

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н.М. Япарова

В работе рассмотрена обратная граничная задача теплопроводности. Для ее решения предложены различные подходы, основанные на использовании преобразований Лапласа и Фурье. Применение преобразования Лапласа позволило получить операторное уравнение, характеризующее явную зависимость искомой граничной функции от исходных данных на другой границе. Метод, основанный на использовании прямого и обратного преобразований Фурье по переменной, характеризующей время, позволяет получать устойчивые решения, погрешность которых является неулучшаемой по порядку. Предложенные подходы послужили основой для разработки алгоритмов численного решения рассматриваемой задачи и для проведения вычислительного эксперимента, в результате которого были решены обратные задачи для некоторых модельных функций.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, метод регуляризации, метод проекционной регуляризации.

Введение

При экспериментальном исследовании нестационарных тепловых процессов довольно часто возникает ситуация, когда невозможно провести прямые измерения требуемой физической величины, и ее характеристики восстанавливаются по результатам косвенных измерений. Для подобного рода задач единственный путь нахождения требуемой физической величины состоит в решении обратных граничных задач теплопроводности.

В статье предложены методы решения обратной задачи теплопроводности с постоянной границей, основанные на применении преобразований Лапласа и Фурье.

Преобразования Фурье по пространственной переменной нашло широкое применение в области решения обратных задач теплопроводности. Так, в работе [1] для получения регуляризованных решений используют преобразование Фурье и стабилизирующий функционал. В работе [2] с целью регуляризации и оценки сходимости построенных решений были применены преобразование Фурье и метод сопряженных градиентов.

Подход, рассматриваемый в предлагаемой статье, состоит в использовании преобразования Фурье по переменной, характеризующей время. В качестве регуляризирующего алгоритма решения при этом был использован метод проекционной регуляризации для прямого и обратного преобразований Фурье. В итоге было построено численное решение обратной задачи. Погрешность этих решений является неулучшаемой по порядку.

Применения преобразования Лапласа для решения обратных задач теплопроводности также вызывает большой интерес [3, 4]. В существующих подходах, как правило, после выполнения преобразования Лапласа для полученных уравнений применяются методы регуляризации, а затем для регуляризованного решения выполняется обратное преобразование.

В предлагаемом исследовании предложен другой подход. В результате его использования было построено операторное уравнение, характеризующее явную зависимость граничной функции на одной из границ от известных данных на другой границе, а уже для полученного уравнения применялись методы регуляризации. Такой подход позволил исключить элементы операционного исчисления из дальнейшей схемы исследования и применять методы регуляризации непосредственно для решения операторного уравнения.

На основании полученных результатов был создан программный комплекс и проведен вычислительный эксперимент, целью которого была проверка эффективности описанных алгоритмов, а также сравнение регуляризованных решений, полученных при использовании каждого из подходов.

1. Постановка задачи. Построение операторного уравнения с использованием преобразования Лапласа

Рассмотрим обратную задачу теплопроводности:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & x \in (0, 1), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(0, t) = 0, & x \in (0, 1), \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) &= g(t), & t \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Известно, что при $g(t) = g_0(t)$ существует точное решение $u_0(t)$. Но вместо g_0 даны g_δ и $\delta > 0$ такие, что $\|g_\delta - g_0\| \leq \delta$. В этой задаче требуется найти граничное значение функции

$$u(1, t) = \varphi(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Сведем исходную задачу (1), (2) к интегральному уравнению. С этой целью решаем прямую задачу, предположив, что функция $u(1, t) = \varphi(t)$ известна:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & x \in (0, 1), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in (0, 1), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = \varphi(t), & t \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решив эту задачу, получим уравнение, связывающее функции $u(1, t) = \varphi(t)$ и $u_x(0, t) = g(t)$.

Если $u(x, t) \in L_1([0, 1] \times [0, \infty))$, $\exists C > 0$, $\beta_0 \geq 0$ такие, что $\forall t \in [0, \infty)$ выполнено $|\varphi(t)| \geq Ce^{\beta_0 t}$, и, кроме того, при любом $T \neq \infty$ и $\forall t \in [0, T]$ функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для решения прямой задачи можно использовать преобразование Лапласа [5]. Из результатов, изложенных в работе [6] следует, что при $|x| \neq 1$ решение задачи (3) определяется формулой:

$$u(x, t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \sin(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau. \quad (4)$$

Если при любом $T \neq \infty$ $\exists M > 0$ такое, что $\forall t \in [0, T]$ выполнено $\|\varphi(t)\|_{H^2([0, T])} \leq M$, и $\varphi'(0) = 0$, то для того, чтобы получить соотношение, связывающее $u(1, t) = \varphi(t)$ и $u_x(0, t) = g(t)$ используем следующий подход. Рассмотрим частичную сумму ряда (4):

$$u_N(x, t) = 2\pi \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} n \sin(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau.$$

Интегрируя по частям, получим, что $u_N(x, t)$ имеет вид:

$$u_N(x, t) = 2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \left(\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n} \varphi(t) - \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} \varphi'(t) + \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi''(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau \right).$$

Тогда

$$u_N(x, t) = 2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n} \varphi(t) + \\ + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \left(\frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} \varphi'(t) - \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi''(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau \right).$$

Имеет место соотношение:

$$u(x, t) = u_N(x, t) + \\ + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n} \varphi(t) - \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} \varphi'(t) + \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi''(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau \right).$$

Следуя идее, предложенной в работе [7], и учитывая сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} \varphi'(t) - \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi''(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau \right),$$

получаем при $N \rightarrow \infty$

$$u(x, t) = x\varphi(t) + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \left(\frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} \varphi'(t) - \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi''(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau \right) + Q\left(\frac{1}{N}\right).$$

Тогда в качестве приближенного решения задачи (3) рассмотрим функцию, заданную формулой:

$$u(x, t) = x\varphi(t) + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \left(\frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} \varphi'(t) - \frac{\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi''(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau \right). \quad (5)$$

Продифференцируем (5) по переменной x , тогда при фиксированном N получим, что функция $u_x(0, t) = g(t)$ определяется формулой:

$$g(t) = u_x(0, t) = \varphi(t) + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \left(\frac{\varphi'(t)}{\pi^2 n^2} - \frac{e^{-\pi^2 n^2 t}}{\pi^2 n^2} \int_0^t \varphi''(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau \right).$$

Выполнив преобразования и принимая во внимание то, что для обеспечения сходимости регуляризованных решений необходима нечетность числа N , мы получаем следующее уравнение:

$$A\varphi = -\varphi(t) + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \left(\pi^2 n^2 \int_0^t \varphi(\tau) e^{-\pi^2 n^2 (t-\tau)} d\tau \right) = g(t). \quad (6)$$

При этом вместо точных значений функции $g(t)$ нам известны приближения $g_\delta(t)$ и $\delta > 0$ такие, что при любом $t \geq 0$ выполнено $\|g(t) - g_0(t)\| \leq \delta$. Требуется по $g_\delta(t)$ и $\delta > 0$ найти $\varphi(t) = u(1, t)$.

Решение этой задачи осуществляется в два этапа. На первом используют метод проекционной регуляризации для выбора оптимального количества слагаемых в уравнении (6). Затем находят решение полученного операторного уравнения.

2. Метод проекционной регуляризации

Пусть H – гильбертово пространство. $A : H \rightarrow H$ – линейный, инъективный, ограниченный оператор. $A_1 = A^*A$, спектр $Sp(A_1) = [0, \|A\|^2]$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = g, \quad u, g \in H. \quad (7)$$

Из результатов, доказанных в [8], следует существование унитарного оператора Q такого, что имеет место полярное разложение оператора A и $A = QA_1^{1/2}$. Пусть Q^* – оператор, сопряженный к Q и $\bar{g}_\delta = Q^*g_\delta$. Метод проекционной регуляризации, следуя [9], основан на том, что регуляризующее семейство $\{T_\delta^\alpha | \delta \in (0, \delta_0], \alpha \in (0, \|A\|)\}$ определяется формулой:

$$\bar{T}_\delta^\alpha g_\delta = \int_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma \bar{g}_\delta, \quad (8)$$

где $\{E_\sigma | \sigma \in [0, \|A\|]\}$ – спектральное разложение E , порожденное оператором $A_1^{1/2}$.

В качестве параметра регуляризации α выберем одно из решений уравнения:

$$\|A\bar{T}_\delta^\alpha g_\delta - g_\delta\|^2 = 9\|A\|^2\delta^2. \quad (9)$$

При использовании предложенного подхода к построению метода проекционной регуляризации приближенное решение уравнения (7) определяется формулой:

$$u_\delta^{\bar{\alpha}} = \tilde{T}_\delta^{\bar{\alpha}} g_\delta = \begin{cases} \bar{T}_\delta^{\bar{\alpha}} g_\delta, & \text{при } \|g_\delta\| > 3\|A\|\delta, \\ 0, & \text{при } \|g_\delta\| \leq 3\|A\|\delta, \end{cases} \quad (10)$$

где оператор $\bar{T}_\delta^{\bar{\alpha}} g_\delta$ задан формулой (8), а $\bar{\alpha}$ – одно из решений уравнения (9).

В работе [9] доказано, что семейство операторов $\{\tilde{T}_\delta^\alpha | \delta \in (0, \delta_0], \alpha \in (0, \|A\|)\}$ является регуляризующим семейством для уравнения (7), и погрешность регуляризованного решения $u_\delta^{\bar{\alpha}}$, определяемого соотношением (10), является неулучшаемой по порядку.

Это свойство регуляризованного решения послужило основой для проведения сравнительного анализа решений, получаемых с использованием преобразований Лапласа и Фурье.

3. Численное моделирование решения обратной задачи для преобразования Лапласа

Если $g(0) = 0$ и $g(t) \in L_1([0; \infty)) \cap C^1([0, T])$ для любого $T \neq \infty$, то, введя следующие обозначения:

$$K_n(t - \tau) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \pi^2 n^2 e^{-\pi^2 n^2 (t-\tau)}, \quad (11)$$

$$K_n(0) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \pi^2 n^2,$$

получаем, что для любого $T \neq \infty$ при $t \in [0; T]$ уравнение (6) можно рассматривать как уравнение Вольтерра второго рода. При этом необходимо учитывать [10] положительную определенность ядра (11). Это возможно, если N – нечетное, тогда уравнение (6) примет вид

$$\bar{A}\varphi = -\varphi(t) + 2 \int_0^t \sum_{n=1}^N (-1)^n \varphi(\tau) K_n(t - \tau) d\tau = g_\delta(t). \quad (12)$$

Таким образом, задача (1),(2) сведена к решению уравнения (12). Из этого уравнения требуется найти функцию $\varphi(t)$ при условии, что $\|g(t) - g_\delta(t)\| \leq \delta$.

Это решение будет зависеть от числа N , которое можно рассматривать как параметр регуляризации. Для отыскания этого параметра используем метод проекционной регуляризации, тогда количество слагаемых в частичной сумме ряда (12) определяется из уравнения:

$$\|\bar{A}\varphi(t) - g_\delta(t)\|^2 = 9\delta^2. \quad (13)$$

Предложенный подход послужил основой для создания следующей вычислительной схемы решения задачи (1), (2):

- Используя формулу правых прямоугольников, заменяем интегралы на интегральные суммы, введя равномерную сетку узлов на $[0, T]$.
- Находим значение N – количество слагаемых в ряде (12). С этой целью применяем итерационный процесс. Для обеспечения положительной определенности ядра в (12), необходимо рассматривать только нечетные значения N .
- Решаем полученную систему линейных уравнений.
- Итерационный процесс повторяем до тех пор, пока не будет выполнено условие (13).

С целью проверки достоверности полученных результатов и оценки эффективности построенной схемы был проведен вычислительный эксперимент для серии модельных примеров.

4. Численное моделирование решения обратной задачи для преобразования Фурье

Если известно, что решение прямой задачи удовлетворяет условиям

$$u(x, t), \quad u'_x(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)) \cap L_2([0, 1] \times [0, \infty)),$$

$$u_t(x, t), \quad u_{xx}(x, t) \in L_2([0, 1] \times [0, \infty)),$$

и для функции $u(t) \in W_2^1([0, \infty))$ выполнено $\|u(t)\|_{W_2^1([0, \infty))} \leq r$, то для решения задачи (1), (2) используем преобразование Фурье по переменной t , предварительно осуществив преобразование Фурье-образов функции g_δ с помощью метода проекционной регуляризации.

Пусть $\|g_\delta\|_{L_2} > 3\delta$. Применяя преобразование Фурье F_t по переменной t для исходной задачи (1), (2), получаем, что операторное изображение этой задачи имеет вид:

$$i\lambda\tilde{u}(x, \lambda) = \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, \lambda), \quad x \in (0, 1), \quad \lambda \in R, \quad (14)$$

$$\tilde{u}(0, \lambda) = 0, \quad \tilde{u}_x(0, \lambda) = \tilde{g}_\delta(\lambda),$$

где $\tilde{u}(x, \lambda) = F_t(u(x, t))$, а $\tilde{g}_\delta(\lambda) = F_t(g_\delta(t))$ – Фурье образы функций $u(x, t)$ и $g_\delta(t)$ соответственно.

В силу того, что преобразование Фурье необходимо применить только для $t \geq 0$, то спроектируем Фурье-образ функции g_δ на $R(F_t)$. Тогда функции g_δ при $t \geq 0$ будет соответствовать функция $\bar{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta))$ такая, что:

$$\bar{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta)) = \begin{cases} \tilde{g}_\delta(\lambda), & |\lambda| > \bar{\alpha}(\delta), \\ 0, & |\lambda| \leq \bar{\alpha}(\delta). \end{cases} \quad (15)$$

В качестве параметра регуляризации $\bar{\alpha}(\delta)$, заданного формулой (9), выберем решение следующего уравнения:

$$\int_{-\infty}^{-\bar{\alpha}(\delta)} |\tilde{g}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\bar{\alpha}(\delta)}^{+\infty} |\tilde{g}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda = 9\delta^2. \quad (16)$$

Так как функция $\tilde{g}_\delta(\lambda)$ была преобразована с помощью соотношений (15) и (16), то, решая задачу (14), получаем, что искомая функция $\tilde{u}(1, \lambda)$ имеет вид:

$$\tilde{u}(1, \lambda) = \frac{2sh(\mu_0\sqrt{\lambda})}{\mu_0\sqrt{\lambda}} \bar{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta)), \quad (17)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, параметр регуляризации $\bar{\alpha}(\delta)$ – одно из решений уравнения (17), а функция $\bar{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta))$ задана формулой (16).

Применим к функции $\tilde{u}(1, \lambda)$ обратное преобразование Фурье F_λ^{-1} . В результате получим следующую функцию:

$$\bar{u}_\delta(1, t) = F_\lambda^{-1}(\tilde{u}_\delta(1, \lambda)). \quad (18)$$

Используя для функции (18) метод проекционной регуляризации, имеем, что регуляризованное решение задачи (1), (2) определяется формулой:

$$u_\delta(t) = P(\text{Re } \bar{u}_\delta(1, t)) = \begin{cases} \text{Re } \bar{u}_\delta(1, t) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Предложенная схема решения служит основой для разработки численного метода решения задачи (1), (2). Вычислительная схема метода имеет следующий вид:

- Применяем преобразования Фурье для элементов g_δ , таких, что $\|g_\delta\|_{L_2} > 3\delta$, находим $\tilde{g}_\delta(\lambda)$.
- Приближенными методами решаем уравнение (16), находим параметр $\bar{\alpha}(\delta)$.
- Согласно формуле (15) получаем $\bar{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta))$.
- Используя формулу (17), находим Фурье-образ $\tilde{u}(1, \lambda)$ регуляризованного решения.
- Применяя формулы (18) и (19), получаем регуляризованное решение.

Из результатов работы [9] следует, что погрешность полученных решений не улучшаема по порядку. Это свойство послужило основой для проведения сравнительного анализа численных методов, разработанных на основе преобразований Лапласа и Фурье.

Для оценки эффективности предложенных подходов был проведен вычислительный эксперимент. В качестве тестирующих программ были решены обратные задачи для некоторых модельных функций.

5. Результаты вычислительного эксперимента

С целью проверки эффективности описанных алгоритмов были проведены расчеты для серии модельных примеров. В эксперименте были решены прямая и обратная задачи, а также найдены нормы величин отклонения регуляризованных решений от модельных функций.

В качестве примеров выбирались различные с точки зрения монотонности и непрерывности производной функции. В каждой серии проводилось по несколько повторных расчетов для каждой функции.

Вычислительный эксперимент проводился для $t \in [0, T]$. Была выбрана равномерная сетка из $m + 1$ узлов, $T = hm$, и $t_i = (i - 1)h$, $i = 1, (m + 1)$. Основные этапы вычислительного эксперимента состоят в следующем:

- Для построения функции $g(t)$, такой, что $g(0) = 0$ методом конечных разностей решаем прямую задачу (3). Используя метод численного дифференцирования, определяем значения функции $g(t)$ в узлах сетки.
- Для функции $g(t)$ моделируем значения $g_\delta(t_i)$ в каждом узле сетки t_i как значения нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $a = g(t_i)$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma = \delta$.
- Для решения обратной задачи (1), (2) по исходным данным $g_\delta(t_i)$ и $\delta > 0$ реализуем вычислительные схемы, основанные на преобразовании Лапласа и Фурье.
- Вычисляем величины $\|u_\delta - u_0\|$, где u_0 – модельная функция, u_δ – регуляризованное решение, полученное при использовании соответствующего подхода.

Результаты проведенного эксперимента проиллюстрированы на нижеприведенных рисунках. На всех рисунках приняты общие обозначения. На нижнем графике обозначение $g_0(t)$ соответствует точному значению $u_x(0, t) = g(t)$, а g_δ соответствует его возмущенному значению. На верхних графиках линия, соответствующая точному значению модельной функции $u(1, t)$, обозначена как u_0 . Обозначение u_δ^F соответствует регуляризованному решению, полученному с использованием преобразования Фурье, а u_δ^L – регуляризованному решению, полученному с использованием преобразования Лапласа, δ – величина погрешности, для которой проводились расчеты, α – величина параметра регуляризации для подхода, использующего преобразование Фурье.

Пример 1. В проведенной серии экспериментов рассматривались непрерывные монотонные функции. Эксперимент проводился при различных уровнях погрешности. На рис. 1 изображены результаты численного решения задачи (1), (2) для модельной функции $u(1, t) = te^{-t}$ при $\delta = 0,03$.

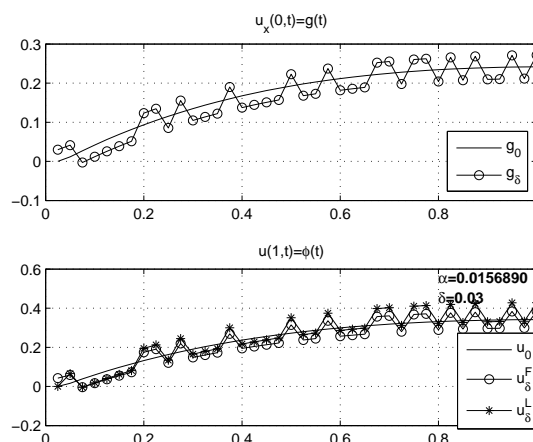


Рис. 1. Результаты численного решения задачи (1),(2)

Пример 2. В этой серии экспериментов рассматривались непрерывные гладкие функции с одним экстремумом. Эксперимент проводился при различных уровнях погрешности. На рис. 2 изображены результаты численного решения задачи (1), (2) для модельной функции $u(1, t) = t(e^{-t} - e^{-1})$ при $\delta = 0, 01$.

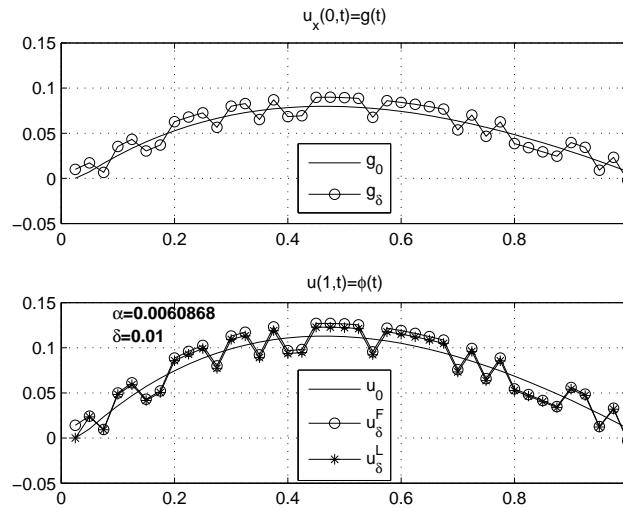


Рис. 2. Результаты численного решения задачи (1),(2)

Пример 3. В предложенной серии экспериментов исследовались непрерывные гладкие функции с несколькими экстремумами. Эксперимент проводился при различных уровнях погрешности. На рис. 3 изображены результаты численного решения задачи (1), (2) для модельной функции $u(1, t) = \sin(3\pi t)e^{-t}$ при $\delta = 0, 1$, а на рис. 4 изображены для модельной функции $u(1, t) = \sin(10\pi t)e^{-t}$ при $\delta = 0, 1$.

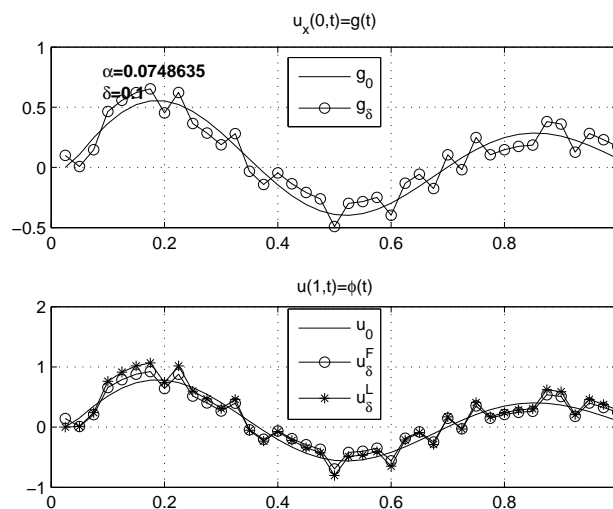


Рис. 3. Результаты численного решения задачи (1),(2)

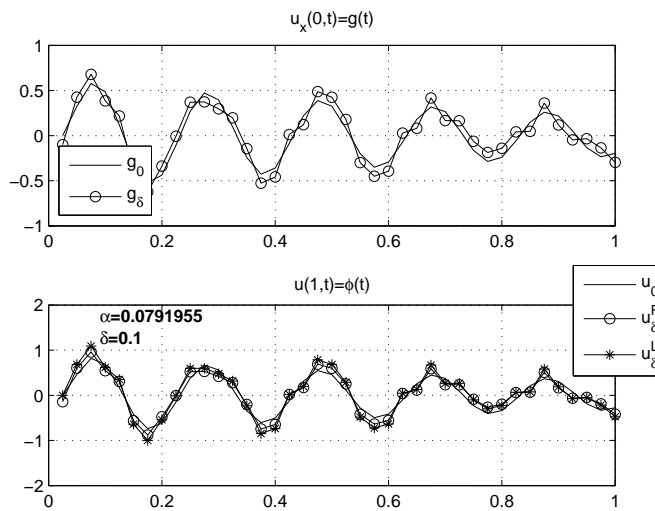


Рис. 4. Результаты численного решения задачи (1),(2)

Пример 4. В проведенной серии экспериментов рассматривались кусочно-непрерывные функции. Эксперимент проводился при различных уровнях погрешности. На рис. 5 и рис. 6 изображены результаты численного решения задачи (1), (2) для модельных функций при $\delta = 0, 1$.

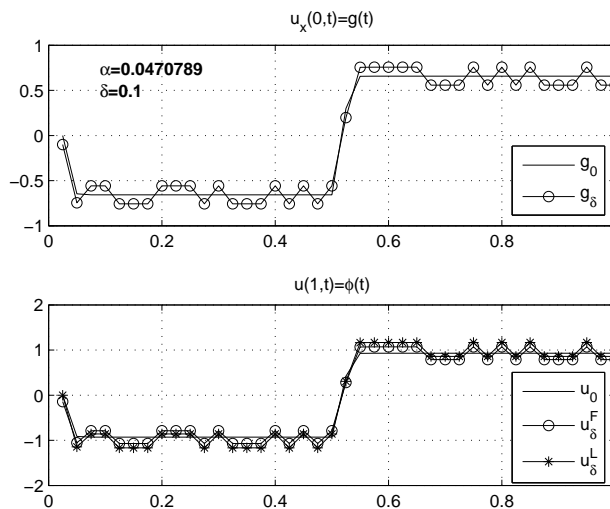


Рис. 5. Результаты численного решения задачи (1),(2)

Для проведения сравнительного анализа численных методов необходимо было в процессе проведения вычислительного эксперимента получить величину уклонения регуляризованных решений от u_0 – заданных модельных функций. С этой целью для каждой функции осуществлялось несколько повторных расчетов, при этом каждый раз вычислялись величины $\|u_\delta^F - u_0\|$ и $\|u_\delta^L - u_0\|$, где u_δ^F – решение, построенное с использованием преобразования Фурье, а u_δ^L – с использованием преобразования Лапласа. Средние значения этих величин, полученных в каждой серии эксперимента, представлены в таблице.

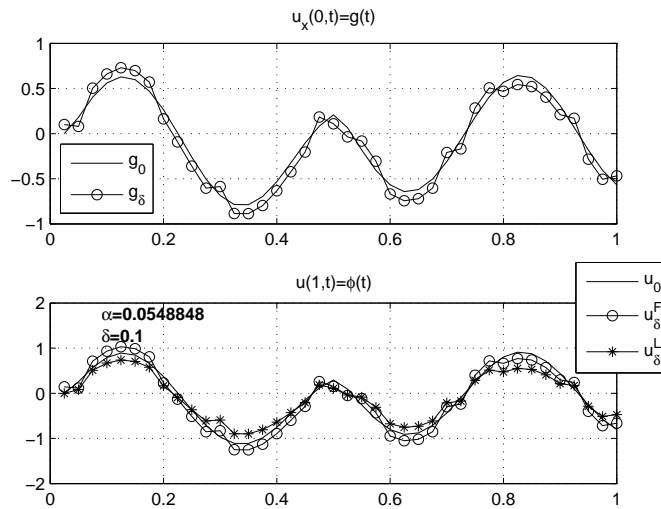


Рис. 6. Результаты численного решения задачи (1),(2)

Таблица

Модельная функция	Значение δ	Среднее значение $\ u_\delta^L - u_0\ $	Среднее значение $\ u_\delta^F - u_0\ $
$u = te^{-t}$	0,03	0,0435	0,0439
	0,01	0,0149	0,0152
$u(1, t) = t(e^{-t} - e^{-1})$	0,03	0,0409	0,0441
	0,01	0,0144	0,0155
$u(1, t) = \sin(3\pi t)e^{-t}$	0,01	0,0520	0,0183
	0,1	0,1478	0,1393
$u(1, t) = \sin(10\pi t)e^{-t}$	0,01	0,1065	0,0180
	0,1	0,1985	0,1875
$u(1, t) = \begin{cases} -40t, & t \in [0; 0,025], \\ -1, & t \in (0,025; 0,5], \\ 80t - 39, & t \in (0,5; 0,525], \\ 1, & t \in (0,525; 1]. \end{cases}$	0,01	0,0194	0,0141
	0,1	0,2304	0,0164
$u(1, t) = \begin{cases} \sin(5\pi t) - 2.5t^2, & t \in [0; 0.5), \\ \cos(5\pi t), & t \in [0.5; 1]. \end{cases}$	0,01	0,0174	0,0140
	0,1	0,2004	0,0151

На основании полученных результатов эксперимента можно сделать следующие выводы. Оба подхода позволяют находить регуляризованные решения с достаточной точностью. Подход, основанный на преобразовании Фурье и методе проекционной регуляризации, позволяет получать результаты с гарантированной точностью, что подтверждается теоретическими оценками метода проекционной регуляризации, приведенными в работе [9]. Однако, при увеличении порядка погрешности исходных данных изменяется и порядок погрешности полученных решений и численный метод решения задачи, основанный на преобразовании Фурье и методе проекционной регуляризации, более сложен, чем метод, основанный на преобразовании Лапласа.

Подход, основанный на преобразовании Лапласа и методе проекционной регуляризации, позволяет построить приближенные решения с достаточной степенью точности. С целью уточнения оценки погрешности решений, полученных при использовании этого подхода, и улучшения сходимости построенных решений в дальнейшем планируется рассмотреть численное решение уравнения такого типа с помощью квадратур правых (средних) прямоугольников по аналогии с подходом, предложенным в [10].

Заключение

В статье предложены различные подходы к решению обратной граничной задачи. Подход, основанный на использовании метода регуляризации для прямого и обратного преобразований Фурье, позволяет получать приближенные решения с гарантированной степенью точности. Оценки погрешности таких решений являются неулучшаемыми по порядку. Преимуществом этого подхода является то, что он используется для непосредственного решения обратной граничной задачи, и регуляризованное решение для неч выписывается в явной форме. Однако, численный метод решения задачи более сложен, чем метод, основанный на преобразовании Лапласа, поскольку использует элементы операционного исчисления, а также достаточно сложный с точки зрения численной реализации критерий выбора параметра регуляризации.

Подход, основанный на преобразовании Лапласа, позволил свести решение исходной задачи к решению корректных интегральных операторных уравнений и исключить элементы операционного исчисления из процесса регуляризации. Численный метод, используемый при таком подходе, более прост с точки зрения компьютерной реализации, чем метод, использующий преобразования Фурье. Экспериментальные оценки погрешности полученных решений свидетельствуют о достаточной точности полученных решений. Следует заметить, что необходимо провести дополнительные исследования, связанные с уточнением оценок погрешности полученных решений.

Литература

1. Jonas, P. Approximate Inverse for a One-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem / P. Jonas, A.K. Louis // *Inverse Problems*. – 2000. – V. 16. – С. 175–185.
2. Prud'homme, M. Fourier Analysis of Conjugate Gradient Method applied to Inverse Heat Conduction Problems / M. Prud'homme, T.H. Nguyen // *International J. of Heat and Mass Transfer*. – 1999. – V. 42. – С. 4447–4460.
3. Cialkowski, M. Sequential and Global Method of Solving an Inverse Problem of Heat Conduction Equation / M. Cialkowski, K. Grysa // *J. of Theoretical and applied Mechanics*. – 2010. – V. 48. – С. 111–134.
4. An Analytical Solution for Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problems Using Laplace Transform. *International* / M. Monde, H. Arima, W. Liu, Y. Mitutake, J.A. Hammad // *J. of Heat and Mass Transfer*. – 2003. – V. 46. – P. 2135–2148.
5. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М.: Наука, 1971.
6. Япарова, Н.М. О различных подходах к решению обратных граничных задач тепловой диагностики / Н.М. Япарова // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2012. – № 34. – С. 60–67.
7. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980.

8. Менихес, Л.Д. Конечномерная аппроксимация в методе М.М. Лаврентьева / Л.Д. Менихес, В.П. Танана // Сибирский журнал вычислительной математики. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 416–423.
9. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 353–368.
10. Солодуша, С.В. Моделирование систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра / С.В. Солодуша // Моделирование и анализ информационных систем. – 2012. – № 1. – С. 60–68.

Наталья Михайловна Япарова, кандидат физико-математических наук, кафедра «Прикладная математика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), nataly7@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 3, pp. 112–124.

MSC 65N21 58J35; 35R30; 80M30

Numerical Simulation for Solving an Inverse Boundary Heat Conduction Problem

N.M. Yaparova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, nataly7@mail.ru

This paper proposes different approaches that help to find numerical solution to the boundary problem for heat equation. The Laplace and Fourier transforms are the basis for these approaches. The application of the Laplace transform allowed us to obtain an operator equation which connected the unknown function at one boundary with the initial data on the other boundary. The approach based on the Fourier transform for a time variable enables us to get a stable solution for the inverse problem of heat diagnostics. The obtained results are used for devising numerical methods. Comparative computational analysis of these approaches shows the limits of applications and effectiveness of each numerical method.

Keywords: boundary value problems for heat equation, regularization methods, the Laplace transform, Fourier transform, method of projective regularization.

References

1. Jonas P., Louis A.K. Approximate Inverse for a One-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems*, 2000, vol. 16, pp. 175–185.
2. Prud'homme M., Nguyen T.H. Fourier Analysis of Conjugate Gradient Method Applied to Inverse Heat Conduction Problems. *International J. of Heat and Mass Transfer*, 1999, vol. 42, pp. 4447–4460.
3. Kolodziej J., Mierzwiczak M., Cialkowski M. Application of the Method of Fundamental Solutions and Radial Basis Functions for Inverse Heat Source Problem in Case of Steady-State. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2010, vol. 37, no. 2, pp. 121–124.

4. Monde M., Arima H., Liu W., Mitutake Y., Hammad J.A. An Analytical Solution for Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problems Using Laplace Transform. *International J. of Heat and Mass Transfer*, 2003, vol. 46, pp. 2135–2148.
5. Doetsch G. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*. R. Oldenbourg, 1961. 256 p.
6. Yaparova N.M. Different Approaches to Solve Inverse Boundary Value Problems of Thermal Diagnostics. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematics. Mechanics. Physics»*, 2012, vol. 34, pp. 60–67. (in Russian)
7. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis]. Moscow, Nauka, 1980. 287 p.
8. Menikhes L.D., Tanana V.P. The Finite Dimensional Approximation for the Lavrentiev Method. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki* [Numerical Analysis and Applications], Novosibirsk, 1998, vol. 1, no.1, pp. 416–423. (in Russian)
9. Tanana V.P., Yaparova N.M. The Optimum in Order Method of Solving Conditionally-Correct Problems. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki* [Numerical Analysis and Applications], Novosibirsk, 2006, vol. 9, issue 4, pp. 301–316. (in Russian)
10. Solodusha S.V. Automatic Control Systems Modeling by Volterra Polynomials. *Modeling and Analysis of Information System*, 2012, vol. 19, issue 1, pp. 60–68. (in Russian)

Поступила в редакцию 15 мая 2013 г.