КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА НАВЕДЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ВОЛЬТЕРРА ДЛЯ ТРЕХ ЛИЦ

В.Л. Пасиков

Рассматривается задача наведения динамического объекта в пространстве $\mathbb{R}^n$ на замкнутое множество M. В этой задаче участвуют три игрока, причем, два из них составляют коалицию, которая стремится привести движущуюся точку $x(t)$ на множество M в момент θ, а третий игрок стремится не допустить встречи $x(t)$ с множеством M.

Особенность работы заключается в описании эволюции объекта нелинейной интегро-дифференциальной системой, что наделяет управляемую систему новыми существенными свойствами: памятью и эффектом запаздывания по управляющим воздействиям, что усложняет исследование по сравнению со случаем, когда эволюция объекта описывается обыкновенными дифференциальными системами.

Для решения задачи предполагается существование некоторого стабильного моста в пространстве непрерывных функций, содержащего отрезки решений исходной системы при использовании игроками коалиции своих, определенных в работе, экстремальных стратегий, при любом допустимом управлении противоположной стороны. Предполагается, что стабильный мост обрывается на целевом множестве M в фиксированный момент времени θ.

Доказывается, что построенные в работе экстремальные стратегии коалиции удерживают выбранное решение (движение) системы на стабильном мосту, что и решает поставленную задачу наведения.

Ключевые слова: игровая задача; интегро-дифференциальная система; управляющее воздействие; позиция игры; стабильная система.

Рассматривается конфликтно-управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t+\tau), u, v) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t, x(s), w(s), s)ds \tag{1}$$

с начальным условием $x_{t_0}[\tau] = x[t_0 + \tau]$, $-\lambda \leq \tau \leq 0$, $t_0 \geq 0$, $\lambda = \text{const} \geq 0$.

Здесь x – n-мерный фазовый вектор; u, v, w – r_1, r_2, r_3 – мерные управляющие воздействия, стесненные условиями $u \in P$, $v \in Q$, $w \in S$; P, Q, S – компакты в соответствующих евклидовых пространствах $R^{r_1}, R^{r_2}, R^{r_3}$; оператор $f(t, x(\tau), u, v)$ и функция $K(t, x, w, s)$, $t_0 \leq s \leq t \leq \theta$, $\theta = \text{const} > 0$, непрерывны по совокупности своих аргументов и определены соответственно на произведениях $[t_0, \theta] \times C_{[-\lambda,0]} \times P \times Q$, $[t_0, \theta] \times D \times S \times [t_0, \theta]$, где D – ограниченная область в R^n содержащая все траектории системы (1), $C_{[-\lambda,0]}$ – пространство n-мерных непрерывных на $[-\lambda, 0]$ вектор-функция $x(\tau)$, с нормой

$$\|x(\bullet)\|_\lambda = \max_{-\lambda \leq \tau \leq 0} \|x(\tau)\|,$$

$\|\bullet\|$ – символ евклидовой нормы.

Реализация $u[t]$, $v[t]$, $w[t]$ управляющих воздействий u, v, w на промежутке $[t_0, \theta]$ – измеримые по Лебегу на $[t_0, \theta]$ функции.

Оператор $f(t, x(\tau), u, v)$ и функция $K(t, x, w, s)$ удовлетворяют в любых ограниченных областях $\Omega_1 \subset C_{[-\lambda,0]}$, $\Omega_2 \subset R^r$, соответственно, условию Липшица по второму аргументу

$$\exists L = L(\Omega_1) > 0,\, \forall t \in [t_0, 0],\, \forall x_i(\tau) \in \Omega_1,\, \forall u \in P,\, \forall v \in Q :$$
$$\|f(t, x_1(\tau), u, v) - f(t, x_2(\tau), u, v)\| \le L \|x_1(\bullet) - x_2(\bullet)\|_\lambda;\ \exists L = L(\Omega_2) > 0,\, \forall t \in [t_0, \theta] :$$
$$\int_{t_0}^{t} \|K(t, x_1(s), w(s), s) - K(t, x_2(s), w(s), s)\| ds \le L \int_{t_0}^{t} \|x_1(s) - x_2(s)\| ds,$$

каковы бы ни были измеримая по Лебегу функция $w(s)$, $t_0 \le s \le t$, со свойством $w \in S$ и абсолютно непрерывные функции на $[t_0, \theta]$ функции $x_i(s) : x_i \in \Omega_2$, $i = 1, 2$, $t_0 \le s \le t$.

Оператор $f(t, x(\tau), u, v)$удовлетворяет следующему условию роста$\|f(t, x(\tau), u, v)\| \le \zeta_1(t) + \zeta_2(t) \|x(\bullet)\|_\lambda$, где $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ – неотрицательные, непрерывные на $[t_0, \theta]$ функции.

Указанные выше ограничения на правую часть системы (1) гарантируют при реализовавшихся управлениях и заданном $x_{t_0}[\tau]$ существование на $[t_0, \theta]$ единственного абсолютно непрерывного решения системы (1) [1]. В дальнейшем будем для определенности считать, что $\theta - t_0 > \lambda$. Следует иметь в виду, что встречающиеся ниже понятия, не сопровождаемые ссылками и пояснениями определены в работах [2, 3].

Управляющим воздействием u распоряжается игрок p_1, управляющим воздействием v – игрок q_1, управляющим воздействием w распоряжается игрок p_2.

Пусть в пространстве R^n задано замкнутое множество M. Задачей коалиции $\{p_1, p_2\}$ является приведение траектории системы (1) в момент θ на множество M при любом допустимом управляющем воздействии игрока q_1.

Стратегию коалиции обозначим символом $U = \{U_1, U_2\}$, стратегию игрока q_1 обозначим символом V.

Пусть $P(\sigma)$, $Q(\sigma)$, $S(\sigma)$ – совокупности всех измеримых функций $u(\bullet)$, $v(\bullet)$, $w(\bullet)$, определенных на множестве σ со значениями из компактов P, Q, S соответственно.

Всякую пару $\{t, x_t[\tau]\}$ назовем позицией игры. Стратегией $U_1(V)$ игрока $p_1(q_1)$ назовем правило, которое реализовавшейся позиции $\{t_*, x_{t_*}[\tau]\}$, $t_0 \le t_* \le \theta$, ставит в соответствие множество $U_1(t_*, x_{t_*}[\tau]) \subset P$ $(V(t_*, x_{t_*}[\tau]) \subset Q)$. Стратегией игрока p_2 назовем правило, ставящее в соответствие позиции $\{t_*, x_{t_*}[\tau]\}$, $t_0 \le t_* < \theta$, и числу $t^* \in [t_*, \theta)$ функцию $w[t] \in S([t_*, t^*])$.

Пусть заданы начальная позиция $p_0 = \{t_0, x_{t_0}[\tau]\}$ и разбиение Δотрезка $[t_0, \theta]$ моментами $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n = \theta$, $\delta = \max\limits_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$.

Определим аппроксимационное движение системы (1), отвечающее стратегии $U = \{U_1, U_2\}$, как абсолютно непрерывную функцию

$$x[t]_\Delta = x[t, p_0, U]_\Delta,\ t_0 \le t \le \theta, \tag{2}$$

удовлетворяющую при почти всех $t \in [t_0, \theta]$ дифференциальному включению

$$\frac{dx[t]}{dt} \in F(t, x, u) + \int_{t_0}^{t} K(t, x(s)_\Delta, w(s), s) ds$$

с начальным условием $x_{t_0}[\tau]_\Delta = x[t_0 + \tau]_\Delta$.

Здесь $F(t, x, u) = co\{f(t, x(t + \tau), u, v), v \in Q\}$; на каждом полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Δ управление $u = \text{const}$ назначается момент τ_i стратегией U_1, а управление $w[t]$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, назначается стратегией U_2, причем $w(\bullet) \in S([\tau_i, \tau_{i+1}])$.

Равномерный предел движений (2) при $\delta \to 0$, как обычно, назовем движением системы (1), порожденным стратегией U. Множество движений системы (1) непусто [2, 4].

Аппроксимационное движение системы (1), отвечающее стратегии игрока p_2, определим как абсолютно-непрерывную функцию $x[t]_\Delta = x[t, p_0, V]_\Delta$, $t_0 \le t_* \le \theta$, удовлетворяющую при почти всех $t \in [t_0, \theta]$ дифференциальному включению

$$\frac{dx[t]}{dt} \in F(t,x,v) + \int_{t_0}^{t} K(t, x(s)_\Delta, w(s), s)ds,$$

где $F(t,x,v) = co\{f(t, x(t+\tau), u, v), u \in P\}$, управление $w[t]$ удовлетворяет условию $w(\bullet) \in S([\tau_i, \tau_{i+1}])$, а управление $v = \text{const}$ на каждом полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Δназначается в момент τ_i.

Назовем систему множеств $W_t = \{x[t+\tau]\}$, $W_t \subset C_{[-\lambda,0]}$, $t_0 \le t_* \le \theta$, (γ, u, v) - стабильной относительно M, если каковы бы ни были позиция $\{t_*, x_{t_*}[\tau]\}$, $t_0 \le t_* \le \theta$, $x_{t_*} \in W_{t_*}$, момент $t^* \in (t_*, \theta)$, число $\gamma > 0$, управляющее воздействие $v(\bullet) \in Q([t_*, t^*])$, существуют управляющие воздействия $u(\bullet) \in P([t_*, t^*])$, $w(\bullet) \in S([t_*, t^*])$ такие, что $x[t^*+\tau] \in W^\gamma_{t^*}$, где $W^\gamma_{t^*}$ γ – окрестность множества $W^\gamma_{t^*}$ в $C_{[-\lambda,0]}$.

Пусть

$$r_2(x_t[\tau], W_t) = \inf \|x_t(\bullet) - y_t(\bullet)\|_\lambda, y(\bullet) \in W_t, \tag{3}$$

и для данного $x_t[\tau]$ $\{x^{(k)}_t[\tau]\}$ – какая-либо минимизирующая для (3) последовательность. Составим множество предельных точек последовательности $x^{(k)}_t[0]$, являющейся 0-сечением последовательности $\{x^{(k)}_t[\tau]\}$.

Обозначим символом $Z(x(t))$ совокупность элементов этого множества ближайших к $x_t[0]$ в R^n.

Экстремальные стратегии U^e, V^e игроков p_1 и q_1 в момент τ_i на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ выбираем соответственно из условий

$$\max_{v\in Q}(x_{\tau_i}[0] - z, f(\tau_i x(\tau_i+\tau), u^e, v)) = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}(x_{\tau_i}[0] - z, f(\tau_i, x(\tau_i+\tau), u, v),$$
$$\min_{u\in P}(x_{\tau_i}[0] - z, f(\tau_i, x(\tau_i+\tau), u, v^e)) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}(x_{\tau_i}[0] - z, f(\tau_i, x(\tau_i+\tau), u, v),$$

где $z \in Z(x(t))$.

Здесь, считаем выполненным условие седловой точки в маленькой игре [4]

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}(x_{\tau_i}[0] - z, f(\tau_i, x(\tau_i+\tau), u, v) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}(x_{\tau_i}[0] - z, f(\tau_i, x(\tau_i+\tau), u, v).$$

Экстремальную стратегию U^e_2 игрока p_2 определяем следующим образом. В момент τ_1 по позиции $\{\tau_i, x_\tau[\tau]\}$, $x_{\tau_i}[\tau] \in W_{\tau_i}$ моменту τ_{i+1}, числу $\gamma > 0$, управляющему воздействию $v^e = v^e[\tau_{i+1}] \in Q([\tau_i, \tau_{i+1}])$ определяем из условия (γ, u, v) – стабильности функции: $u(\bullet) \in P([\tau_i, \tau_{i+1})), w(\bullet) \in S([\tau_i, \tau_{i+1}))$, где $\gamma \le (\tau_{i+1}, -\tau_i)^2$.

Определенную таким образом функцию $w(\bullet) \in S([\tau_i, \tau_{i+1}))$ назовем экстремальным управлением игрока p_2 на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ и обозначим символом $w^e[t]$, а соответствующую стратегию игрока p_1 обозначим U_2, таким образом $U^e = \{U^e_1, U^e_2\}$ – экстремальная стратегия коалиции $\{p_1, p_2\}$.

Теорема 1. *Пусть начальная позиция игры* $p_0 = \{t_0, x_{t_0}[\tau]\}$ *такова, что* $r_2(x_{t_0}[\tau], W_{t_0}) = 0$. *Если система множеств* W_t, $t_0 \le t_* \le \theta$, (γ, u, w) *– стабильна относительно множества* M, *то экстремальная к ней стратегия* $U^e = \{U^e_1, U^e_2\}$ *удовлетворяет условию*

$r_1(x[\theta], M) = 0, r_1(x[\theta], M) = \inf \|x[\theta] - y\|, y \in M$, $x[t]$ – *любое движение* $x[t, p_0, U^e]$, *при любой допустимой реализации управляющего воздействия игрока* q_1.

Доказательство. Получим оценку, подобную оценке из [3]. Для произвольно выбранной функции $x[t]_\Delta = x[t, p_0, U^e]_\Delta$ построим оценку величины $\varepsilon_\Delta[\tau_{i+1}]$ через величины $\varepsilon_\Delta[\tau_i]$и δ; здесь $\varepsilon_\Delta[\tau_i] = r_2(x[t]_\Delta, W_t)$.

Рассмотрим позицию $p(k,i) = \{t_i, x^{(k)}_{\tau_i}[\tau]_\Delta\}$.

В силу (γ, u, w) – стабильности системы множеств W_t, $t_0 \le t_* \le \theta$, относительно M среди движений со свойством $x^{(k)}[t]_\Delta = x[t, p(k,i), V^e]$ есть движение со свойством

$$x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[t]_\Delta \in W_{t_{i+1}}. \tag{4}$$

По определению величины $\varepsilon_\Delta[\tau]$ с учетом вложения (4) имеем оценку

$$\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}] \le (\left\| x_{\tau+1}[\bullet]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[\bullet]_\Delta \right\|_\lambda + \gamma)^2. \tag{5}$$

Здесь отрезки $x_{\tau+1}[\tau]_\Delta$, $x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[\tau]_\Delta$траекторий $x[\tau]_\Delta$, $x^{(k)}[\tau]_\Delta$ записываются в следующем виде (считаем, что $\tau_{i+1} - \tau_i \le \lambda$, $\alpha_i(t) = t - \tau_i$, $\alpha_i = \tau_{i+\bar{1}}\tau_i$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$)

$$x_t[\tau]_\Delta = \begin{cases} x_{\tau_i}[0]_\Delta + \int\limits_{\tau_i}^{t+\tau} f_1[\xi]d\xi + \int\limits_{\tau_i}^{t+\tau}\int\limits_{t_0}^{\xi} K(\xi, x(s)_\Delta, w^e(s), s)dsd\xi, -\alpha_i(t) \le \tau \le 0, \\ x_{\tau_i}[\tau + \alpha_i(t)]_\Delta, -\lambda \le \tau \le -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{6}$$

$$x^{(k)}_t[\tau]_\Delta = \begin{cases} x^{(k)}_{t_i}[0]_\Delta + \int\limits_{\tau_i}^{t+\tau} f[\xi]d\xi + \int\limits_{\tau_i}^{t+\tau}\int\limits_{t_0}^{\xi} K(\xi, x^{(k)}(s)_\Delta, w^e(s), s)dsd\xi, -\alpha_i(t) \le \tau \le 0, \\ x^{(k)}_{\tau_i}[\tau + \alpha_i(t)]_\Delta, -\lambda \le \tau \le -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{7}$$

где $f_1[t] \in F(t, x, u^e), t_0 \le t \le \theta$, $f_2[t] \in F(t, x, v^e), t_0 \le t \le \theta$. Подставляем (6), (7) в неравенство (5), тогда

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}] = \max\{ \max_{-\lambda \ge \tau \le -\alpha_i(t)} \left\| x_{\tau_i}[\tau]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_i}[\tau]_\Delta \right\|^2, \\ &\max_{-\alpha_i(t) \le \tau \le 0} [\| x_{\tau_i}[0]_\Delta - x^{(k)}_{\tau_i}[0]_\Delta + \int\limits_{\tau_i}^{t+\tau} f_1[\xi]d\xi - \int\limits_{\tau_i}^{t+\tau} f_2[\xi]d\xi + \\ &+ \int\limits_{\tau_i}^{t+\tau}\int\limits_{t_0}^{\xi} K(\xi, x(s)_\Delta, w^e(s), s)dsd\xi - \int\limits_{\tau_i}^{t+\tau}\int\limits_{t_0}^{\xi} K(\xi, x^{(k)}(s)_\Delta, w^e(s), s)dsd\xi \| + \gamma]^2\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8), аналогично работам [2, 3, 5] с использованием условия Липшица, следует оценка

$$\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}] \le \varepsilon^2_\Delta[\tau_i](1 + C \cdot \alpha_i + \alpha_i\varphi(\alpha_i),$$

где $C = \text{const} > 0$, а $\varphi(\alpha_i)$ – неотрицательная функция со свойством $\varphi(\alpha_i) \to 0$ при $\alpha_i \to 0$.

Отсюда, аналогично работам [2, 3, 5], следует доказательство теоремы. □

Литература

1. Зверкина, Т.С. К вопросу о численном интегрировании систем с запаздыванием / Т.С. Зверкина // Тр. Семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Ун-т Дружбы народов, 1967. – Т. 4. – С. 164–172.

2. Осипов, Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием / Ю.С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196, № 4. – С. 779–782.

3. Осипов, Ю.С. Дифференциальные игра наведения для систем с последействием / Ю.С. Осипов // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, № 1. – С. 123–131.

4. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

5. Осипов, Ю.С. О позиционном управлении при последействии в управляющих силах / Ю.С. Осипов, В.Г. Пименов // Прикладная математика и механика. – 1981. – Т. 45, № 2. – С. 223–229.

Владимир Леонидович Пасиков, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественно-математических дисциплин, Орский филиал ФГБОУ ВПО «Оренбургский государственный институт менеджмента» (г. Орск, Российская Федерация), pasikov_fmf@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 4, pp. 116–121.

MSC 91A02

Game Problem Guidance for Integro-Differential System of Volterra Type for Three Persons

V.L. Pasikov, Orsk Branch of Orenburg State Institute of Management, Orsk, Russian Federation, pasikov_fmf@mail.ru

The problem of guidance of a dynamic object in space $\mathbb{R}^n$ on a closed set M is considered. In this problem three players take part, and two of them make up the coalition that seeks to bring moving point $x(t)$ to the set of at the moment o, and a third player tries to avoid the meeting, $x(t)$ with the set M.

Feature of our work is to describe the evolution of the object of nonlinear integral differential system, which gives to the controlled system new essential properties: memory and the effect of delay on control inputs, which complicates the study, compared with the case where the evolution of the object is described by ordinary differential systems. To solve the problem we assume the existence of a stable bridge in the space of continuous functions, containing pieces of solutions of the initial system when using players' coalition of their extreme strategies defined in the work for any admissible management of the opposite side. It is assumed that a stable bridge dropped on the target set M in a fixed moment of time θ.

We prove that the constructed in the work of the extreme strategy coalition holds the solution (the movement) of the system at stable bridge, and solves the problem of guidance.

Keywords: coalition; memory on the management; extreme strategy; integro-differential system; stable bridge.

References

1. Zverkina, T.S. To the Question of the Numerical Integration of Systems with Delay [K voprosu o chislennom integrirovanii sistem s zapazdyvaniem]. *Trudy Seminara po teorii differencial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentum* [Proc. of the Seminar on the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow, Universitet Druzhby narodov, 1967, vol. 4, pp. 164–172.
2. Osipov, Yu.S. Differential Games of Systems with Aftereffect [Differencial'nye igry sistem s posledeystviem]. *DAN SSSR,* 1971, vol. 196, no. 4, pp. 779–782.
3. Osipov, Yu.S. Differential Game of Guidance for Systems with Aftereffect [Differencial'nye igry navedeniya dlya sistem s posledeystviem]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika,* 1971, vol. 35, no. 1, pp. 123–131.
4. Krasovskiy, N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka, 1974. 456 p.
5. Osipov, Yu.S., Pimenov V.G. About Positional Control when the Aftereffect of the Governing Forces [O pozicionnom upravlenii pri posledeystvii v upravlyayushchih silakh]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika,* 1981, vol. 45, no. 2, pp. 223–229.

Поступила в редакцию 4 марта 2013 г.