УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Е.В. Табаринцева

В работе рассмотрена задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Устойчивое приближенное решение данной нелинейной некорректно поставленной задачи строится с помощью метода проекционной регуляризации. Параметр регуляризации выбирается по схеме М.М. Лаврентьева. Получена точная по порядку оценка погрешности этого метода на классе корректности, заданном с помощью нелинейного оператора. При исследовании методов приближенного решения некорректно поставленных задач на оптимальность важную роль играет модуль непрерывности оператора соответствующей задачи на классах корректности, которые, как правило, определяются с помощью линейных операторов. В настоящей работе получена двусторонняя оценка модуля непрерывности для нелинейной обратной задачи на классе корректности, заданном с помощью нелинейного оператора. С учетом полученной оценки модуля непрерывности доказана оптимальность по порядку метода проекционной регуляризации на рассмотренном классе корректности.

Ключевые слова: обратная задача; метод приближенного решения; модуль непрерывности; оценка погрешности.

Введение

В статье рассматривается задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения.

Данная задача поставлена некорректно, поэтому основными вопросами при ее исследовании являются вопросы построения устойчивого приближенного решения и оценки погрешности приближенного решения.

Для линейных некорректно поставленных задач общая теория регуляризуемости разрабатывалась в статьях Л.Д. Менихеса и В.А. Винокурова (см., напр., [1, 2]).

В работах В.К. Иванова, В.Н. Страхова, их учеников и последователей (см., напр., [3]) была создана теория, и разработан аппарат для получения оценок погрешности методов приближенного решения линейных некорректно поставленных задач на компактных множествах (классах корректности). В этой теории естественным образом вводятся понятия оптимального и оптимального по порядку метода приближенного решения.

Соответствующие понятия были введены и для нелинейных некорректно поставленных задач (см., напр., [4]).

Пусть H – гильбертово пространство, $M \subset U$, а C[H] – пространство непрерывных отображений, действующих в H.

Рассмотрим операторное уравнение

$$A_0 u = f; \quad u \in H; \quad f \in H, \tag{1}$$

$A_0 \in C[H]$ – взаимно-однозначный оператор.

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1), которое принадлежит множеству M, но точное значение правой части нам не известно, а вместо него дано приближенное значение $f_\delta \in H$ такое, что $\|f_0 - f_\delta\| \le \delta$. Требуется по исходым данным задачи M и f_δ определить приближенное решение уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения.

Определение 1. *Семейство операторов $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве M, если для любого $\delta \in (0; \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает пространство H в H и $T_\delta f_\delta \to u_0$ при $\delta \to 0$ равномерно на множестве M при условии $\|A_0 u_0 - f_\delta\| \le \delta$.*

Рассмотрим следующую величину, характеризующую точность метода $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ на множестве M :

$$\Delta(T_\delta) = \sup\{\|u - T_\delta f_\delta\| : \quad u \in M, \ \|A_0 u - f_\delta\| \le \delta\}.$$

Обозначим

$$\omega_1(\tau; M) = \sup\{\|u_1 - u_2\| : \quad u_1, u_2 \in M, \quad \|A_0 u_1 - A_0 u_2\| \le \tau\}$$

модуль непрерывности оператора, обратного к A_0 , на множестве $A_0 M$.

Определение 2. *Метод $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть оптимальным по порядку на множестве M , если существует число k такое, что для любого $\delta \in (0; \delta_0]$*

$$\Delta(T_\delta) \le k\omega_1(\delta; M).$$

В работе [3] для линейных некорректно поставленных задач был разработан метод вычисления оценочной функции (модуля непрерывности обратного оператора), которая играет основную роль при исследовании методов приближенного решения на оптимльность.

Различные подходы к приближенному решению нелинейных некорректно поставленных задач предложены и исследованы, например, в монографии [5].

Однако, для нелинейных некорректно поставленных задач аппарат для получения оценок погрешности методов приближенного решения на классах корректности и исследования этих методов на оптимальность разработан недостаточно.

В частности, как правило, оценки погрешности приближенных решений рассматриваются на классах корректности, заданных с помощью линейных операторов, что естественно в случае линейных некорректно поставленных задач, но не всегда адекватно отражает априорную информацию о точном решении нелинейной некорректно поставленной задачи.

В настоящей работе получена двусторонняя оценка модуля непрерывности нелинейной обратной задачи на классе корректности, заданном с помощью нелинейного оператора.

Приближенные решения полулинейной обратной задачи строятся с помощью метода проекционной регуляризации. Доказана оптимальность по порядку метода проекционной регуляризации на рассмотренном классе корректности.

1. Задача с обратным временем для дифференциально-операторного уравнения

Пусть H – гильбертово пространство, A – линейный неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H.

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t)); \quad t \in (t_0; T), \tag{2}$$

$$u(t_0) = \varphi, \quad \varphi \in H, \quad 0 < t_0 < T,$$

удовлетворяет условию $u(T) = \chi$. Здесь $f : [0;T] \times H \to H$ - отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной u и условию Гельдера по переменной t , т.е. существуют постоянные $L > 0$, $M > 0$, $0 < \alpha < 1$, такие, что

$$\|f(u_1, t) - f(u_2, t)\|_H \leq L\|u_1 - u_2\|_H + M|t_1 - t_2|^\alpha$$

для всех $t_1,\ t_2 \in [0;T]$, $u_1,\ u_2 \in H$.

Зафиксируем число $r > 0$. Рассморим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t)); \quad t \in (0;T), \tag{3}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in H.$$

Обозначим $\varphi = u(t_0)$. Рассмотрим множество

$$M = \{\varphi \in H : \|u_0\| \leq r\}.$$

Предположим, что при заданном $\chi \in H$ существует точное решение $\varphi \in H$ поставленной обратной задачи, принадлежащее множеству M.

Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$ такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$. Требуется по исходым данным задачи определить приближенное решение φ_δ задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Задача Коши (2) равносильна интегральному уравнению

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)} f(\tau, u(\tau))d\tau \tag{4}$$

(см., напр., [6]).

Наряду с задачей Коши (2) рассмотрим задачу Коши для соответствующего линейного уравнения

$$\frac{dv}{dt} = -Av \quad t \in (t_0;T), \tag{5}$$

$$v(t_0) = \varphi, \quad \varphi \in H, \quad 0 < t_0 < T.$$

Обозначим $\hat{\chi} = v(T)$.

Выполняется следующая лемма [7]

Лемма 1. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H$, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — соответствующие решения задачи* (2), *$v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$ — решения задачи* (5). *Тогда при каждом $t \in [t_0;T]$ выполняются неравенства*

$$e^{-LTe^{LT}}\|v_1 - v_2\| \leq \|u_1 - u_2\| \leq e^{LT}\|v_1 - v_2\|.$$

Рассмотрим величины:

$$\omega(M, \delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|\chi_1 - \chi_2\| \leq \delta\} -$$

модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$$\hat{\omega}(M, \delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2\| \leq \delta\} -$$

модуль непрерывности для линейной обратной задачи.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$2e^{Lt_0(1-e^{LT})}r^{\frac{T-t_0}{T}}\delta^{\frac{t_0}{T}} \le \omega_1(\delta, M) \le 2e^{Lt_0(1+e^{LT})}r^{\frac{T-t_0}{T}}\delta^{\frac{t_0}{T}}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in M$. По лемме 1 выполняется оценка

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le e^{Lt}\|e^{-At}(u_0^1 - u_0^2)\| \quad (0 \le t \le T), \tag{6}$$

в частности, при $t = t_0$ получаем неравенство

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| \le e^{Lt_0}\|e^{-At_0}(u_0^1 - u_0^2)\|. \tag{7}$$

Из леммы 1 следует также

$$\|e^{-At}(u_0^1 - u_0^2)\| \le e^{LTe^{LT}}\|u_1(t) - u_2(t)\|, \tag{8}$$

в частности, при $t = T$ получаем неравенство

$$\|e^{-AT}(u_0^1 - u_0^2)\| \le e^{LTe^{LT}}\|\chi_1 - \chi\varphi_2\|. \tag{9}$$

Рассмотрим элементы φ_1, φ_2, принадлежащие множеству M, т.е. $\|u_0^1\| \le r$, $\|u_0^2\| \le r$. Рассмотрим число $\delta_1 = e^{LTe^{LT}}\delta$, множество $\tilde{M} = BS(0;r)$, где $B = e^{-At_0}$ и оператор $A_0 = e^{-A(T-t_0)}$. Обозначим

$$\tilde{\omega}(\delta, \tilde{M}) = \sup\{\|z_1 - z_2\| : z_1,\ z_2 \in \tilde{M},\ \|A_0(z_1 - z_2)\| \le \delta\}-$$

модуль непрерывности оператора A_0^{-1} на множестве $A_0\tilde{M}$. Вычислим величину $\tilde{\omega}(\delta, \tilde{M})$ по схеме, предложенной в [3]:

$$\tilde{\omega}(\delta, \tilde{M}) = 2r^{\frac{T-t_0}{T}}\delta^{\frac{t_0}{T}}. \tag{10}$$

Рассмотрим элементы $z_1 = e^{-At_0}u_0^1$, $z_2 = e^{-At_0}u_0^2$, принадлежащие множеству $\tilde{M}$, так как

$$\|B^{-1}z_1\| = \|e^{At_0}z_1\| = \|u_0^1\| \le r,$$

$$\|B^{-1}z_2\| = \|e^{At_0}z_2\| = \|u_0^2\| \le r.$$

Из (9) следует $\|A_0(z_1 - z_2)\| = \|e^{-AT}(u_0^1 - u_0^2)\| \le e^{LTe^{LT}}\delta = \delta_1$. По определению модуля непрерывности оператора A_0^{-1}, обратного к A_0, на множестве $A_0\tilde{M}$

$$\|z_1 - z_2\| = \|e^{-At_0}(u_0^1 - u_0^2)\| \le \tilde{\omega}(\delta, \tilde{M}) = 2e^{LT}r^{1-\frac{t_0}{T}}\delta_1^{\frac{t_0}{T}}.$$

Следовательно, в силу (7) с учетом определения числа δ_1

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| \le 2e^{Lt_0}r^{1-\frac{t_0}{T}}\delta_1^{\frac{t_0}{T}}. \tag{11}$$

Следовательно, $\omega_1(\delta, M_2) \le 2e^{Lt_0(1+e^{LT})}r^{\frac{T-t_0}{T}}\delta^{\frac{t_0}{T}}$.

Оценим $\omega_1(\delta, M_2)$ снизу. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in M$. Неравенство (8) при $t = t_0$ запишем в виде

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| \ge e^{-Lt_0e^{Lt_0}}\|e^{-At_0}(u_0^1 - u_0^2)\|. \tag{12}$$

Рассмотрим элементы $z_1 = e^{-At_0}u_0^1$, $z_2 = e^{-At_0}u_0^2$, принадлежащие множеству $\tilde{M} = BS(0;r)$, где $B = e^{-At_0}$. Рассмотрим оператор $A_0 = e^{-A(T-t_0)}$. Вычисляя величину $\tilde{\omega}(\delta, \tilde{M})$, находим

$$\tilde{\omega}(\delta, \tilde{M}) = 2r^{\frac{T-t_0}{T}}\delta^{\frac{t_0}{T}}. \tag{13}$$

Пусть $z_1 = e^{-At_0}u_0^1$, $z_2 = e^{-At_0}u_0^2$ – произвольные элементы из $\tilde{M}$, т.е. $\|u_0^1\| \leq r$, $\|u_0^1\| \leq r$, причем $\|A_0(z_1 - z_2)\| \leq e^{-LT}\delta = \delta_1$.

Обозначим $u_1(t)$ решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t,u) \quad (0 < t < T)$$

$$u(0) = u_0^1;$$

$u_2(t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t,u) \quad (0 < t < T)$$

$$u(0) = u_0^2;$$

$\varphi_1 = u_1(t_0)$; $\varphi_2 = u_2(t_0)$.

По определению элементы $\varphi_1,\ \varphi_2 \in M$, причем из неравенства (6), записанного при $t = T$,

$$\|\chi_1 - \chi_2\| \leq e^{LT}\|e^{-At_0}(u_0^1 - u_0^2)\| \leq e^{LT}\delta_1 = \delta.$$

Таким образом, из условий $z_1,\ z_2 \in \tilde{M}$ и $\|A_0(z_1 - z_2)\| \leq \delta_1$ следует $\varphi_1,\ \varphi_2 \in M$ и $\|\chi_1 - \chi_2\| \leq \delta$. Следовательно, из (12)

$$\omega_1(\delta, M_2) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| : \varphi_1, \varphi_2 \in M_2; \|\chi_1 - \chi_2\| < \delta\} \geq$$

$$\geq e^{-2t_0e^{LT}}\sup\{\|z\| : z_1,\ z_2 \in \tilde{M},\ \|A_0(z_1 - z - 2)\| \leq \delta_1 = \tilde{\omega}(\delta, \tilde{M}) = e^{-2t_0e^{LT}}2r^{\frac{T-t_0}{T}}\delta_1^{\frac{t_0}{T}},$$

т.е. с учетом определения числа δ_1

$$\omega_1(\delta, M_2) \geq 2e^{Lt_0(1-e^{LT})}2r^{\frac{T-t_0}{T}}\delta^{\frac{t_0}{T}}.$$

□

2. Метод приближенного решения задачи с обратным временем

Обозначим через $\{E_\lambda : \lambda \geq 0\}$ разложение единицы, порожденное оператором A. Пусть A_α – линейный ограниченный оператор в H, определяемый формулой

$$A_\alpha u = \int\limits_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0) \in E_\alpha H$, где $u^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du^\alpha(t)}{dt} = -A_\alpha u^\alpha(t) + E_\alpha f(t, u^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); u^\alpha(T) = E_\alpha\chi. \tag{14}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du^\alpha(t)}{dt} = -A_\alpha u^\alpha(t) + E_\alpha f(t, u^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \quad u^\alpha(t_0) = \varphi_\alpha. \tag{15}$$

Так как A_α – ограниченный самосопряженный оператор в H, то задача Коши (15) равносильна интегральному уравнению

$$u^\alpha(t) = e^{-A_\alpha(t-t_0)}E_\alpha\varphi^\alpha + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A_\alpha(t-\tau)}E_\alpha f(\tau, u^\alpha(\tau))d\tau. \qquad (16)$$

Выполняется

Теорема 1. *Для любого элемента $\chi \in H$ существует элемент $\varphi_\alpha \in E_\alpha H$, такой, что решение $u(t)$ задачи Коши (15)удовлетворяет условию $u^\alpha(T) = E_\alpha\chi$.*

Доказательство теоремы может быть получено стандартным способом с применением принципа сжимающих отображений.

3. Оценка погрешности метода проекционной регуляризации

Обозначим $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0)$, где $u^\alpha(t)$ – решение задачи (14); $\varphi^\alpha_\delta = u^\alpha_\delta(t_0)$, где $u^\alpha_\delta(t)$- решение задачи (14) с приближенными исходными данными. В качестве приближенного решения задачи с обратным временем рассмотрим элемент $\varphi_\delta^{\alpha(\delta)} = P_{\alpha(\delta)}\chi_\delta$ при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

Рассмотрим величину

$$\Delta_{M_i}(\alpha, \delta) = \sup\{\|\varphi^\alpha_\delta - \varphi\| : \varphi \in M, \|\chi - \chi_\delta\| \le \delta\},$$

характеризующую точность построенного метода приближенного решения задачи (2) на классе корректности M.

Воспользуемся неравенством

$$\Delta_M(\alpha, \delta) \le \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha, \delta),$$

где

$$\Delta_2(\alpha, \delta) = \sup_{\|\chi - \chi_\delta\| \le \delta} \|\varphi^\alpha_\delta - \varphi^\alpha\|;$$

$$\Delta_1(\alpha) = \sup_{\varphi \in M} \|\varphi^\alpha - \varphi\|.$$

Оценим величину $\Delta_2(\alpha, \delta)$. Рассмотрим функцию $v_\alpha(t) = e^{(t-t_0)\alpha}u_\alpha(t)$. Функция $v_\alpha(t)$, очевидно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dv^\alpha(t)}{dt} = -A_\alpha v^\alpha(t) + E_\alpha g_\alpha(t, v^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T), \qquad (17)$$

где $g_\alpha(t, v) = E_\alpha e^{(t-t_0)\alpha} f(t, e^{-(t-t_0)\alpha}v) : [t_0; T] \times H \to H$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной v и условию Гельдера по переменной t, $t \in [0; T]$.

По построению функция $v^\alpha(t)$ удовлетворяет также условиям

$$v^\alpha(t_0) = \varphi_\alpha; \qquad (18)$$

$$v^\alpha(T) = e^{(T-t_0)\alpha}\chi. \qquad (19)$$

Решение задачи Коши (17), (18) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v^\alpha(t) = e^{-(A_\alpha - \alpha E)(t-t_0)}E_\alpha\varphi_\alpha + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(A_\alpha - \alpha E)(t-\tau)}E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau))d\tau. \qquad (20)$$

Из равенства (20) при $t = T$ с учетом (19) следует равенство

$$e^{\alpha(T-t_0)}E_\alpha\chi = e^{-(A_\alpha-\alpha E)(t-t_0)}E_\alpha\varphi_\alpha + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-(A_\alpha-\alpha E)(T-\tau)}E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau))d\tau. \tag{21}$$

Из (21) следует

$$e^{-(A_\alpha-\alpha E)(t-t_0)}E_\alpha\varphi_\alpha = e^{\alpha(T-t_0)}E_\alpha\chi - \int\limits_{t_0}^{T} e^{-(A_\alpha-\alpha E)(\tau-t)}E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau))d\tau. \tag{22}$$

Подставляя выражение (22) в равенство (20) , имеем

$$v^\alpha(t) = e^{(A_\alpha-\alpha E)(T-t)}e^{\alpha(T-t_0)}E_\alpha\chi - \int\limits_{t}^{T} e^{(A_\alpha-\alpha E)(\tau-t)}E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau))d\tau. \tag{23}$$

Аналогично, функция $v_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_\delta^\alpha(t) = e^{(A_\alpha-\alpha E)(T-t)}e^{\alpha(T-t_0)}E_\alpha\chi_\delta - \int\limits_{t}^{T} e^{(A_\alpha-\alpha E)(\tau-t)}E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha^\delta(\tau))d\tau. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует неравенство

$$\|v^\alpha - v_\delta^\alpha(t)\| \le \|e^{(A_\alpha-\alpha E)(T-t)}\|e^{\alpha(T-t_0)}\|\chi - \chi_\delta\| + L\int\limits_{t}^{T} \|e^{(A_\alpha-\alpha E)(\tau-t)}\|\|v^\alpha - v_\delta^\alpha(\tau)\|d\tau. \tag{25}$$

Из неравенства (25) с учетом леммы Гронуолла и неравенства

$$\|e^{(A_\alpha-\alpha E)(T-t)}\| \le \max_{0\le\lambda\le\alpha} e^{(\lambda-\alpha)(T-t)} \le 1$$

следует

$$\|v^\alpha - v_\delta^\alpha(t)\| \le e^{\alpha(T-t_0)}e^{L(T-t)}\delta,$$

откуда при $t = t_0$

$$\|\varphi^\alpha - \varphi_\delta^\alpha(t)\| \le e^{\alpha(T-t_0)}e^{L(T-t_0)}\delta.$$

Следовательно, для величины $\Delta_2(\alpha, \delta)$ имеем оценку

$$\Delta_2(\alpha, \delta) \le e^{\alpha(T-t_0)}e^{LTe^{LT}}\delta. \tag{26}$$

Оценим величину $\Delta_1(\alpha)$.

Рассмотрим функцию $u(t)$, удовлетворяющую интегральному уравнению (4) и функцию $u_\alpha(t)$, удовлетворяющую (16) и функцию $\overline{u}(t) = E_\alpha u(t)$. Рассмотрим равенство

$$\overline{u}(t) = e^{A_\alpha(T-t)}E_\alpha\chi - \int\limits_{t}^{T} e^{A_\alpha(\tau-t)}E_\alpha f(\tau, \overline{u}(\tau))d\tau. \tag{27}$$

Из (4) следует равенство

$$\chi = e^{-A(T-t_0)}\varphi + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-A(T-\tau)}f(\tau, \overline{u}(\tau))d\tau. \tag{28}$$

Подставляя выражение (28) в равенство (16) и учитывая, что $e^{A_\alpha(T-t)}E_\alpha = e^{A(T-t)}E_\alpha$, имеем равенство

$$u^\alpha(t) = e^{-A(t-t_0)}E_\alpha\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau}E_\alpha f(\tau, u(\tau))d\tau + \int\limits_{t}^{T} e^{A(\tau-t)}E_\alpha(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, u^\alpha(\tau)))d\tau. \tag{29}$$

С учетом равенства (27) из (29) следует

$$u^\alpha(t) - u(t) = E_\alpha u(t) - u(t) + \int\limits_{t}^{T} e^{A(\tau-t)}E_\alpha(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, u^\alpha(\tau)))d\tau. \tag{30}$$

Из (30) с учетом неравенства $\|e^{A(\tau-t)}E_\alpha\| \le e^{\alpha(\tau-t)}$ следует

$$e^{-\alpha(T-t)}\|u^\alpha(t) - u(t)\| \le e^{-\alpha(T-t)}\|E_\alpha u(t) - u(t)\| + L\int\limits_{t}^{T} e^{-\alpha(T-\tau)}\|u^\alpha(\tau) - u(\tau)\|d\tau. \tag{31}$$

Из (31) в силу леммы Гроноулла

$$\|u^\alpha(t) - u(t)\| \le e^{L(T-t_0)}\|E_\alpha u(t) - u(t)\|. \tag{32}$$

Рассмотрим функцию $v^\alpha(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{dv^\alpha(t)}{dt} = -Av^\alpha(t) + f(v^\alpha(t)), \quad t \in (0, T); v^\alpha(0) = E_\alpha u_0. \tag{33}$$

По лемме 1

$$\|v^\alpha(t)\| \le e^{LT}\|e^{-At}(E_\alpha - E)u_0\|. \tag{34}$$

Оценим норму разности проекций:

$$\|(E - E_\alpha)v^\alpha(t) - (E - E_\alpha)u(t)\| \le L\int\limits_{0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\|v^\alpha(\tau) - u(\tau)\|d\tau. \tag{35}$$

Так как в силу леммы 1 $\|v^\alpha(t) - u(t)\| \le e^{LT}\|e^{-At}E_\alpha u_0\|$, то из (35) следует

$$\|(E - E_\alpha)v^\alpha(t) - (E - E_\alpha)u(t)\| \le Lte^{-\alpha t}r. \tag{36}$$

Из неравенств (36) и (34) следует оценка

$$\|(E-E_\alpha)u(t)\| \le \|(E-E_\alpha)v^\alpha(t) - (E-E_\alpha)u(t)\| + \|(E-E_\alpha)v^\alpha(t)\| \le (1+Lt)e^{Lt}re^{-\alpha t}. \tag{37}$$

Из неравенств (37) и (32) следует, что

$$\Delta_1(\alpha) = \sup\{\|\varphi - E_\alpha\varphi\| : \varphi \in M\} \le \overline{\Delta}_1(\alpha) \le re^{\alpha t_0}.$$

Выберем зависимость $\alpha = \alpha^*(\delta)$ из условия

$$e^{\alpha(T-t_0)}\delta = re^{-\alpha t}. \tag{38}$$

Из (38) следует , что оценка погрешности метода проекционной регуляризации на множестве M с выбором параметра регуляризации из условия (38) имеет вид

$$\Delta_M(\alpha^*(\delta), \delta) \le 2re^{LT}(1 + LT)e^{-\alpha t_0}. \tag{39}$$

Из леммы 2 и неравенства (39) следует

Теорема 2. *Метод проекционной регуляризации оптимален по порядку на множестве* M.

Другие методы решения нелинейных обратных задач рассмотрены, например, в статьях [9, 10].

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, проект 12-01-00117

Литература

1. Менихес, Л.Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам / Л.Д. Менихес // Математические заметки. – 1999. – Т. 65, № 2. – С. 222–229.
2. Менихес, Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости лмнейных обратных задач / Л.Д. Менихес // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 2. – С. 242–246.
3. Иванов, В.К. Об оценке погрешности при решении линейных некорректных задач / В.К. Иванов, Т.И. Королюк // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1969. – Т. 9, № 1. – С. 30–41.
4. Танана, В.П. Methods for solution of nonlinear operator equations/ В.П. Танана. – Utrecht: VSP, 1997.
5. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией /В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: Наука, 1993.
6. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. /Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.
7. Табаринцева, Е.В. Об оценке модуля непрерывности одной нелинейной обратной задачи/ Е.В. Табаринцева // Труды ИММ УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 253–257.
8. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 1(21). – С. 129–142.
9. Табаринцева, Е.В. Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения / Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т. 8, № 3. – С. 259–271.
10. Танана, В.П. О методе приближения кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач/ В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 221–228.

Елена Владимировна Табаринцева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Общая математика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), eltab@rambler.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 3, pp. 85–94.

MSC 47J06

On Error Estimate of an Approximate Method to Solve an Inverse Problem for a Semi-Linear Differential Equation

E.V. Tabarintseva, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, eltab@rambler.ru

An inverse problem for a semi-linear differential-operator equation in a Hilbert space is considered in the paper. The projection regularization method is used to get a stable approximate solution to the nonlinear ill-posed problem. The regularization parameter is chosen referring to the Lavrentev scheme. A sharp error estimate of the considered method on a correctness class defined by means of a nonlinear operator is obtained. The value of the continuity module for the corresponding problem on the correctness classes plays an important role in the investigation of the methods for the solution of ill-posed problems in order to state their optimality. The linear operators are used, as a rule, to define the correctness classes. The two-sided estimate of the continuity module for the nonlinear inverse problem on the correctness class defined by a nonlinear operator is obtained in the present work. The obtained estimate of the continuity module is used to prove the order-optimality of the projection regularization method on the analyzed correctness class.

Keywords: inverse problem; a method of approximate solution; continuity module; error estimate; semilinear rquation.

References

1. Menikhes L.D. Regularizability of Some Classes of Mappings that are Inverses of Integral Operators. *Mathematical Notes,* 1999, vol. 65, no. 1–2, pp. 181–187.
2. Menikhes L.D. On a Sufficient Condition for Regularizability of Linear Inverse Problems. *Mathematical Notes,* 2007, vol. 82, no. 1–2, pp. 242–246.
3. Ivanov V.K., Korolyuk T.I. Error Estimates for Solutions of Incorrectly Posed Linear Problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 1969, vol. 9, no. 1, pp. 35–49.
4. Tanana V.P. *Methods for Solution of Nonlinear Operator Equations.* Utrecht, VSP, 1997.
5. Vasin V.V., Ageev A.L. *Inverse and Ill-Posed Problems with a Priori Information.* Utrecht, VSP, 1995.
6. Henry D. *Geometric Theory of Semi-Linear Parabolic Equations.* Berlin, Springer, 1981.
7. Tabarintseva E.V. On an Estimate for the Modulus of Continuity of a Nonlinear Inverse Problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics], 2013, vol. 19, no. 1, pp. 253–257. (in Russian)
8. Tanana V.P., Tabarintseva E.V. On an Approximation Method of a Discontinuous Solution of an Ill-Posed Problem. *Sibsrskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2005, vol. 8, no. 1, pp. 129–142. (in Russian)
9. Tabarintseva E.V. On Error Estimation for the Quasi-Inversion Method for Solving a Semi-Linear Ill-Posed Problem. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki* [Numerical Analysis and Applications], 2005, vol. 8, no. 3, pp. 259–271. (in Russian)
10. Tanana V.P., Tabarintseva E.V. On a method to approximate discontinuous solutions of nonlinear inverse problems. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki* [Numerical Analysis and Applications], 2007, vol. 10, no. 2, pp. 221–228. (in Russian)

Поступила в редакцию 28 апреля 2013 г.