МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.71

О ЗАДАЧЕ МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В.М. Адуков

Предполагается, что для линейной конечномерной стационарной динамической системы Σ с дискретным временем известна степень МакМиллана δ и конечная последовательность ее марковских параметров $G_1, \dots, G_m$, $m \geqslant 2\delta$. Рассматриваются задачи восстановления по этим данным переходной матрицы-функции $G(z)$ системы, минимальных индексов и взаимно простых дробных факторизаций $G(z)$, минимальных решений соответствующих уравнений Безу, минимальной реализации Σ. Для каждой из них существует отдельный алгоритм решения. В данной работе предлагается единый подход к исследованию этих проблем. Он основан на методе индексов и существенных многочленов конечной последовательности матриц. Этот метод был ранее разработан для явного решения задачи факторизации Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций. Показано, что решение всех вышеуказанных задач может быть получено, как только будут найдены индексы и существенные многочлены последовательности $G_1, \dots, G_m$. Вычисление индексов и существенных многочленов можно осуществить средствами линейной алгебры. Для матриц с элементами из поля рациональных чисел алгоритм реализован в среде Maple в виде процедуры ExactEssPoly.

Ключевые слова: дискретная линейная конечномерная стационарная динамическая система, дробная факторизация, минимальная реализация.

Введение

Динамическая система – это структура, которая обрабатывает входные сигналы и производит выходные, т.е. является отображением вход-выход. Рассмотрим модель линейной конечномерной стационарной динамической системы Σ с дискретным временем, эволюция которой описывается системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{j+1} &= Ax_j + Bu_j, \\ y_j &= Cx_j. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь (A, B, C) – тройка действительных матриц размером $n \times n$, $n \times q$, $p \times n$, соответственно; векторы $u_j \in \mathbb{R}^q$, $x_j \in \mathbb{R}^n$, $y_j \in \mathbb{R}^p$ принадлежат конечномерным действительным пространствам, которые называются *пространством входных сигналов*, *пространством состояний* и *пространством выходных сигналов*, соответственно. Размерность n пространства состояний называется *порядком системы*, q – число входов, p – число выходов. Предполагается, что в начальный момент времени система находилась в состоянии покоя, т.е. $x_0 = 0$. Эта модель динамической системы называется *реализацией системы Σ в пространстве состояний (space state model)* и формально может быть отождествлена с тройкой матриц (A, B, C).

Переходной матрицей-функцией системы (1) называется правильная рациональная матрица-функция размером $p \times q$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B. \tag{2}$$

Разложим $G(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{CA^{k-1}B}{z^k}.$$

Коэффициенты $G_k = CA^{k-1}B$ ряда называются *марковскими параметрами* системы. Оказывается, что в них содержится вся информация об отображении вход-выход. Параметры G_k играют важную роль в теории, поскольку для их определения не нужно знать структуру Σ (т.е. матрицы A, B, C); они могут быть определены по реакции системы на единичные входные импульсы.

В задачах анализа системы Σ по заданной тройке (A, B, C), т.е. по известной переходной матрице-функции $G(z)$, требуется узнать, будет ли система *наблюдаемой* и/или *управляемой*, найти такие важные целочисленные инварианты системы, как *индексы наблюдаемости* и *индексы управляемости* и т.д. (определение этих понятий см., например, в [1]).

Другой важной задачей теории систем является задача синтеза, т.е. задача моделирования системы по данным вход-выход. В этом случае Σ рассматривается как черный ящик, и требуется построить дискретную систему, генерирующую эти данные, т.е. реализовать систему. С формальной точки зрения задача реализации состоит в отыскании для заданной бесконечной последовательности G_k матриц размером $p \times q$ тройки матриц (A, B, C) подходящих размеров такой, что

$$CA^{k-1}B = G_k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3}$$

Эта тройка матриц является *реализацией* последовательности G_k или матрицы-функции $G(z)$. Если порядок n матрицы A будет при этом наименьшим возможным, то реализация (A, B, C) называется *минимальной*.

Минимальная реализация всегда существует и единственна с точностью до изменения базиса в пространстве состояний системы. Порядок n минимальной реализации $G(z)$ называется *степенью МакМиллана* $G(z)$ и соответствующей системы. Хорошо известен классический алгоритм Хо решения задачи минимальной реализации [2]. Алгоритм требует априорного знания степени МакМиллана и основан на приведении конечных блочных ганкелевых матриц, составленных из марковских параметров G_k системы, к диагональному виду.

Целью данной работы является разработка нового подхода к изучению системы Σ по известным марковским параметрам. Он основан на методе существенных многочленов конечной последовательности матриц [3]. Оказалось, что знание индексов и существенных многочленов конечной последовательности, составленной из марковских параметров системы, позволяет сразу же определить индексы наблюдаемости и управляемости системы, построить дробные факторизации передаточной матрицы-функции, решить соответствующие уравнения Безу, найти минимальную реализацию системы.

Ранее этот метод был использован при решении задач из различных областей математики, например, в задаче факторизации Винера – Хопфа матриц-функций [4, 5], при исследовании равномерной сходимости промежуточных строк таблицы Паде [6] и матричных аппроксимаций Паде [7], для обобщенного обращения ганкелевых и теплицевых операторов конечного ранга [8, 9].

Предлагаемый подход может оказаться полезным в теории систем для разработки алгоритмов численного решения задачи минимальной реализации в случае, когда марковские параметры системы известны приближенно. Эта задача относится к классу неустойчивых и требует применения методов, используемых для решения некорректных задач [11, 12]. Наш оптимизм основан на том, что метод уже был успешно применен в похожей неустойчивой ситуации для нахождения скалярных аппроксимаций Паде, свободных от так называемых дуплетов Фруссара [10]. Фактически это означает, что была построена минимальная реализация для SISO систем (т.е. систем с одним входом и одним выходом). Разработку подобного алгоритма для MIMO систем и его программную реализацию предполагается осуществить в дальнейших работах.

1. Индексы и существенные многочлены конечной последовательности марковских параметров

Для последовательности $G_1, G_2, \ldots, G_m$ матриц размером $p \times q$ введем понятия индексов и существенных многочленов. Доказательства всех приводимых ниже утверждений даны в [3].

Пусть A – блочная матрица с блоками из $\mathbb{R}^{p\times q}$, имеющая блочные размеры $(M+1)\times(N+1)$. Разобьем столбец R из правого ядра $\ker_R A$ на $N+1$ блоков размером $q \times 1$: $R = (R_0, R_1, \ldots, R_N)^T$ и определим производящий векторный (столбцовый) многочлен этого столбца

$$R(z) = R_0 + R_1 z + \ldots + R_N z^N.$$

Аналогично, определим производящий векторный (строчный) многочлен от z^{-1} для вектора из левого ядра $\ker_L A$.

Образуем из последовательности $G_1, G_2, \ldots, G_m$ семейство блочных теплицевых матриц $T_k = \|G_{i-j}\|_{\substack{i=k,k+1,\ldots,m,\\ j=0,1,\ldots,k-1}}$ $k = 1, 2, \ldots, m$ и опишем структуру правых и левых ядер матриц T_k. Поскольку удобнее иметь дело не с векторами, а с их производящими многочленами, перейдем от пространств $\ker_R T_k$ к изоморфным пространствам $\mathcal{N}_k^R$ производящих многочленов векторов из $\ker_R T_k$. Для удобства положим $\mathcal{N}_0^R = 0$ и обозначим $\mathcal{N}_{m+1}^R$ – $(m+2)q$-мерное пространство всех векторных (столбцовых) многочленов от z формальной степени $m+1$.

Аналогично, пространство $\ker_L T_k$ естественно изоморфно пространству $\mathcal{N}_k^L$ производящих многочленов от z^{-1}. Положим $\mathcal{N}_{m+1}^L = 0$ и обозначим $\mathcal{N}_{M-1}^L$ – $(m+2)p$-мерное пространство всех векторных (строчных) многочленов от z^{-1} формальной степени $m+1$.

Пусть $\alpha = \dim \mathcal{N}_1^R$ и $\omega = \dim \mathcal{N}_m^L$. Числа α, ω назовем *левым*, соответственно *правым, дефектом* последовательности. Пусть $d_k^R = \dim \mathcal{N}_k^R$, $d_k^L = \dim \mathcal{N}_k^L$, $\Delta_k^R = d_k^R - d_{k-1}^R$ $(1 \leqslant k \leqslant m+1)$, $\Delta_k^L = d_k^L - d_{k+1}^L$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$. Используя формулу Грассмана, нетрудно доказать, что справедливы следующие неравенства

$$\alpha = \Delta_1^R \leqslant \Delta_2^R \leqslant \ldots \leqslant \Delta_m^R \leqslant \Delta_{m+1}^R = p + q - \omega,$$

$$p + q - \alpha = \Delta_0^L \geqslant \Delta_1^L \geqslant \ldots \geqslant \Delta_{m-1}^L \geqslant \Delta_m^L = \omega.$$

Отсюда следует, что существует $p+q-\alpha-\omega$ целых чисел $\mu_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{p+q-\omega}$ таких, что

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_1^R & = & \ldots & = & \Delta_{\mu_{\alpha+1}}^R & = & \alpha, \\ & & \cdots & & & & \\ \Delta_{\mu_i+1}^R & = & \ldots & = & \Delta_{\mu_{i+1}}^R & = & i, \\ & & \cdots & & & & \\ \Delta_{\mu_{p+q-\omega}+1}^R & = & \ldots & = & \Delta_{m+1}^R & = & p+q-\omega. \end{array} \qquad (4)$$

Если i-я строка в этих соотношениях отсутствует, то мы полагаем $\mu_i = \mu_{i+1}$. По определению положим $\mu_1 = \ldots = \mu_\alpha = 0$, если $\alpha \neq 0$ и $\mu_{p+q-\omega+1} = \ldots = \mu_{p+q} = m+1$, если $\omega \neq 0$.

Определение 1. *Целые числа $\mu_1, \ldots, \mu_{p+q}$, определенные в (4), будем называть* **индексами** *последовательности $G_1, G_2, \ldots, G_m$.*

Так как $\Delta_k^L = p + q - \Delta_{k+1}^R$, то мы можем получить для Δ_k^L соотношения, подобные (4).

В [3] показано, что $\mathcal{N}_k^R + z\mathcal{N}_k^R$ – подпространство $\mathcal{N}_{k+1}^R$, и размерность h_{k+1}^R дополнения $\mathcal{H}_{k+1}^R$ этого подпространства равна $\Delta_{k+1}^R - \Delta_k^R$. Из (4) следует, что $h_{k+1}^R \neq 0$ тогда и только тогда, когда $k = \mu_j$ $(j = \alpha+1, \ldots, p+q-\omega)$. В этом случае h_{k+1}^R совпадает с кратностью k_j индекса μ_j. Следовательно, для $k \neq \mu_j$

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = \mathcal{N}_k^R + z\mathcal{N}_k^R$$

и для $k = \mu_j$

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = (\mathcal{N}_k^R + z\mathcal{N}_k^R)\dot{+}\mathcal{H}_{k+1}^R.$$

Определение 2. *Если $\alpha \neq 0$, то любые многочлены $R_1(z), \ldots, R_\alpha(z)$, которые образуют базис пространства $\mathcal{N}_1^R$, будем называть* **правыми существенными многочленами** *последовательности $G_1, G_2, \ldots, G_m$, соответствующими индексу $\mu_1 = \ldots = \mu_\alpha$.*

Любые многочлены $R_j(z), \ldots, R_{j+k_j-1}(z)$, образующие базис дополнения $\mathcal{H}_{\mu_j+1}^R$, назовем **правыми существенными многочленами** *последовательности, соответствующими индексу μ_j, $\alpha+1 \leqslant j \leqslant p+q-\omega$.*

Аналогично,

$$\mathcal{N}_{k-1}^L = \mathcal{N}_k^L + z^{-1}\mathcal{N}_k^L$$

для $k \neq \mu_j$ и

$$\mathcal{N}_{k-1}^L = (\mathcal{N}_k^L + z^{-1}\mathcal{N}_k^L)\dot{+}\mathcal{H}_{k-1}^L$$

при $k = \mu_j$. Выбирая базис пространств $\mathcal{N}_N^L$ (если $\omega \neq 0$) и $\mathcal{H}_{\mu_j-1}^L(\alpha+1 \leqslant j \leqslant p+q-\omega)$, получим набор векторных (строчных) многочленов $L_{\alpha+1}(z), \ldots, L_{p+q}(z)$, которые будем называть *левыми существенными многочленами* последовательности $G_1, G_2, \ldots, G_m$.

Таким образом, для любой последовательности $G_1, G_2, \ldots, G_m$ существует $p+q$ индексов, $p+q-\omega$ правых существенных многочленов и $p+q-\alpha$ левых существенных многочленов. В [3, раздел 5] показано, что всегда можно пополнить системы $R_1(z), \ldots, R_{p+q-\omega}(z)$ и $L_{\alpha+1}(z), \ldots, L_{p+q}(z)$ до полных систем, состоящих из $p+q$ многочленов. Кроме того, там же доказано, что по известной полной системе правых существенных многочсленов всегда можно восстановить некоторую полную систему левых существенных многочленов, и наоборот. Подобные системы правых и левых существенных многочленов названы *согласованными системами.*

Описанный выше алгоритм нахождения индексов и существенных многочленов заданной последовательности был реализован в виде процедуры ExactEssPoly в системе компьютерной математики Maple для применения к задаче факторизации Винера – Хопфа [5].

2. Дробная факторизация рациональных матриц-функций

Дробная факторизация рациональной матрицы-функции является естественным обобщением на матричный случай представления рациональной дроби в виде отношения двух многочленов. Приведем некоторые сведения о дробной факторизации [1].

Определение 3. *Левой взаимно простой дробной факторизацией (left coprime fractional factorization) правильной рациональной матрицы-функции $G(z)$ называется ее представление в виде*

$$G(z) = D_L^{-1}(z)N_L(z). \tag{5}$$

Здесь $D_L(z), N_L(z)$ – взаимно простые слева матричные многочлены от z и $D_L(z)$ – несингулярный (т.е. $\det D_L(z) \not\equiv 0$) матричный многочлен.

Взаимная простота слева матричных многочленов $D_L(z), N_L(z)$ означает, что эти многочлены имеют в качестве общих левых полиномиальных делителей только матричные многочлены с постоянным ненулевым определителем (*унимодулярные матричные многочлены*). Условие взаимной простоты $D_L(z), N_L(z)$, как известно, равносильно разрешимости следующего матричного *левого уравнения Безу*

$$D_L(z)U_L(z) + N_L(z)V_L(z) = I_p. \tag{6}$$

Здесь $U_L(z)$ и $V_L(z)$ – матричные многочлены от z.

Подобным образом определяется *правая взаимно простая дробная факторизация* $G(z)$:

$$G(z) = N_R(z)D_R^{-1}(z), \tag{7}$$

где $N_R(z), D_R(z)$ – взаимно простые справа матричные многочлены, $D_R(z)$ – несингулярный $p \times p$ матричный многочлен. Условие взаимной простоты справа $N_R(z)$ и $D_R(z)$ равносильно разрешимости матричного *правого уравнения Безу*

$$U_R(z)D_R(z) + V_R(z)N_R(z) = I_q, \tag{8}$$

где $U_R(z)$ и $V_R(z)$ – матричные многочлены от z.

Известно, что любая правильная рациональная матрица-функция допускает представления (5), (7). Эти дробные факторизации, а также соответствующие им уравнения Безу играют фундаментальную роль в теории систем. Цель этого раздела – указать способ построения дробной факторизации переходной матрицы-функции и решений уравнений Безу по конечному набору марковских параметров системы.

Ясно, что дробные факторизации строятся не единственным образом. Обычно на знаменатели дробных факторизаций, помимо несингулярности, налагаются дополнительные условия. Сформулируем их. Для любого несингулярного матричного многочлена $\bar{L}(z)$ существует унимодулярный матричный многочлен $S(z)$ такой, что $L(z) = S(z)\bar{L}(z)$ имеет *правильную по строкам* форму [1]. Последнее означает, что постоянная матрица L^{row}, составленная из коэффициентов при старшей степени каждой строки $L(z)$, является обратимой матрицей. Поэтому, умножая, если это необходимо, числитель и знаменатель в левой дробной факторизации на подходящий унимодулярный многочлен $S(z)$, мы можем считать, что знаменатель в представлении (5) имеет правильную по строкам форму, причем степени строк λ_j матричного многочлена $D_L(z)$ упорядочены по убыванию. Такое домножение не нарушает взаимной простоты слева факторизационных множителей.

В теории систем показано, что *строчные степени* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ правильного по строкам знаменателя в дробной факторизации (5) не зависят от факторизации, а однозначно определяются $G(z)$. Эти инварианты $G(z)$ называются *левыми минимальными индексами* матрицы-функции $G(z)$. Если $G(z)$ является переходной матрицей-функцией линейной стационарной конечномерной системы, и тройка (A, B, C) является любой реализацией этой системы, то строчные степени $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ являются *индексами наблюдаемости* пары (A, C). Сумма δ индексов равна степени МакМиллана $G(z)$. Легко видеть, что δ совпадает со степенью определителя знаменателя $D_L(z)$ из левой дробной факторизации $G(z)$.

Аналогичным образом, знаменатель $D_R(z)$ правой дробной факторизации $G(z)$ может быть приведен в *правильную по столбцам* форму, причем *столбцовые степени* ρ_j можно считать упорядоченными по возрастанию. Обратимую матрицу, составленную из старших коэффициентов столбцов $D_R(z)$, будем обозначать D_R^{col}. Числа $\rho_1, \ldots, \rho_q$ называются *правыми минимальными индексами* матрицы-функции $G(z)$. Для переходной матрицы-функции системы они являются *индексами управляемости* пары (A, B). Сумма правых индексов совпадает со степенью $\det D_R(z)$ и равна δ.

Оказывается, что знаменатели $D_L(z)$, $D_R(z)$ могут быть приведены к форме, которая является одновременно правильной и по строкам, и по столбцам. Это форма знаменателей называется *формой Попова.* Алгоритм приведения матричного многочлена к такой форме описан в [1, раздел 6.7.2]. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что знаменатели дробных факторизаций взяты в форме Попова.

Связь между дробными факторизациями правильной рациональной матрицы-функции $G(z)$ и индексами и существенными многочленами последовательности $G_1, \dots, G_m$, составленной из лорановских коэффициентов $G(z)$, указана в следующих двух теоремах. В теореме 1 показано, как строить индексы и существенные многочлены последовательности в терминах дробных факторизаций.

Для матрицы A будем обозначать $[A]^j$ ($[A]_j$) ее j-й столбец (j-ю строку).

Теорема 1. *Пусть*

$$G(z) = N_R(z) D_R^{-1}(z) \quad \big(G(z) = D_L^{-1}(z) N_L(z)\big)$$

– правая (левая) взаимно-простая дробная факторизация $G(z)$ с матричным многочленом $D_R(z)$ ($(D_L(z))$), правильным по столбцам (строкам). Обозначим $\rho_1 \leqslant \dots \leqslant \rho_q$ ($\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p$) – столбцовые (строчные) степени $D_R(z)$ ($D_L(z)$).

Пусть $(U_L(z),\ V_L(z))$, $(U_R(z),\ V_R(z))$ – минимальные решения уравнений Безу (6), (8), соответственно.

Тогда числа

$$\rho_1, \dots, \rho_q,\ m - \lambda_1 + 1, \dots, m - \lambda_p + 1 \tag{9}$$

– индексы, векторные многочлены

$$z^{\rho_1}[D_R(z^{-1})]^1, \dots, z^{\rho_q}[D_R(z^{-1})]^q,\ z^{m-\lambda_1+1}[V_L(z^{-1})]^1, z^{m-\lambda_p+1}[V_L(z^{-1})]^p \tag{10}$$

– правые существенные многочлены, и

$$[V_R(z^{-1})]_1, \dots, [V_R(z^{-1})]_q,\ [D_L(z^{-1})]_1, \dots, [D_L(z^{-1}]_p$$

– левые существенные многочлены последовательности $G_1, \dots, G_m$ для любого $m \geq 2\delta > 0$.

Доказательство. Изложим только схему доказательства, поскольку она аналогична схеме доказательства теоремы 6 из работы [9].

Считая известными дробные факторизации рациональной матрицы-функции $G(z)$ и минимальные решения соответствующих уравнений Безу, нетрудно проверить, что для последовательности $G_1, \dots, G_m$ справедливо

$$z^{\rho_j}[D_R(z^{-1})]^j \in \mathcal{H}^R_{\rho_j+1},\ z^{m-\lambda_j+1}[V_L(z^{-1})]^j \in \mathcal{H}^R_{m-\lambda_j+1}.$$

Это означает, что числа (9) являются кандидатами на роль индексов, а векторные многочлены (10) – на роль правых существенных многочленов последовательности. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить критерий существенности (теорема 4.1) из [3]. Аналогично может быть доказана вторая часть теоремы. □

В теореме 1 построены существенные многочлены, которые дополнительно имеют следующие свойства:

1) свободные члены векторных многочленов $R_1(z), \dots, R_q(z)$ образуют обратимую матрицу, а свободные члены многочленов $R_{q+1}(z), \dots, R_{p+q}(z)$ равны нулю;

2) формальные старшие коэффициенты многочленов $L_1(z), \dots, L_q(z)$ равны нулю, а старшие коэффициенты многочленов $L_{q+1}(z), \dots, L_{p+q}(z)$ образуют обратимую матрицу.

Существенные многочлены $R_1(z), \dots, R_{p+q}(z)$; $L_1(z), \dots, L_{p+q}(z)$, обладающие такими свойствами, будем далее называть *факторизационными существенными многочленами* последовательности. Можно показать, что если системы многочленов $R_1(t), \dots, R_{p+q}(z), L_1(z), \dots, L_{p+q}(z)$ согласованы, и выполняется свойство 1 (свойство 2), то автоматически выполняется свойство 2 (свойство 1). Другими словами, любая последовательность имеет согласованные факторизационные существенные многочлены.

Теперь мы можем установить главный результат этого раздела, позволяющий находить дробные факторизации и минимальные индексы рациональной матрицы-функции $G(z)$, а также получать минимальные решения соответствующих уравнений Безу в терминах индексов и существенных многочленов конечной последовательности лорановских коэффициентов $G(z)$.

Теорема 2. *Пусть $G(z)$ – правильная рациональная матрица-функция размером $p \times q$, δ – ее степень МакМиллана, $G_1, \dots, G_m$ – последовательность, образованная из лорановских коэффициентов $G(z)$ при $m \geqslant 2\delta$, и $G^{(m)}(z) = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{G_k}{z^k}$ – производящая функция последовательности.*

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_{p+q}$ – индексы, а $R_1(z), \dots, R_{p+q}(z)$; $L_1(z), \dots, L_{p+q}(z)$ – произвольные существенные многочлены последовательности.

Тогда правые и левые минимальные индексы $G(z)$ находятся по формулам

$$\rho_1 = \mu_1, \dots, \rho_q = \mu_q;\ \lambda_1 = m - \mu_{q+1}, \dots, \lambda_p = m - \mu_{p+q}.$$

Обозначим

$$D_R(z) = \big(z^{\mu_1} R_1(z^{-1}) \dots z^{\mu_q} R_q(z^{-1})\big),\ D_L(z) = \begin{pmatrix} L_{q+1}(z^{-1}) \\ \vdots \\ L_{p+q}(z^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det D_R(z) \not\equiv 0$, $\det D_L(z) \not\equiv 0$, *и матричные многочлены $D_R(z)$, $D_L(z)$ являются знаменателями некоторых взаимно простых дробных факторизаций матрицы-функции $G(z)$:*

$$G(z) = N_R(z) D_R^{-1}(z),\ G(z) = D_L^{-1}(z) N_L(z).$$

Матричные многочлены $N_R(z)$, $N_L(z)$ восстановливаются по последовательности $G_1, \dots, G_m$ следующим образом:

$$N_R(z) = \mathcal{P}_+\big(G^{(m)}(z) D_R(z)\big),\ N_L(z) = \mathcal{P}_+\big(D_L(z) G^{(m)}(z)\big).$$

Здесь $\mathcal{P}_+$ – оператор проектирования, действующий по правилу $\mathcal{P}_+\Big(\sum\limits_{j=-l}^{k} a_j z^j\Big) = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j z^j$.

Если существенные многочлены дополнительно выбраны факторизационными, то знаменатель $D_R(z)$ будет иметь форму, правильную по столбцам, а $D_L(z)$ – правильную по строкам.

Наконец, если выбрать согласованные факторизационные существенные многочлены, то можно получить и минимальные решения уравнений Безу:

$$V_L(z) = \big(z^{\mu_{q+1}} R_{q+1}(z^{-1}) \dots z^{\mu_{p+q}} R_{p+q}(z^{-1})\big),\quad V_R(z) = \begin{pmatrix} L_1(z^{-1}) \\ \vdots \\ L_q(z^{-1}) \end{pmatrix},$$

$$U_L(z) = D_L^{-1}(z)\big(I_p - N_L(z) V_L(z)\big),\quad U_R(z) = \big(I_q - V_R(z) N_R(z)\big) D_R^{-1}(z).$$

Доказательство. Формулы для минимальных индексов и существование факторизационных существенных многочленов доказаны в теореме 1.

Как выше указывалось, любая правильная рациональная матрица-функция $G(z)$ допускает правую взаимно простую дробную факторизацию. Пусть $G(z) = \widehat{N}_R(z)\widehat{D}_R^{-1}(z)$ – любая такая факторизация. По теореме 1 тогда векторные многочлены $z^{\rho_1}[\widehat{D}_R(z^{-1})]^1, \ldots, z^{\rho_q}[\widehat{D}_R(z^{-1})]^q$, являются первыми q правыми существенными многочленами. Условие $m \geqslant 2\delta$ гарантирует, что $\mu_q < \mu_{q+1}$. Из теоремы 3.1 работы [3] о структуре ядра блочной теплицевой матрицы следует, что существуют скалярные многочлены $\hat{s}_{ij}(z)$ от z степени не выше $\mu_j - \mu_i$, если $\mu_j - \mu_i > 0$ и $\hat{s}_{ij}(z) \equiv 0$ при $\mu_j - \mu_i < 0$ такие, что $\widehat{R}_j(z) = \sum_{i=1}^q \hat{s}_{ij}(z)R_i(z),\ j = 1, \ldots, q$. Эти равенства можно переписать в матричной форме $\big(\widehat{R}_1(z)\ldots\widehat{R}_q(z)\big) = \big(R_1(z)\ldots R_q(z)\big)\widehat{S}(z)$, $\widehat{S}(z) = \|\hat{s}_{ij}(z)\|_{i,j=1}^q$. Отсюда получаем

$$\widehat{D}_R(z) = \big(z^{\mu_1}R_1(z^{-1})\ldots z^{\mu_q}R_q(z^{-1})\big)S(z), \tag{11}$$

где элементы матрицы $S(z)$ определяются формулой $s_{ij}(z) = z^{\mu_j-\mu_1}\hat{s}_{ij}(z^{-1})$. Таким образом, матричный многочлен $S(z)$ имеет такую же блочную структуру, что и $\widehat{S}(z)$. Из этой структуры видно, что он имеет постоянный определитель, а из (11) следует, что определитель отличен от нуля. Значит, $S(t)$ – унимодулярный матричный многочлен и потому

$$\big(z^{\mu_1}R_1(z^{-1})\ldots z^{\mu_q}R_q(z^{-1})\big) = \widehat{D}_R(z)S^{-1}(z)$$

является знаменателем $D_R(z)$ некоторой правой взаимно простой дробной факторизации $G(z)$.

Если дополнительно существенные многочлены являются факторизационными, то матрица D_R^{col} является обратимой, т.е. $D_R(z)$ имеет форму, правильную по столбцам.

Для получения матричного числителя $N_R(z)$ нужно воспользоваться разложениями (2.4) из [3]. Эти соотношения вместе с равенством $N_R(z) = G(z)D_R(z)$ позволяют доказать, что $N_R(z)$ является полиномиальной частью рациональной дроби $G^{(m)}(z)D_R(z)$.

Аналогично доказывается оставшаяся часть теоремы. $\square$

Продемонстрируем полученные результаты на числовом примере. Все вычисления проделаны с использованием системы компьютерной математики Maple.

Пример 1. Рассмотрим последовательность матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ G_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ G_6 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Восстановим по этим марковским параметрам рациональную матрицу-функцию $G(z)$ со степенью МакМиллана $\delta = 3$ и построим для нее дробные факторизации. Обращение к вышеупомянутой процедуре ExactEssPoly дает индексы последовательности

$$\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2,\ \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 6,$$

и матрицы, составленные из правых и левых согласованных факторизационных существенных многочленов,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z + z^2 & z^6 & z^4 & z^5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2z^{-1} & 0 & 0 \\ z^{-1} & \frac{1}{2}z^{-1} & z^{-1} \\ -1 - z^{-1} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} & -1 \end{pmatrix}.$$

По теореме 2 получаем следующие значения для минимальных индексов

$$\rho_1 = 1, \ \rho_2 = 2, \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

знаменатели дробных факторизаций

$$D_R(z) = \begin{pmatrix} z & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^2 \end{pmatrix}, \quad D_L(z) = \begin{pmatrix} z & \frac{1}{2}z & z \\ -1 - z & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z & -1 \end{pmatrix}$$

и числители

$$N_R(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 - \frac{1}{2}z \end{pmatrix}, \quad N_L(z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$G(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & -\frac{1}{z(z-1)(z+2)} \\ \frac{2}{z} & -\frac{2(z+1)}{z(z-1)(z+2)} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{pmatrix}.$$

Первые 6 лорановских коэффициентов этой матрицы-функции действительно совпадают с заданными матрицами G_j.

3. Минимальная реализация

Применим результаты раздела 2 к задаче минимальной реализации. Знание взаимно простой дробной факторизации $G(z)$ позволяет построить минимальную реализацию, поэтому мы можем получить решение задачи в терминах существенных многочленов конечного усечения последовательности марковских параметров $G_1, G_2, \ldots$ при условии, что нам известна степень МакМиллана δ переходной матрицы-функции системы.

Теорема 3.

Пусть $G(z)$ – правильная рациональная матрица-функция и δ – ее степень МакМиллана. Для произвольного $m \geqslant 2\delta$ составим из коэффициентов Лорана $G(z)$ последовательность $G_1, \ldots, G_m$ и ее производящую функцию $G^{(m)}(z) = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{G_k}{z^k}$.

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_{p+q}$ – индексы, а α, ω – левый и правый дефекты этой последовательности. Построим из ее факторизационных существенных многочленов $R_1(z), \ldots, R_p(z)$ матричные многочлены

$$D_R(z) = \big(z^{\mu_1} R_1(z^{-1}) \ldots z^{\mu_q} R_q(z^{-1})\big), \quad N_R(z) = \mathcal{P}_+\big(G^{(m)}(z) D_R(z)\big)$$

и обозначим через D_{col} – обратимую матрицу, составленную из старших коэффициентов столбцов $D_R(z)$, а через $[D_{col}^{-1}]_j$ – j-ю строку матрицы D_{col}^{-1}. Элементы $d_{ij}(z)$ нормированного матричного многочлена $D_{col}^{-1}D_R(z)$ имеют вид

$$d_{ij}(z) = \begin{cases} d_0^{ii} + d_1^{ii}z + \ldots + d_{\mu_i-1}^{ii}z^{\mu_i-1} + z^{\mu_i}, & i = j, \\ d_0^{ij} + d_1^{ij}z + \ldots + d_{\mu_j-1}^{ij}z^{\mu_j-1}, & i \neq j. \end{cases}$$

Обозначим j-й столбец матричного многочлена $N_R(z)$ через $[N_R(z)]^j$; это – векторный многочлен от z степени не выше μ_j:

$$[N_R(z)]^j = N_0^j + N_1^j z + \ldots + N_{\mu_j-1}^j z^{\mu_j-1}.$$

Тогда минимальная реализация (A, B, C) рациональной матрицы-функции $G(z)$ может быть построена с помощью факторизационных правых существенных многочленов по следующим формулам:

$$A = \| A_{ij} \|_{i,j=\alpha+1}^{q}, \quad A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -d_0^{ii} & -d_1^{ii} & \ldots & -d_{\mu_i-1}^{ii} \end{pmatrix}, \; A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ -d_0^{ij} & \ldots & -d_{\mu_j-1}^{ij} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – блок размером $\mu_i \times \mu_j$;

$$B = \begin{pmatrix} B_{\alpha+1} \\ \vdots \\ B_q \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ [D_{col}^{-1}]_j \end{pmatrix},$$

где B_j – блок размером $\mu_j \times q$;

$$C = \begin{pmatrix} C_{\alpha+1} & C_{\alpha+2} & \ldots & C_q \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} N_0^j & N_1^j & \ldots & N_{\mu_j-1}^j \end{pmatrix},$$

где C_j – блок размером $p \times \mu_j$.

Доказательство. В теореме 2 показано, что $D_R(z)$, $N_R(z)$ являются, соответственно, знаменателем и числителем правой взаимно простой дробной факторизации $G(z)$, причем знаменатель $D_R(z)$ имеет правильную по столбцам форму, и индексы μ_j последовательности совпадают с левыми минимальными индексами ρ_j для $j = 1, \ldots, q$.

Известно, что знание дробной факторизации переходной матрицы-функции $G(z)$ системы позволяет построить минимальную реализацию этой системы [13].

Непосредственные вычисления с использованием полиномиальных моделей Фурмана (X_{D_R}, S_{D_R}) [13] тогда дают вышеприведенные формулы для A, B, C. □

Аналогичным образом минимальная реализация $G(z)$ может быть построена с помощью факторизационных левых существенных многочленов.

Пример 2. Построим минимальную реализацию для рациональной матрицы-функции $G(z)$ из примера 1.

Матрица D_{col} и нормированный знаменатель в этом случае имеют вид

$$D_{col} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D_{col}^{-1}D_R(z) = \begin{pmatrix} z & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 + z + z^2 \end{pmatrix}.$$

Вычисление A, B, C дает следующие блочные матрицы:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right), \; B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right), \; C = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Проверка показывает, что $C(zI - A)^{-1}B$ действительно совпадает с $G(z)$.

Литература

1. Kailath, Thomas. Linear Systems / Thomas Kailath. – N.J.: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1980.
2. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Едиториал-УРСС, 2004.
3. Adukov, V.M. Generalized Inversion of Block Toeplitz Matrices / V.M. Adukov // Linear Algebra Appl. – 1998. – V. 274.– P. 85–124.
4. Адуков, В.М. Факторизация Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4, вып. 1. – С. 54–74.
5. Адуков, В.М. Факторизация Винера – Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 8. – С. 3–24.
6. Adukov, V.M. The Uniform Convergence of Subsequences of the Last Intermediate Row of the Padé Table / V.M. Adukov // J. Approx. Theory. – 2003. – V. 122, № 2. – P. 160–207.
7. Adukov, V.M. The Essential Polynomial Approach to Convergence of Matrix Padé Approximants / V.M. Adukov // Contemporary Math. – 2001. – V. 280. – P. 71–87.
8. Adukov, V.M. Generalized Inversion of Finite Rank Toeplitz and Hankel Operators with Rational Matrix Symbols / V.M. Adukov // Linear Algebra Appl. – 1999. – V. 290. – P. 119–134.
9. Adukov, V.M. Fractional and Wiener-Hopf factorizations / V.M. Adukov // Linear Algebra Appl. – 2002. – V. 340/1 – 3. – P. 199–213.
10. Ibryaeva, O.L. An Algorithm for Computing a Pade Approximant with Minimal Degree Denominator / O.L. Ibryaeva, V.M. Adukov // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2013. – V. 237, № 1. – P. 529–541.
11. Винокуров, В.А. Необходимое и достаточное условие линейной регуляризуемости / В.А. Винокуров, Л.Д. Менихес // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 229, № 6. – С. 1292–1294.
12. Менихес, Л.Д. О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам / Л.Д. Менихес // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 241, № 2. – С. 282–285.
13. Fuhrmann, P.A. Functional Models in Linear Algebra / P.A. Fuhrmann // Linear Algebra Appl. – 1992. – V. 162/164. – P. 107–151.

Виктор Михайлович Адуков, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математический анализ», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), adukovvm@susu.ac.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 3, pp. 5–17.

MSC 93C05

On a Problem of Minimal Realization

V.M. Adukov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, adukovvm@susu.ac.ru

It's supposed that for a discrete-time linear time-invariant system Σ the McMillan degree δ and a finite sequence of the Markov parameters $G_1, \ldots, G_m$, $m \geqslant 2\delta$, are known. The problems of reconstruction a transfer function $G(z)$ of the system, minimal indices and coprime fractional factorizations of $G(z)$, minimal solutions of the appropriate Bezout equations, the minimal realization of Σ from these dates are considered. There are various algorithms to solve each of these problems. In the work we propose an unified approach to study the problems. The approach is based on the method of indices and essential polynomials of a finite sequence of matrices. This method was developed in connection with the problem of an explicit construction of the Wiener – Hopf factorization for meromorphic matrix functions. It is shown that we can obtain the solutions of all the above problems as soon as we find the indices and essential polynomials of the sequence $G_1, \ldots, G_m$. The calculation of the indices and essential polynomials can be realized by means of linear algebra. For matrices with entries from the field of rational numbers we have implemented the algorithm in procedure ExactEssPoly in Maple.

Keywords: discrete-time linear time-invariant systems, fractional factorization, minimal realization.

References

1. Kailath Thomas *Linear Systems.* N.J., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1980.
2. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Topics in Mathematical System.* N.Y., McGraw-Hill, 1969.
3. Adukov V.M. Generalized Inversion of Block Toeplitz Matrices. *Linear Algebra Appl.,* 1998, vol. 274, pp. 85–124.
4. Adukov V.M. Wiener-Hopf Factorization of Meromorphic Matrix-Valued Functions *St. Petersburg Math. J.,* 1993, vol. 4, no. 1, pp. 51–69.
5. Adukov V.M. Wiener-Hopf Factorization of Piecewise Meromorphic Matrix-Valued Functions. *Sbornik: Mathematics,* 2009, vol. 200, issue 8, pp. 1105–1126.
6. Adukov V.M. The Uniform Convergence of Subsequences of the Last Intermediate Row of the Padé Table. *J. Approx. Theory,* 2003, vol. 122, pp. 160–207.
7. Adukov V.M. The Essential Polynomial Approach to Convergence of Matrix Padé Approximants. *Contemporary Math,* 2001, vol. 280, pp. 71–87.
8. Adukov V.M. Generalized Inversion of Finite Rank Toeplitz and Hankel Operators with Rational Matrix Symbols. *Linear Algebra Appl.,* 1999, vol. 290, pp. 119–134.
9. Adukov V.M. Fractional and Wiener-Hopf Factorizations. *Linear Algebra Appl.,* 2002, vol. 340/1 – 3, pp. 199–213.

10. Ibryaeva O.L., Adukov V.M. An Algorithm for Computing a Pade Approximant with Minimal Degree Denominator. *J. of Computational and Applied Mathematics,* 2013, vol. 237, no. 1, pp. 529–541.

11. Vinokurov V.A., Menikhes L.D. A Necessary and Sufficient Condition of Linear Regularizability. *Soviet Mathematics. Doklady,* 1976, vol. 229, no. 6, pp. 1292–1294.

12. Menikhes L.D. On Regularizability of Mappings That are Inverses of Integral Operators. *Soviet Mathematics. Doklady,* 1978, vol. 241, no. 2, pp. 282–285.

13. Fuhrmann P.A. Functional Models in Linear Algebra. *Linear Algebra Appl.,* 1992, vol. 162/164, pp. 107–151.

Поступила в редакцию 14 мая 2013 г.