = 0,05$, $t = 0,10$, $t = 0,15$; 1 – решение лагранжевым методом, 2 – решение лагранжево-эйлеровым методом, 3 – аналитическое решение

II. Задача о точечном взрыве (задача Седова) в двумерной области

Постановка задачи. В двумерной области $0 \leq x \leq 0,1$, $0 \leq y \leq 0,1$ находится идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$, с параметрами $P = 0$, $\vec{U} = (0, 0)$. В начальный момент времени $t = 0$ в четырех центральных ячейках области задается энерговыделение, соответствующее полной энергии взрыва $Q = 1$. Граничные условия – твердые стенки.

Расчеты проводились на квадратной сетке с шагом $h = 0,001$. На рис. 3, 4 представлено сравнение распределений плотности и давления в зависимости от координаты на три момента времени, соответствующих точному и численному решениям. На рис. 4 представлены поля плотности на два момента времени, что позволяет оценить симметричное распространение сферической ударной волны.

III. Взаимодействие ударных волн различной амплитуды

Постановка задачи [17]. В одномерной области $0 \leq x \leq 1$ находится идеальный газ с $\gamma = 1,4$, который при $t = 0$ имеет параметры

$$P = \begin{cases} 1000, & 0 \leq x \leq 0,1, \\ 0,01, & 0,1 < x \leq 0,9, \\ 100, & 0,9 < x \leq 1, \end{cases} \quad \rho = 1, \quad \vec{U} = (0, 0).$$

Граничные условия: все границы – твердые стенки.

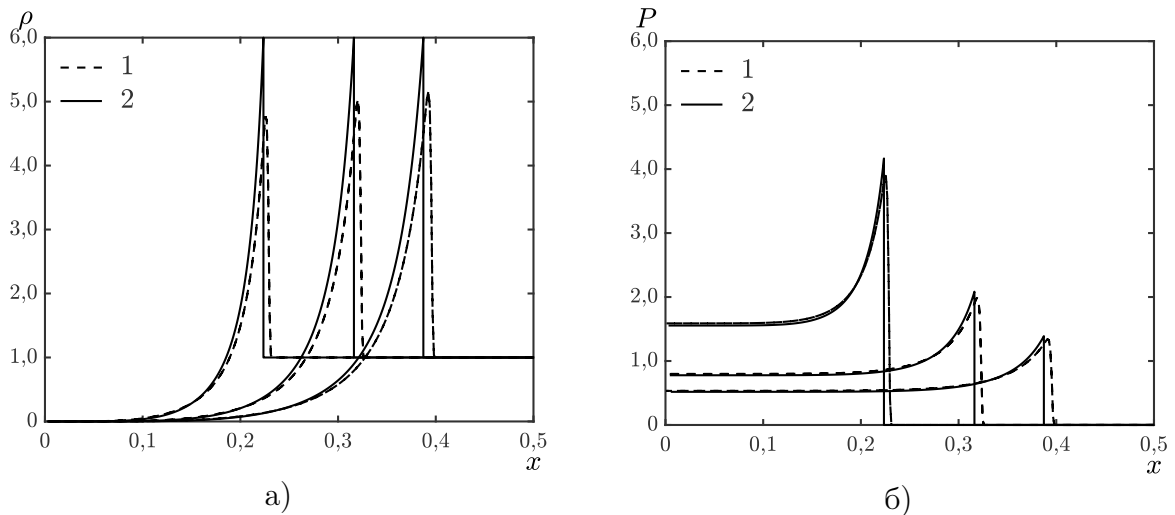


Рис. 3. Профили плотности а) и давления б) на три момента времени $t = 0, 0,05, t = 0, 10, t = 0, 15$; 1 – численное решение, 2 – аналитическое решение

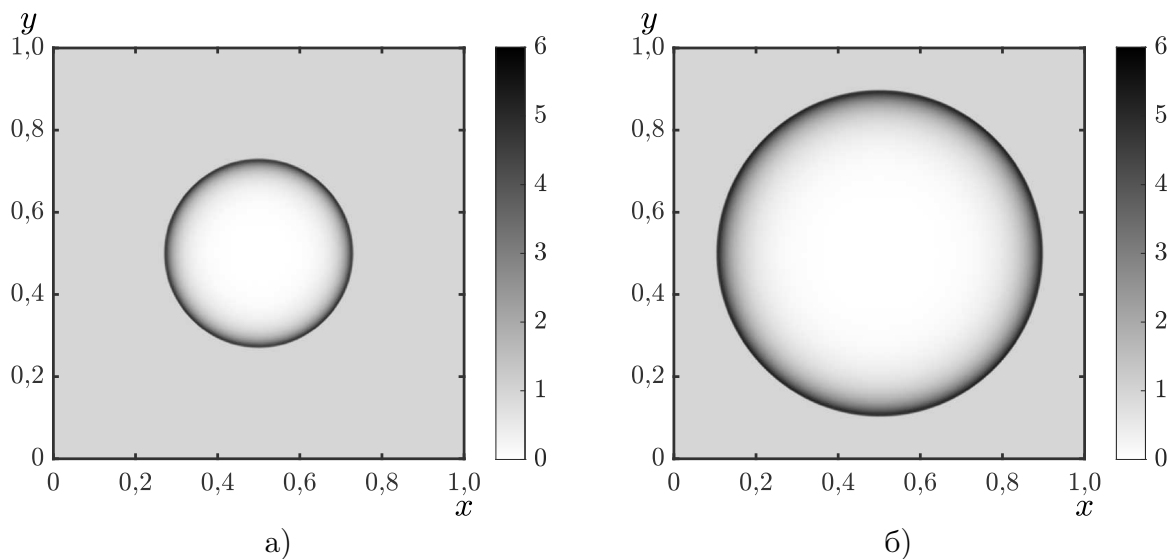


Рис. 4. Поля плотности на моменты времени а) $t = 0, 0,05$, б) $t = 0, 15$

Расчеты проводились на квадратной сетке с шагом $h = 0, 001$. На рис. 5 представлена $x - t$ диаграмма плотности. На левом рисунке размещена увеличенная часть диаграммы, содержащая сложную конфигурацию ударных волн и волн разрежения, что позволяет оценить точность описания разрывов.

IV. Обтекание ступеньки

Постановка задачи [17]. Рассматривается двумерная область $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$ с наличием твердой прямоугольной ступеньки $0,6 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 0,2$. В момент времени $t = 0$ область заполнена идеальным газом с параметрами $\gamma = 1,4, \rho = 1, P = 1, \vec{U} = (3, 0)$. Граничные условия: верхняя и нижняя границы – твердые стенки, левая – входной поток с параметрами газа в начальный момент времени, правая – свободное протекание.

Расчеты проводились на прямоугольной сетке с шагами сетки $h_x = h_y = 0, 001$. На рис. 6–8 представлены поля плотности на три момента времени, на рис. 9 – поле давления.

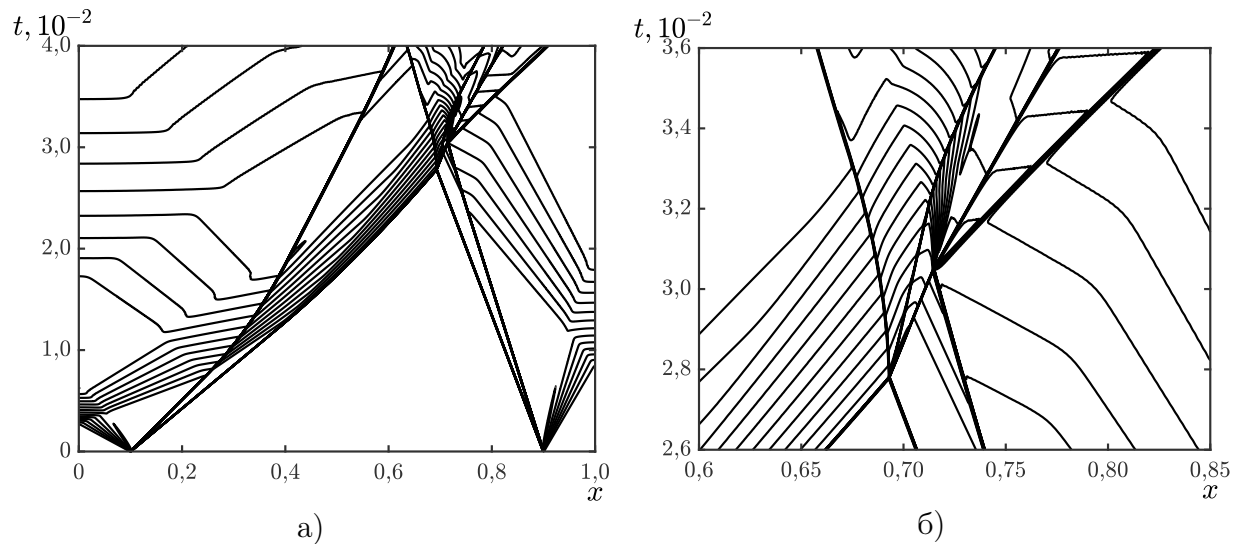


Рис. 5. Изолинии пространственно-временного распределения $\ln(\rho)$

Численные расчеты задачи о Седовском взрыве показали близость профилей термодинамических величин к аналитическому решению. Моделирование задач о взаимодействии ударных волн и обтекании ступеньки показали совпадение положений ударных волн, волн разрежения, ножек Маха с эталонным решением.

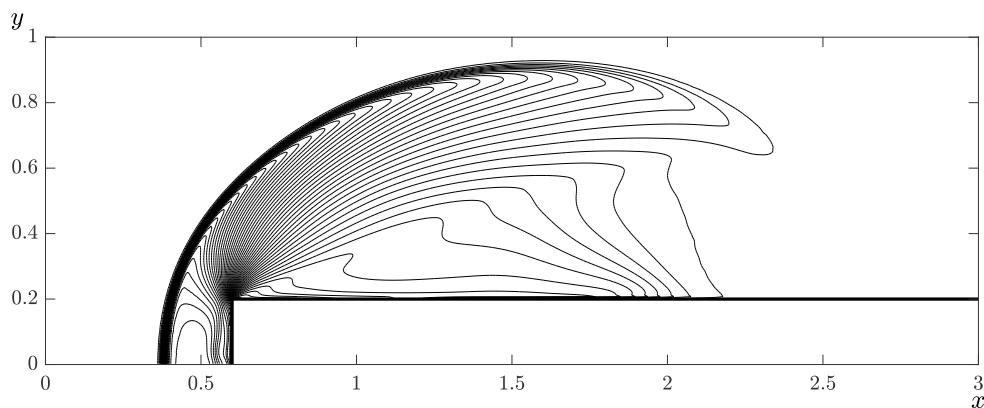


Рис. 6. Изолинии поля плотности на момент времени $t = 0,5$

Заключение

В работе представлена модификация дивергентного метода Куропатенко для одно- и двумерного моделирования поведения сплошной среды в эйлеровых координатах. На лагранжевом этапе метод обладает минимальной дистракцией разрывов и сохранением энтропии на непрерывных решениях. Использование ортогональных сеток существенно снижает алгоритмическую сложность и, соответственно, погрешности, которые непременно возникают из-за использования произвольных сеток.

Результаты тестирования показали высокую точность моделирования течений со сложной структурой взаимодействующих разрывов различных типов – ударных волн и волн разрежения.

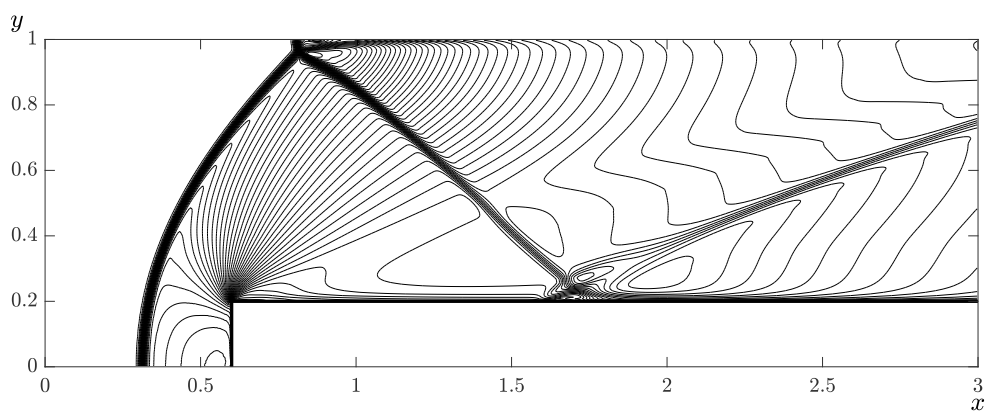


Рис. 7. Изолинии поля плотности на момент времени $t = 2,0$

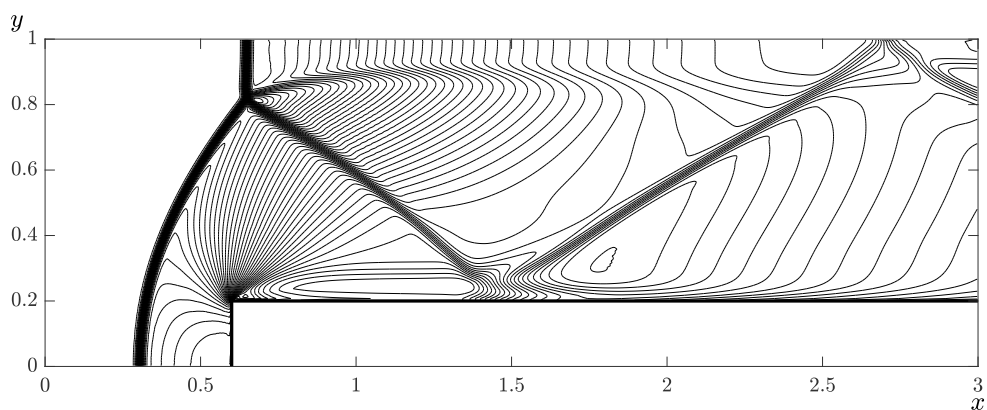


Рис. 8. Изолинии поля плотности на момент времени $t = 4,0$

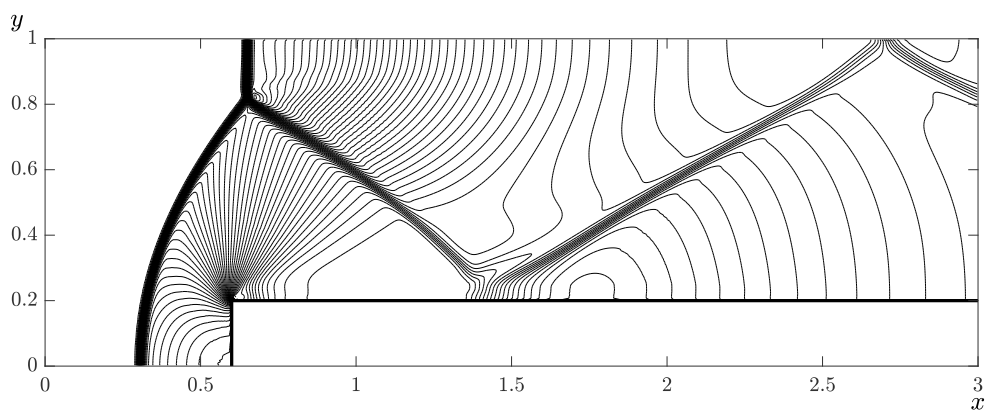


Рис. 9. Изолинии поля давления на момент времени $t = 4,0$

При дальнейшем развитии методики предполагается подключить алгоритм, позволяющий повысить точность численного решения вблизи контактных разрывов, ранее изложенный в [18].

Литература

1. Neumann, J.A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamical Shocks / J. Neumann, R. Richtmayer // Journal of Applied Physics. – 1950. – V. 21, № 3. – P. 232–237.
2. Lax, P.D. Weak Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computations / P.D. Lax // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1954. – V. 7, № 1. – P. 159–193.
3. Годунов, С.К. Разностный метод расчета ударных волн / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – 1957. – Т. 12, № 1. – С. 176–177.
4. Куропатенко, В.Ф. Метод расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко // Доклады Академии наук СССР. – 1960. – Т. 3, № 4. – С. 771–772.
5. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1978.
6. Харлоу, Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики / Ф.Х. Харлоу // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 316–342.
7. Белоцерковский, С.М. Метод крупных частиц в газовой динамике / С.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. – М.: Наука, 1982.
8. Shestakovskaya, E.S. On One Method of Calculating Moving Boundaries in Euler Coordinates / E.S. Shestakovskaya, Ya.E. Starikov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – V. 6, № 4. – P. 44–56.
9. Беляев, П.Е. Влияние экранирующего слоя газозвеси на силовое воздействие ударной волны на жесткую стенку / П.Е. Беляев, Н.Л. Клиначева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 49–55.
10. Садин, Д.В. Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газозвеси / Д.В. Садин // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 112–122.
11. Воронин, Б.Л. Эйлерово-лагранжева методика численного решения трехмерных задач газовой динамики с учетом теплопроводности / Б.Л. Воронин, С.И. Скрыпник, И.Д. Софронов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1988. – № 3. – С. 3–8.
12. Бахрах, С.М. Исследование сходимости лагранжево-эйлеровых разностных схем на примере задачи «Blast Waves» / С.М. Бахрах, И.Ю. Безруков, В.Ф. Спиридонов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2005. – № 2. – С. 60–64.
13. Дарова, Н.С. Комплекс программ ЭГАК. Лагранжево-эйлерова методика расчета двумерных газодинамических течений многокомпонентной среды / Н.С. Дарова, О.А. Дибиров, Г.В. Жарова, А.А. Шанин, Ю.В. Янилкин // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1994. – № 2. – С. 51–58.
14. Беляев, П.Е. Адаптация метода Куропатенко для расчета ударных волн в эйлеровых координатах / П.Е. Беляев, И.Р. Макеева, Е.Е. Пигасов, Д.А. Мастюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 91–103.
15. Куропатенко, В.Ф. Исследование влияния пульсирующего вдува на поток возле обтекаемого тела / В.Ф. Куропатенко, И.И. Кузнецова, И.Р. Макеева // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2001. – № 3. – С. 60–71.

16. Куропатенко, В.Ф. Основы численных методов механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2017.
17. Woodward, P.R. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks / P.R. Woodward, P. Colella // Journal of Computational Physics. – 1984. – V. 54, № 1. – P. 115–173.
18. Hirt, C.W. Volume Of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries / C.W. Hirt, B.D. Nichols // Journal of Computational Physics. – 1981. – V. 39, № 1. – P. 201–225.

Елена Сергеевна Шестаковская, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), shestakovskaiaes@susu.ru.

Ярослав Евгеньевич Стариков, аспирант кафедры «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), starikovie@susu.ru.

Инга Равильевна Макеева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация); начальник отдела, Федеральное государственное унитарное предприятие «Российский федеральный Ядерный Центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина» (г. Снежинск, Российская Федерация), i.r.makeyeva@vniitf.ru.

Поступила в редакцию 15 февраля 2023 г.

MSC 65K05, 76L05, 76M20

DOI: 10.14529/mmp230208

ON A LAGRANGIAN-EULERIAN METHOD CALCULATION OF UNSTEADY FLOWS COMPRESSIBLE MEDIA

E.S. Shestakovskaya¹, Ya.E. Starikov¹, I.R. Makeeva^{1,2}

¹South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

²RFNC-VNIITF, Snezhinsk, Russian Federation

E-mails: shestakovskaiaes@susu.ru, starikovie@susu.ru, i.r.makeyeva@vniitf.ru

In this paper, a numerical method for calculating two-dimensional flows in Eulerian coordinates is implemented, which is based on an explicit Lagrangian-Eulerian difference scheme. The calculation of each time step is carried out in two stages. At the Lagrangian stage, a difference scheme based on the Kuropatenko method is used, which has zero energy dissipation on smooth solutions and minimal distraction on strong discontinuities. At the Eulerian stage, the mesh is rebuilt and all the parameters of the substance are recalculated from the old mesh to the new one in accordance with the laws of conservation of mass, momentum and energy. The developed numerical algorithm has shown its operability when tested on tasks having an analytical or reference solution.

Keywords: Lagrangian-Eulerian method; shock wave calculation method; Kuropatenko method.

References

1. Neumann J., Richtmyer R.D. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks. *Journal of Applied Physics*, 1950, vol. 21, no. 3, pp. 232–237. DOI: 10.1063/1.1699639
2. Lax P. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1954, vol. 7, no. 1, pp. 159–193. DOI: 10.1002/cpa.3160070112
3. Godunov S.K. [Difference Method for Calculating Shock Waves]. *Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, no. 1, pp. 176–177. (in Russian)
4. Kuropatenko V.F. [Shockwave Calculation Method]. *Academy of Sciences of USSR Reports*, 1960, vol. 3, no. 4, pp. 771–772. (in Russian)
5. Rozhdestvenskiy B.L. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasi-Linear Equations and their Applications to Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)
6. Harlow F.H. *Chislennyy metod chastits v yacheykakh dlya zadach gidrodinamiki* [Numerical Particle-in-Cell Method for Hydrodynamic Problems]. *Vychislitel'nye metody v gidrodinamike* [Computational Methods in Hydrodynamics]. Moscow, Mir, 1967, pp. 316–342. (in Russian)
7. Belotserkovskiy S.M., Davydov Ju.M. *Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike* [Method of Large Particles in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)
8. Shestakovskaya E.S., Starikov Ya.E. On One Method of Calculating Moving Boundaries in Euler Coordinates. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, vol. 6, no. 4, pp. 44–56. DOI: 10.14529/jcem190404
9. Belyaev P.E., Klinacheva N.L. Impact of Gas Suspension Shielding Layer on the Force Effect of Shock Waves on a Rigid Wall. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 49–55. (in Russian) DOI: 10.14529/mmph160406
10. Sadin D.V. A Modification of the Large-Particle Method to a Scheme Having the Second Order of Accuracy in Space and Time for Shockwave Flows in a Gas Suspension. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 112–122. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp190209
11. Voronin, B.L., Skrypnik S.I., Sofronov I.D. [Euler-Lagrangian Method for the Numerical Solution of Three-Dimensional Problems of Gas Dynamics with Allowance for Heat Conduction]. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Mathematical Modelling of Physical Processes*, 1988, vol. 3, pp. 3–8. (in Russian)
12. Bahrah S.M., Bezrukov I.Ju., Spiridonov V.F. [Investigation of the Convergence of Lagrangian-Eulerian Difference Schemes on the Example of the Problem “Blast Waves”]. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Mathematical Modelling of Physical Processes*, 2005, vol. 2, pp. 60–64. (in Russian)
13. Darova N.S., Dibirov O.A., Zharova G.V., Shanin A.A., Janilkin Ju.V. [Complex of programs EGAK. Lagrangian-Eulerian Method for Calculating Two-Dimensional Gas-Dynamic Flows of a Multicomponent Medium]. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Mathematical Modelling of Physical Processes*, 1994, no. 2, p. 51–58. (in Russian)
14. Belyaev P.E., Makeeva I.R., Pigasov E.E., Mastyuk D.A. Adaptation of Kuropatenko Method for Calculating Shock Waves in Euler Coordinates. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 91–103. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp210107
15. Kuropatenko V.F., Kuznecova I.I., Makeeva I.R. [Investigation of the Effect of Pulsating Injection on the Flow Near a Streamlined Body]. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Mathematical Modelling of Physical Processes*, 2001, vol. 3, pp. 60–71. (in Russian)
16. Kuropatenko V.F., Shestakovskaya E.S. *Osnovi chislennykh metodov mekhaniki sploshnykh sred* [Essentials of Numerical Methods in Continuum Mechanics]. Chelyabinsk, South Ural State University Publishing Centre, 2017. (in Russian)

17. Woodward P.R., Colella P. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks. *Journal of Computational Physics*, 1984, vol. 54, no. 1, pp. 115–173. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90142-6
18. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume Of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. *Journal of Computational Physics*, 1981, vol. 39, no. 1, pp. 201–225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5

Received February 15, 2023