УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.И. Сидикова

Статья посвящена проблеме разработки метода проекционной регуляризации, исследованию вопросов повышения его эффективности с помощью получения точных по порядку оценок погрешности этого метода и приложению его для решения обратных граничных задач теплообмена. В настоящей работе решается одномерная задача о восстановлении условий теплообмена на одном из концов однородного стержня конечной длины по результатам измерений температуры с конечной ошибкой в точке, находящейся на некотором расстоянии от этого конца. Рассматриваемая обратная задача является некорректной. В работе дается аналитическое решение этой задачи в терминах преобразования Фурье, выписан регуляризующий оператор, указан способ выбора параметра регуляризации и доказана оптимальность по порядку, используемого регуляризующего алгоритма в пространстве L_2. Установлено, что точность приближений имеет порядок $\ln^{-1}\delta$.

В настоящее время, при использовании вычислительных методов все больше внимания уделяется оценкам погрешности применяемых алгоритмов, их точности и оптимальности. Особую роль эти вопросы играют при численном расчете некорректных задач с использованием различных регуляризаторов. В работе разработана новая технология получения оценки погрешности при решении обратных граничных задач теплообмена. Результаты могут быть использованы как при реальных численных расчетах тепловых характеристик обратных задач теплообмена,так и при разработке новых регуляризующих алгоритмов подобных задач.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача, преобразование Фурье.

Введение

При решении обратных и некорректно поставленных задач важное место занимает математическое моделирование, более адекватно отражающее суть изучаемого процесса или явления. Это приводит к необходимости использования более сложных моделей, учитывающих неоднородность изучаемого объекта, его взаимодействие с окружающей средой, нелинейность теплового процесса, а также многие другие моменты. Для численного решения некорректно поставленных обратных задач требуется разработка специальных методов, демонстрирующих высокую точность. Особое место, в связи с этим, занимает теория оценивания методов решения некорректно поставленных задач, а также получение точных и точных по порядку оценок погрешности приближенных решений [1].

1. Постановка обратной задачи

Для исследования обратной задачи для уравнения теплопроводности рассмотрим соответствующую ей прямую задачу. Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0, \tag{1}$$

решение $u(x,t) \in C([0,1] \times [0,\infty)) \bigcap C^{2,1}((0,1) \times (0,\infty))$,

$$u(x,0) = 0; \qquad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t) = h(t); \qquad t \ge 0 \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \kappa u(1,t) = 0; \qquad \kappa > 0, \qquad t \ge 0, \tag{4}$$

где

$$h(t) \in C^2[0,\infty),\ h(0) = h'(0) = 0, \tag{5}$$

и существует число $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \ge t_0$

$$h(t) = 0. \tag{6}$$

Факт существования классического решения задачи (1)−(4) для функции $u(x,t)$ доказан в работе [2].

Теперь перейдем к постановке обратной задачи. Рассмотрим задачу (1) − (3), в которой функция $h(t)$ нам не известна и подлежит определению, а вместо нее в точке $x_1 \in (0,1)$ измеряется температура $f(t)$ стержня, соответствующая данному процессу

$$u(x_1,t) = f(t); \qquad t \ge 0. \tag{7}$$

Пусть множество M_r определено формулой

$$M_r = \left\{h(t)\colon h(t) \in L_2[0,\infty),\ \int_0^\infty |h(t)|^2 dt + \int_0^\infty |h'(t)|^2 dt \le r^2\right\}, \tag{8}$$

где $h'(t)-$ производная от функции $h(t) \in W_2^1[0,\infty) \bigcap C^2[0,\infty)$, а r известное положительное число. Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$, существует функция $h_0(t)$, удовлетворяющая условиям, сформулированным выше, и такая, что при $h(t) = h_0(t)$ существует решение $u(x,t)$ задачи (1) − (4), удовлетворяющее условиям (7), но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in L_2[0,\infty) \bigcap L_1[0,\infty)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\|_{L_2} \le \ \delta. \tag{9}$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_r, определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1)–(3), (7) и оценить уклонение $\|h_\delta - h_0\|_{L_2}$ приближенного решения $h_\delta(t)$ от точного $h_0(t)$.

2. Сведение задачи (1)–(3), (7) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть $\overline{H} = L_2[0,\infty) + iL_2[0,\infty)$ над полем комплексных чисел, а $F-$ оператор , отображающий $L_2[0,\infty)$ в $\overline{H}$ и определяемый формулой

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty h(t) e^{-i\tau t} dt; \qquad \tau \ge 0. \tag{10}$$

Из теоремы Планшереля [3] следует, что оператор F, определяемый формулой (10), изометричен.

Применяя преобразование Фурье F к правой и левой части уравнения (1) и условиям (7), а также используя (2), получим

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(x,\tau)}{\partial x^2} = i\tau\hat{u}(x,\tau); \qquad x \in (0,1), \qquad \tau \geq 0, \tag{11}$$

где $\hat{u}(x,\tau) = F[u(x,t)]$.

Из (4) и (7) следует

$$\frac{\partial \hat{u}(1,\tau)}{\partial x} + \kappa\hat{u}(1,\tau) = 0, \qquad \tau \geq 0 \tag{12}$$

и

$$\hat{u}(x_1,\tau) = \hat{f}(\tau), \qquad \tau \geq 0, \tag{13}$$

где $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$.

Из леммы , доказанной в [2], следует, что решение $\hat{u}(x,\tau)$ задачи (11) – (13) непрерывно в полосе $[0,1] \times [0,\infty)$. Решение уравнения (11) имеет вид

$$\hat{u}(x,\tau) = A(\tau)e^{\mu_0 x\sqrt{\tau}} + B(\tau)e^{-\mu_0 x\sqrt{\tau}}, \tag{14}$$

где $\mu_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, а $A(\tau)$ и $B(\tau)$ произвольные функции.

Из (12) – (14) следует, что

$$\hat{u}(0,\tau) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\hat{f}(\tau), \tag{15}$$

$\tau \geq 0$.

Обозначим знаменатель правой части формулы (15) через $\psi(\tau)$

$$\psi(\tau) = \operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\kappa \leq \dfrac{1}{2}$. *Тогда существует число* $c_1 > 0$ *такое, что для любого* $\tau \geq 0$

$$|\psi(\tau)| \geq c_1.$$

Доказательство. Так как

$$Re[\psi(\tau)] = \left\{\cos(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\left[\sqrt{\frac{2\kappa^2}{\tau}}\operatorname{sh}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \operatorname{ch}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\right] + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\tau}}\operatorname{ch}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\sin(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\right\}, \tag{16}$$

$$Im[\psi(\tau)] = \left\{\sin(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\left[\sqrt{\frac{2\kappa^2}{\tau}}\operatorname{ch}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \operatorname{sh}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\right] - \right.$$

$$-\sqrt{\frac{2\kappa^2}{\tau}}\,\mathrm{sh}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\,\cos(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\Big\}, \tag{17}$$

то из (16) следует, что при условии $0 \le (1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \le \frac{\pi}{3}$, $\cos(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \ge \frac{1}{2}$ и

$$|\psi(\tau)| \ge \cos(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\,\mathrm{ch}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \ge \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Если $\frac{\pi}{3} \le (1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \le \frac{\pi}{2}$, то $\sin(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \ge \frac{1}{2}$ и из (16) следует, что

$$|\psi(\tau)| \ge \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\tau}}\sin(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\,\mathrm{ch}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \ge \frac{(1-x_1)\kappa}{\pi}\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{3}. \tag{19}$$

Если $\frac{\pi}{2} \le (1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \le \frac{3\pi}{4}$, то $\sin(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ и из (16) следует, что

$$|\psi(\tau)| \ge \frac{(1-x_1)\,2\sqrt{2}}{3\pi}\,\kappa\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Если $\frac{3\pi}{4} \le (1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \le \pi$, то $-\cos(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ и из (17) следует, что

$$|\psi(\tau)| \ge \frac{(1-x_1)\,\sqrt{2}}{2\pi}\,\kappa\,\mathrm{sh}\,\frac{3\pi}{4}. \tag{21}$$

Таким образом, из (18) – (21) следует существование числа $c_2 > 0$ такого, что для любого $\tau \in \left[0, \frac{2\pi^2}{(1-x_1)^2}\right]$ $\quad |\psi(\tau)| \ge c_2$.

Так как $\kappa \le \frac{1}{2}$, а

$$|\psi(\tau)| \ge |\,\mathrm{ch}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}| - \frac{\kappa}{\sqrt{\tau}}|\,\mathrm{sh}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}|,$$

то нетрудно проверить существование числа $c_3 > 0$ такого, что для любого $\tau \ge \frac{2\pi^2}{(1-x_1)^2}$

$$|\psi(\tau)| \ge c_3. \tag{22}$$

Из (18) и (22) следует утверждение леммы. $\square$

Так как функции $\mathrm{ch}\,\mu_0\sqrt{\tau}+(\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\,\mathrm{sh}\,\mu_0\sqrt{\tau}$ и $\mathrm{ch}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+(\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\,\mathrm{sh}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}$ непрерывны на $[0,\infty)$, то из леммы 1 следует непрерывность функции

$$\frac{\mathrm{ch}\,\mu_0\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\,\mathrm{sh}\,\mu_0\sqrt{\tau}}{\mathrm{ch}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\,\mathrm{sh}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}$$

на этой полупрямой.

Таким образом, для любого $\overline{\tau} > 0$ найдется число $c_{\overline{\tau}} > 0$ такое, что для любого $\tau \in [0, \overline{\tau}]$

$$\left|\frac{\mathrm{ch}\,\mu_0\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\,\mathrm{sh}\,\mu_0\sqrt{\tau}}{\mathrm{ch}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa\,\mathrm{sh}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\right| \le c_{\overline{\tau}}. \tag{23}$$

Обозначим $\hat{u}(0,\tau)$ через $\hat{h}(\tau)$ и преобразуем формулу (15)

$$\hat{h}(\tau)=\frac{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau+i\kappa^2}}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\tau}+\frac{\kappa}{\mu_0\sqrt{\tau+i\kappa^2}}\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau+i\kappa^2}}\operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+\frac{\kappa}{\mu_0\sqrt{\tau+i\kappa^2}}\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\hat{f}(\tau),\quad \tau\geq 0. \tag{24}$$

Пусть $\beta(\tau)$ определена формулой

$$\operatorname{sh}\beta(\tau)=\frac{\kappa}{\mu_0\sqrt{\tau+i\kappa^2}}. \tag{25}$$

Из свойств функции $Arsh$, доказанных в [4] на стр. 84–86, следует разрешимость (25), и что функция $\beta(\tau)$ отображает комплексную плоскость $\mathbb{C}$, из которой выброшены лучи $1\leq y<\infty$ и $-\infty<y\leq -1$ в полосу $-\dfrac{\pi}{2}<v<\dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, из (25) следует существование функции $\beta(\tau)$, удовлетворяющей соотношению (25).

Кроме того, (25) следует, что

$$\beta(\tau)\to 0 \qquad \text{при} \qquad \tau\to\infty, \tag{26}$$

а из (24), что

$$\hat{h}(\tau)=\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]\cdot\operatorname{ch}^{-1}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]\hat{f}(\tau). \tag{27}$$

Далее, используя формулу (27), определим оператор T, положив

$$T\hat{f}(\tau)=\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]\cdot\operatorname{ch}^{-1}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]\hat{f}(\tau). \tag{28}$$

$$D(T)=\{\hat{f}(\tau)\ :\ \hat{f}(\tau)\in\overline{H}\ \text{ и }\ T\hat{f}(\tau)\in\overline{H}\}. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует, что оператор T линеен, неограничен и замкнут.

$$T\hat{f}(\tau)=\hat{h}(\tau). \tag{30}$$

Пусть $\hat{h}_0(\tau)=T\hat{f}_0(\tau)$, $\hat{f}_0(\tau)=F[f_0(t)]$, а $\hat{f}_\delta(\tau)=F[f_\delta(t)]$.

Из формулы (9) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta-\hat{f}_0\|_{\overline{H}}\ \leq\ \delta. \tag{31}$$

Обозначим через $\hat{M}_r$ множество из $\overline{H}$ такое, что $\hat{M}_r=F[M_r]$, и

$$\hat{M}_r=\left\{\hat{h}(\tau):\hat{h}(\tau)\in\overline{H},\int_0^\infty(1+\tau^2)\ |\hat{h}(\tau)|^2d\tau\leq\ r^2\right\}. \tag{32}$$

Из того, что $h_0(t)\in M_r$ будет следовать, что

$$\hat{h}_0(\tau)\in\hat{M}_r. \tag{33}$$

3. Решение задачи (30) –(33)

Лемма 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\tau_\varepsilon > 0$ *такое, что для любого* $\tau \geq \tau_\varepsilon$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right) e^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}} \leq \frac{|\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|}{|\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right) e^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}}. \tag{34}$$

Доказательство. Так как $\beta(\tau) = \beta_1(\tau) + i\beta_2(\tau)$, то

$$|\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]| = \sqrt{\operatorname{ch}^2\left[\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right] - \sin^2\left[\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_2(\tau)\right]}, \tag{35}$$

$$|\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]| = \sqrt{\operatorname{sh}^2\left[(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right] + \cos^2\left[(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_2(\tau)\right]}. \tag{36}$$

Из (35) и (36) следует, что

$$\frac{|\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|}{|\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|} \leq \frac{\operatorname{ch}\left[\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right]}{\operatorname{sh}\left[(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right]}, \tag{37}$$

а

$$\frac{\operatorname{ch}\left[\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right]}{\operatorname{sh}\left[(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right]} = \frac{e^{\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)}\left[1 + e^{-\sqrt{2\tau} - 2\beta_1(\tau)}\right]}{e^{(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)}\left[1 - e^{-(1-x_1)\sqrt{2\tau} - 2\beta_1(\tau)}\right]}. \tag{38}$$

Так как из (26) следует, что $\beta(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то из (37) и (38) следует, что для любого $\mu > 0$ найдется $\tau_1 > 0$ такое, что для любого $\tau \geq \tau_1$

$$\sup\{e^{-\sqrt{2\tau} - 2\beta_1(\tau)}, e^{-(1-x_1)\sqrt{2\tau} - 2\beta_1(\tau)}\} < \mu. \tag{39}$$

Из (39) следует, что $\tau_1 = \dfrac{1}{2}\ln^2\dfrac{1}{\mu}$.

Таким образом, из (37)–(39) следует, что для любого $\tau \geq \tau_1$

$$\frac{|\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|}{|\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|} \leq \frac{1+\mu}{1-\mu} e^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}}. \tag{40}$$

Аналогично, (37) можно показать, что

$$\frac{|\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|}{|\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|} \geq \frac{\operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right]}{\operatorname{ch}\left[(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right]}, \tag{41}$$

а

$$\frac{\operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right]}{\operatorname{ch}\left[(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)\right]} = \frac{e^{\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)}[1 - e^{-\sqrt{2\tau} - 2\beta_1(\tau)}]}{e^{(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} + \beta_1(\tau)}[1 + e^{-(1-x_1)\sqrt{2\tau} - 2\beta_1(\tau)}]}. \tag{42}$$

Из (39), (41) и (42) следует, что при $\tau \geq \tau_1$

$$\frac{|\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]|}{|\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]|} \geq \frac{1-\mu}{1+\mu}e^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}}. \tag{43}$$

Нетрудно проверить, что если мы положим $\mu = \dfrac{\varepsilon}{8+3\varepsilon}$, то из (40) и (43) будет следовать утверждение леммы. □

Рассмотрим две комплекснозначные функции $\psi_1(\tau)$ и $\psi_2(\tau) \in C[a,\infty)$ и $|\psi_i(\tau)| \to \infty$ при $\tau \to \infty,\ i=1,2$ и введем операторы T_1 и T_2, действующие из комплексного пространства $L_2[a,\infty)$ в себя, и определяемые формулами

$$T_i f(\tau) = \psi_i(\tau) f(\tau); \qquad i=1,2. \tag{44}$$

В дальнейшем операторы T_i будем предполагать инъективными, а через $\omega^i(\delta,r)$ обозначим соответствующие модули непрерывности операторов T_i на классе корректности M_r.

$$\omega^i = \sup\{\|T_i f\| \ :\ f \in T_i^{-1}(M_r),\ \|f\| \leq \delta\}. \tag{45}$$

Лемма 3. *Пусть T_i операторы, определенные формулой (44) и для любого $\tau \in [a,\infty)$ $\quad |\psi_1(\tau)| \leq |\psi_2(\tau)|$. Тогда $\omega^1(\delta,r) \leq \omega^2(\delta,r)$.*

Доказательство леммы сразу следует из определения модулей непрерывности $\omega^i(\delta,r)$ см. (45).

Теперь для исследования и решения задачи (30)–(33) разобьем ее на две. Первая из этих задач является корректной, а оператор второй удовлетворяет условиям (34).

Таким образом, первая из задач имеет вид

$$T^1\hat{f}^1(\tau) = \frac{\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]}{\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]}\hat{f}^1(\tau) = \hat{h}^1(\tau); \quad 0 \leq \tau \leq \tau_\varepsilon, \tag{46}$$

где τ_ε описано в лемме (2), $\hat{f}^1(\tau) = \hat{f}(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq \tau_\varepsilon$ и $\hat{h}^1(\tau) = \hat{h}(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq \tau_\varepsilon$.

Из леммы (1) и соотношений (24)–(26) следует, что при $\kappa \leq \dfrac{1}{2}$ функция $\dfrac{\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]}{\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]}$ непрерывна на отрезке $[0,\tau_\varepsilon]$, а из формулы (46), что оператор T^1 ограничен в пространстве $\overline{H}_1 = L_2[0,\tau_\varepsilon] + iL_2[0,\tau_\varepsilon]$, и существует число $c_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|T^1\| \leq c_\varepsilon. \tag{47}$$

Вторая задача является задачей вычисления значений неограниченного оператора T^2, определяемого формулой

$$T^2\hat{f}^2(\tau) = \frac{\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]}{\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+\beta(\tau)]}\hat{f}^2(\tau) = \hat{h}^2(\tau), \tag{48}$$

где $\tau \geq \tau_\varepsilon$, $\hat{f}^2(\tau) = \hat{f}(\tau)$ при $\tau \geq \tau_\varepsilon$, а $\hat{h}^2(\tau) = \hat{h}(\tau)$ при $\tau \geq \tau_\varepsilon$, и действующего в пространстве $\overline{H}_2 = L_2[\tau_\varepsilon,\infty) + iL_2[\tau_\varepsilon,\infty)$.

Для решения задачи (48) используем семейство операторов $\{T^2_\alpha \ :\ \alpha > \tau_\varepsilon\}$, определяемое формулой

$$T^2_\alpha\hat{f}^2(\tau) = \begin{cases} T^2\hat{f}^2(\tau); & \tau_\varepsilon \leq \tau \leq \alpha, \\ 0 \quad ; & \tau > \alpha. \end{cases} \tag{49}$$

Приближенное значение $\hat{h}_\delta^{2,\alpha}(\tau)$ задачи (48) определим формулой

$$\hat{h}_\delta^{2,\alpha}(\tau) = T_\alpha^2 \hat{f}_\delta^2(\tau); \quad \tau \geq \tau_\varepsilon. \tag{50}$$

Для выбора параметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta, r)$ в формуле (50) используем условие

$$\hat{h}_0^2(\tau) \in \hat{M}_r^2, \tag{51}$$

где

$$\hat{M}_r^2 = \left\{ \hat{h}^2(\tau) \ : \ \int_{\tau_\varepsilon}^{\infty} (1+\tau^2)|\hat{h}^2(\tau)|^2 d\tau \leq r^2 \right\}. \tag{52}$$

Из (48)–(51) следует, что

$$\sup\{\|T_\alpha^2 \hat{f}_\delta^2(\tau) - T^2 \hat{f}_0^2(\tau)\|^2 \ : \ \hat{f}_0^2(\tau) \in [T^2]^{-1}(\hat{M}_r^2), \ \|\hat{f}_\delta^2 - \hat{f}_0^2\| \leq \delta\} = \Delta_1^2(\alpha) + \|T_\alpha^2\|^2 \delta^2, \tag{53}$$

где $[T^2]^{-1}$ оператор, обратный T^2 , а

$$\Delta_1(\alpha) = \sup\{\|T_\alpha^2 \hat{f}_0^2(\tau) - T^2 \hat{f}_0^2(\tau)\| : \ \hat{f}_0^2(\tau) \in [T^2]^{-1}(\hat{M}_r^2)\}. \tag{54}$$

Теперь перейдем к оценке $\|T_\alpha^2\|$.

Лемма 4. *При сформулированных выше условиях справедливы соотношения*

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right) e^{x_1\sqrt{\alpha/2}} \leq \|T_\alpha^2\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right) e^{x_1\sqrt{\alpha/2}}, \quad \alpha \geq \tau_\varepsilon.$$

Доказательство. Из определения нормы оператора

$$\|T_\alpha^2\| = \sup_{\tau_\varepsilon \leq \tau \leq \alpha} \frac{|\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|}{|\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]|}. \tag{55}$$

Из (55) и леммы (2) следует утверждение леммы. □

Пусть

$$\omega^2(\alpha) = \sup\left\{ \int_\alpha^\infty |\hat{h}_0^2(\tau)|^2 \tau \ : \ \hat{h}_0^2(\tau) \in \hat{M}_r^2 \right\}. \tag{56}$$

Тогда из (52), (54) и (56) следует, что

$$\Delta_1^2(\alpha) = \omega^2(\alpha). \tag{57}$$

Из (52) следует, что при условии $\hat{h}_0^2(\tau) \in \hat{M}_r^2$

$$\int_{\tau_\varepsilon}^\infty (1+\tau^2)|\hat{h}_0^2(\tau)|^2 d\tau \leq r^2. \tag{58}$$

Из (56) и (58) следует, что

$$\omega^2(\alpha) = \frac{r^2}{1+\alpha^2}. \tag{59}$$

Так как

$$\Delta_\delta[T^2_\alpha] = \sup\{\|T^2_\alpha \hat f^2_\delta(\tau) - T^2 \hat f^2_0(\tau)\| \ : \quad \hat f^2_0(\tau) \in [T^2]^{-1}(\hat M^2_r), \quad \|\hat f^2_\delta - \hat f^2_0\| \le \delta\}, \tag{60}$$

то из (60) следует, что

$$\Delta^2_\delta[T^2_\alpha] = \frac{r^2}{1+\alpha^2} + \|T^2_\alpha\|^2\delta^2, \tag{61}$$

а из леммы 4 и (61) следует

$$\frac{r^2}{1+\alpha^2} + \delta^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)^2 e^{2x_1\sqrt{\alpha/2}} \le \quad \Delta^2_\delta[T^2_\alpha] \quad \le \frac{r^2}{1+\alpha^2} + \delta^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)^2 e^{2x_1\sqrt{\alpha/2}}. \tag{62}$$

Параметр регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta, r)$ в формуле (50) выберем из условия

$$\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}} = e^{x_1\sqrt{\alpha/2}}\delta. \tag{63}$$

Через $\alpha = \alpha(\delta, r)$ обозначим значение параметра регуляризации, выбранное из уравнения

$$\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \|T^2_\alpha\|\delta. \tag{64}$$

Для получения окончательной оценки погрешности приближенного значения введем еще два значения параметра регуляризации $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_1(\delta, r)$ и $\overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}_2(\delta, r)$, выбранные, соответственно, из уравнений

$$\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\alpha/2}}\delta \tag{65}$$

и

$$\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\alpha/2}}\delta. \tag{66}$$

Из леммы 4 и соотношений (60)–(66) следует существование $\delta_\varepsilon > 0$ такого, что $\overline{\alpha}_2(\delta_\varepsilon, r) \ge \alpha_\varepsilon$, а следовательно, для любого $\delta < \delta_\varepsilon$

$$\overline{\alpha}_2(\delta, r) \le \overline{\alpha}(\delta, r) \le \overline{\alpha}_1(\delta, r) \tag{67}$$

и

$$\overline{\alpha}_2(\delta, r) \le \alpha(\delta, r) \le \overline{\alpha}_1(\delta, r). \tag{68}$$

Из (61) и (64) следует, что

$$\Delta_\delta[T^2_{\alpha(\delta,r)}] = \sqrt{2}\|T^2_{\alpha(\delta,r)}\|\delta, \tag{69}$$

аналогично, из леммы 4 и соотношений (63)– (66) следует, что для любого $\delta < \delta_\varepsilon$

$$\sqrt{2}\ \delta\left(1 - \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}} \le \ \Delta_\delta[T^2_{\alpha(\delta,r)}] \ \le \sqrt{2}\ \delta\left(1 + \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_2(\delta,r)}{2}}} \tag{70}$$

и

$$\sqrt{2}\ \delta\left(1 - \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}} \le \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le \sqrt{2}\ \delta\left(1 + \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_2(\delta,r)}{2}}}. \tag{71}$$

Теорема 1. *Для любого $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ справедливы соотношения*

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}] \le \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}].$$

Доказательство. Так как

$$\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}] + |\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] - \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}]| \tag{72}$$

и

$$\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \ge \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}] - |\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] - \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}]|. \tag{73}$$

Из (72) и (73) следует, что для доказательства теоремы достаточно оценить величину $|\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] - \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}]|$.

Из (65), (66) и (67) следует, что

$$|\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] - \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}]| \le \sqrt{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}(\delta,r)}{2}}}\delta - \sqrt{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta, \tag{74}$$

а из (67) и (74) следует

$$|\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] - \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}]| \le \sqrt{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta - \sqrt{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta. \tag{75}$$

Из (75) следует, что

$$|\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] - \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}]| \le \sqrt{2}\ \frac{\varepsilon}{2}\ e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta. \tag{76}$$

Из (72), (73) и (76) следует утверждение теоремы. □

Теорема 2. *Для метода* $\{T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)} : 0 < \delta \le \delta_\varepsilon\}$, *определяемого формулами* (49) *и* (63), *справедлива точная по порядку оценка погрешности*

$$\sqrt{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta \le \Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le \sqrt{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta.$$

Доказательство. Из теоремы 1 и соотношений (61) и (67) следует, что для любого $\delta \in (0, \delta_\varepsilon]$

$$\Delta^2_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le \frac{r^2}{1+\overline{\alpha}^2(\delta,r)} + \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta^2 \tag{77}$$

и

$$\Delta^2_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \ge \frac{r^2}{1+\overline{\alpha}_1^2(\delta,r)} + \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta^2. \tag{78}$$

Из (63), (66), (77) и (78) следует, что

$$\Delta^2_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}(\delta,r)}{2}}}\delta^2 + \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta^2 \tag{79}$$

и

$$\Delta^2_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \ge \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta^2 + \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta^2. \tag{80}$$

Из (67) следует, что

$$e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}(\delta,r)}{2}}} < e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}, \tag{81}$$

а из (79) и (81), что

$$\Delta^2_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta^2 + \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 e^{2x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta^2. \tag{82}$$

Из (80) и (82) следует утверждение теоремы. □

Теорема 3. *Метод* $\{T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)} \ : \ 0<\delta\le\delta_\varepsilon\}$ *решения задачи* (48), *определяемый формулами* (49) *и* (63), *оптимален по порядку на классе* $\hat{M}^2_r$, *и для него справедлива оценка погрешности*

$$\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}]\le\sqrt{2}\ (1+\varepsilon)\ \Delta^{opt}_\delta.$$

Доказательство. Из лемм 2 и 3 следует, что

$$\omega^1(\delta,r)\le\omega^2(\delta,r), \tag{83}$$

где $\omega^2(\delta,r)=\sup\{\|T^2\hat{f}^2(\tau)\| \ : \ \hat{f}^2(\tau)\in[T^2]^{-1}(\hat{M}^2_r),\ \|\hat{f}^2(\tau)\|\le\delta\}$,
а

$$\begin{gathered}\omega^1(\delta,r)=\sup\left\{\left\|\left(1-\tfrac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}}\hat{f}^2(\tau)\right\| \ :\right.\\ \left.\hat{f}^2(\tau)\in\left(1-\tfrac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)^{-1}e^{-x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}}(\hat{M}^2_r),\ \ \|\hat{f}^2(\tau)\|\le\delta\right\}.\end{gathered} \tag{84}$$

Из (32) и (84) следует, что

$$\omega^2(\delta,r)=\frac{r}{\sqrt{1+\overline{\alpha}_1^2(\delta,r)}}, \tag{85}$$

где $\overline{\alpha}_1(\delta,r)$ определена уравнением (65).

Из (65) и (85) следует, что

$$\omega^1(\delta,r)=\left(1-\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta. \tag{86}$$

Так как

$$\Delta^{opt}_\delta\ge\omega^1(\delta,r), \tag{87}$$

то из (83), (86) и (87) имеем

$$\Delta^{opt}_\delta\ge\left(1-\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right)e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta. \tag{88}$$

Из теоремы 2 и соотношения (88) следует утверждение теоремы. □

Так как из соотношения (65) следует, что

$$e^{x_1\sqrt{\frac{\overline{\alpha}_1(\delta,r)}{2}}}\delta=\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\overline{\alpha}_1^2(\delta,r)}}, \tag{89}$$

то из теоремы 2 следует, что при $\delta\le\delta_\varepsilon$

$$\Delta_\delta[T^2_{\overline{\alpha}(\delta,r)}]\le\sqrt{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\frac{r}{\sqrt{1+\overline{\alpha}_1^2(\delta,r)}}. \tag{90}$$

Для получения асимптотики оценки (90) рассмотрим два уравнения

$$e^{x_1\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{r}{\delta} \tag{91}$$

и

$$e^{2x_1\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{r}{\delta}. \tag{92}$$

Решения уравнений (91) и (92) обозначим через $\hat{\alpha}_1(\delta, r)$ и $\hat{\alpha}_2(\delta, r)$.

Тогда из (65), (91) и (92) следует, что при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\hat{\alpha}_2(\delta, r) \leq \overline{\alpha}_1(\delta, r) \leq \hat{\alpha}_1(\delta, r). \tag{93}$$

Из (91) и (92) следует, что $\hat{\alpha}_1(\delta, r) = \dfrac{2}{x_1^2} \ln^2 \dfrac{r}{\delta}$ и $\hat{\alpha}_2(\delta, r) = \dfrac{1}{2x_1^2} \ln^2 \dfrac{r}{\delta}$, а из (93), что

$$\overline{\alpha}_1(\delta, r) \sim \ln^2 \delta \qquad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{94}$$

Из соотношения (94) следует

Теорема 4. *Для любого $r > 0$ существуют числа $c_1(r),\ c_2(r) > 0$ и $\delta_1 \in (0, \delta_\varepsilon)$ такие, что для любого $\delta \in (0, \delta_1)$ справедливы оценки*

$$c_1(r) \ln^2 \delta \leq \sqrt{1 + \overline{\alpha}_1^2(\delta, r)} \leq c_2(r) \ln^2 \delta.$$

Далее решение задачи (46) обозначим через

$$h_\delta^1(\tau) = T^1 \hat{f}_\delta^1(\tau). \tag{95}$$

Из (47) и (95) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta^1(\tau) - \hat{h}_0^1(\tau)\| \leq c_\varepsilon \delta, \tag{96}$$

где $\hat{h}_0^1(\tau) = T^1 \hat{f}_0^1(\tau)$.

Решение задачи (30)–(33) определим формулой

$$\hat{h}_\delta(\tau) = \hat{h}_\delta^1(\tau) + \hat{h}_\delta^{2,\overline{\alpha}(\delta,r)}(\tau). \tag{97}$$

Тогда из соотношений (90), (96) и (97) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq \sqrt{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{r}{\sqrt{1 + \overline{\alpha}_1^2(\delta, r)}} + c_\varepsilon \delta. \tag{98}$$

Заметим, что функцию $\hat{h}_\delta(\tau)$, определяемую формулой (97), можно определить иначе, введя регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha\ :\ \alpha > 0\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha \hat{f}(\tau) = \begin{cases} T\hat{f}(\tau) & ; \quad 0 \leq \tau \leq \alpha, \\ \quad 0 & ; \quad \tau > \alpha. \end{cases} \tag{99}$$

Тогда

$$\hat{h}_\delta(\tau) = T_\alpha \hat{f}_\delta(\tau). \tag{100}$$

Если значение параметра регуляризации $\overline{\alpha}(\delta, r)$ в формуле (100) выбрать из условия

$$\frac{r}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = e^{x_1\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\delta, \tag{101}$$

то для решения $\hat{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta,r)}(\tau)$ задачи (30)–(33) будет справедлива оценка

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \le \sqrt{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{r}{\sqrt{1 + \overline{\alpha}_1^2(\delta, r)}} + c_\varepsilon \delta. \tag{102}$$

Из теоремы 4 следует существование числа $\delta_0 < \delta_\varepsilon$ такого, что для любого $\delta < \delta_0$

$$c_\varepsilon \delta < \sqrt{2} \ \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} \ \cdot \frac{r}{\sqrt{1 + \overline{\alpha}_1^2(\delta, r)}}. \tag{103}$$

Тогда из соотношений (102) и (103) будет следовать теорема

Теорема 5. *Метод* $\{T_{\overline{\alpha}(\delta,r)} \ : \ 0 < \delta < \delta_0\}$ *решения задачи* (30)–(33) *оптимален по порядку на классе* $\hat{M}_r$, *и для него справедлива оценка*

$$\Delta_\delta[T_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le \sqrt{2}(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \frac{r}{\sqrt{1 + \overline{\alpha}_1^2(\delta, r)}},$$

которая является точной по порядку.

Теперь рассмотрим подпространство $\overline{H}_0$, определяемое формулой $\overline{H}_0 = F[L_2[0, \infty)]$ и через $\overline{h}_\delta(\tau)$ обозначим элемент, определяемый формулой $\overline{h}_\delta(\tau) = pr[\hat{h}_\delta(\tau); \overline{H}_0]$.

Так как $\hat{h}_0(\tau) \in \overline{H}_0$, то из (102) следует, что

$$\|\overline{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \le \sqrt{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{r}{\sqrt{1 + \overline{\alpha}_1^2(\delta, r)}} + c_\varepsilon \delta. \tag{104}$$

Окончательно решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (1)–(3), (7) определим формулой

$$h_\delta(t) = \begin{cases} F^{-1}[\overline{h}_\delta(\tau)] \quad ; \quad t \in [0, t_0], \\ \quad 0 \quad ; \quad 0 < t \ , t > t_0, \end{cases} \tag{105}$$

где F^{-1} оператор, обратный F.

Из (104), (105) для $h_\delta(t)$ справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\| \le \sqrt{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{r}{\sqrt{1 + \overline{\alpha}_1^2(\delta, r)}} + c_\varepsilon \delta. \tag{106}$$

Работа поддержана грантом р_урал_а № 10-01-96000.

Литература

1. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. – М.: Наука, 1981.
2. Танана, В.П. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Тр. Ин-та Математики и Механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 1–15.
3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972.
4. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Наука, 1984.

Анна Ивановна Сидикова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Вычислительная математика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), 7413604@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 2, pp. 74–87.

MSC 65N20

On Estimated Accuracy of the Approximate Solution of Inverse Boundary Problem for Parabolic Equation

A.I. Sidikova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, 7413604@mail.ru

This paper is devoted to the development of projection regularization method, analysis of the efficiency with the help of accurate error estimates of this method obtained in order and its application for the solution of the inverse boundary value problems of heat transfer. In the article there is one-dimensional problem on the restoration of heat exchange conditions at one end of the homogeneous rod of a finite length by the results of temperature measurements with finite error at the point, which is located at some distance from the end. The inverse problem is ill-posed. The paper provides an analytical solution of this ill-posed problem in terms of the Fourier transform, regularizing operator is discharged, the method for the selection of the regularization parameter is given and its optimality in order is proved. It is established, that the accuracy of the approximations is of order $\ln^{-1}\delta$.

Now while using computational methods great attention is paid to the error estimate of the algorithms used, its accuracy and optimality. These questions are of a great importance at numerical calculation of ill-posed problems with the application of various regularizers. A new technology of error estimates to solve the inverse boundary value problems of heat transfer is developed in the paper. The results can be used for numerical calculation of the thermal characteristics of the inverse problems of heat exchange as well as for the development of new regularizing algorithms of similar problems.

Keywords: inverse problem, regularization, error estimate, ill-posed problem, Fourier transformation.

References

1. Tanana V.P. *Metody reshenia operatornykh uravneniy* [Methods for Solving of Operator Equations]. Moscow, Nauka, 1981. 228 p.
2. Tanana V.P., Sidikova A.I. On the Guaranteed Accuracy Estimate of an Approximate Solution of One Inverse Problem of Thermal Diagnostics [O garantirovannoy otsenke tochnosti priblizhennogo resheniya odnoy obratnoy zadachi teplovoy diagnostiki]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 1–15.
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii functsiy i functsional'nogo analiza* [The Elements of Functions and Functional Analises]. Moscow, Nauka, 1972. 623 p.
4. Privalov I.I. *Vvedenie v teoriu functsiy kompleksnogo peremennogo* [Introduction in Theory of Function Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1984. 432 p.

Поступила в редакцию 1 ноября 2011 г.