УДК 519.642.8

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДЕННЫХ ВОЗМУЩЕННЫМИ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.И. Кадченко

На основе методов регуляризованных следов и Бубнова–Галеркина разработан новый метод решения обратных задач по спектральным характеристикам возмущенных самосопряженных операторов. Найдены простые формулы для вычисления собственных значений дискретных операторов, без нахождения корней соответствующего векового уравнения. Вычисление собственных значений возмущенного самосопряженного оператора можно начинать с любого их номера независимо от того, известны ли собственные значения с предыдущими номерами или нет. Численные расчеты нахождения собственных значений для оператора Штурма–Лиувилля показывают, что предлагаемые формулы при больших номерах собственных значений дают результат точнее, чем метод Бубнова–Галеркина. Кроме того, по найденным формулам можно вычислять собственные значения возмущенного самосопряженного оператора с очень большим номером, когда применение метода Бубнова–Галеркина становится затруднительным. Этот факт можно, например, использовать в задачах гидродинамической теории устойчивости, если необходимо находить знаки действительной или мнимой частей собственных значений этих задач с большими номерами.

Получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода, позволяющее восстанавливать значения возмущающего оператора в узловых точках дискретизации.

Метод был проверен на обратных задачах для оператора Штурма–Лиувилля. Результаты многочисленных расчетов показали его вычислительную эффективность.

Ключевые слова: обратная спектральная задача; теория возмущений; дискретные и самосопряженные операторы; собственные числа; собственные функции; некорректно поставленные задачи.

Введение

Интерес к обратным задачам все время возрастает в связи с широкой областью их приложения, например, к задачам сейсморазведки, идентификация композитных материалов, проблемам неразрушающего контроля, нелинейных эволюционных уравнений математической физики и др. Используя методы регуляризованных следов (РС) и Бубнова–Галеркина, получены интегральные уравнения Фредгольма первого рода, позволяющие восстановить значения возмущающего оператора в узловых точках дискретизации. На основе метода Бубнова–Галеркина найдены простые формулы для вычисления собственных значений дискретных операторов, не находя корни соответствующего векового уравнения.

1. Метод регуляризованных следов

В работах [1–6] был разработан численный метод вычисления собственных значений полуограниченных снизу дискретных операторов, который был назван методом *регуляризованных следов* (РС). Используя теорию РС, построим численный метод для решения обратных спектральных задач, порожденных дискретными полуограниченными снизу операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений оператора $T+P$

$$\Big(T+P\Big)\varphi=\beta\varphi, \tag{1}$$

где T – дискретный полуограниченный снизу оператор, P – ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, которые занумерованы в порядке возрастания собственных значений μ_n по величине с учетом кратности. Обозначим через ν_n кратность собственного значения μ_n. Количество всех неравных друг другу собственных значений μ_n, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0}=\dfrac{|\mu_{n_0+1}+\mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, обозначим через n_0. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$–собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n\in N$ выполняются неравенства $q_n=\dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n}-\mu_n|}<1$, то первые $m_0=\sum\limits_{n=1}^{n_0}\nu_n$ собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ являются решениями системы m_0 нелинейных уравнений вида [7]

$$\sum_{n=1}^{m_0}\beta_n^p=\sum_{n=1}^{m_0}\mu_n^p+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(p)}(m_0),\ p=\overline{1,m_0}. \tag{2}$$

Здесь $\alpha_n^{(p)}(m_0)=\dfrac{(-1)^n p}{2\pi n i}Sp\int\limits_{T_{n_0}}\mu^{p-1}\Big[PR_\mu(T)\Big]^n d\mu$–$n$-е поправки теории возмущений оператора $T+P$ целого порядка p, $R_\mu(T)$ – резольвента оператора T.

Известно, что в этом случае контур T_{n_0} содержит одинаковое количество собственных значений операторов T и $T+P$ [7].

Система уравнений (2) лежит в основе метода РС, позволяющего находить собственные значения возмущенных самосопряженных операторов в случае, когда самосопряженные операторы имеют собственные значения с произвольной кратностью.

В статье [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P –ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для всех $n\in N$ выполняются неравенства $q_n<1$, и система собственных функций $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T является базисом в H, то собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:*

$$\beta_n=\mu_n+(P\omega_n,\omega_n)+\widetilde{\delta}_1(n),\ n=\overline{1,m_0}, \tag{3}$$

где $\widetilde{\delta}_1(n)=\delta_1(n)-\delta_1(n-1)$, $\delta_1(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}[\beta_k-\widetilde{\beta}_k(n)]$, $\{\widetilde{\beta}_k(n)\}_{k=1}^{n}$ – приближенные значения по Бубнову–Галеркину соответствующих собственных значений $\{\beta_k\}_{k=1}^{n}$ оператора $T+P$. Для $\widetilde{\delta}_1(n)$ справедливы оценки $|\widetilde{\delta}_1(n)|\le(2n-1)\rho_n\dfrac{q^2}{1-q}$.

В случае, если оператор $T+P$ задан в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$, а P–ограниченный оператор умножения на функцию $p(s)$, то, используя формулы (3) можно восстановить приближенные значения возмущающего оператора $p(s)$ в узловых точках отрезка $[a,b]$ при дискретизации задачи.

2. Метод Бубнова–Галеркина

Для нахождения собственных значений оператора $T + P$ воспользуемся методом Бубнова–Галеркина.

Теорема 2. *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P –ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если оператор $T + P$ положительно определенный в H, и система координатных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом H, то метод Бубнова–Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных чисел спектральной задачи (1), построенный на этой системе функций, сходится.*

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде

$$(T + P - \lambda E)\varphi = (\beta - \lambda)\varphi. \tag{4}$$

Для дискретного оператора $T + P$ существует резольвентный оператор $R_\lambda(T + P) = (T + P - \lambda E)^{-1}$, который вполне непрерывный в H [7]. Действуя слева на обе части уравнения (4) оператором $R_\lambda(T + P)$, получим

$$\varphi = (\beta - \lambda)R_\lambda(T + P)\varphi.$$

На основании [8] метод Бубнова–Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных чисел уравнения (4), а следовательно, и уравнения (1), сходится. □

Предположим, что выполнены требования теоремы 2, и система $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций является базисом пространства H.

Следуя методу Бубнова–Галеркина, будем искать решение спектральной задачи (1) в виде

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n)\omega_k. \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение (1), получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(n)(T + P)\omega_k = \widetilde{\beta}(n)\sum_{k=1}^{n} a_k(n)\omega_k.$$

Здесь $\widetilde{\beta}(n)$ – n-е приближения по Бубнову–Галеркину к соответствующим собственным числам $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $T + P$. Так как $T\omega_k = \mu_k\omega_k$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(n)(\mu_k + P)\omega_k = \widetilde{\beta}(n)\sum_{k=1}^{n} a_k(n)\omega_k.$$

Коэффициенты $\{a_k(n)\}_{k=1}^{n}$ определяются из требования, чтобы левая часть последнего уравнения была ортогональна к функциям $\{\omega_l\}_{l=1}^{n}$. В результате получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $\{a_k(n)\}_{k=1}^{n}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(n)\Big\{[\widetilde{\beta}(n) - \mu_k]\delta_{kl} - (P\omega_k, \omega_l)\Big\} = 0,\ l = \overline{1,n}.$$

Приравняв определитель этой системы к нулю, приходим к уравнению

$$\det\|\widetilde{\beta}(n)\mathbf{E} - \mathbf{A}\| = 0,$$

определяющему приближенные значения n первых собственных чисел $\{\widetilde{\beta}_k(n)\}_{k=1}^n$ оператора $T+P$. Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица размера $n \times n$, $\mathbf{A} = \|a_{kl}\|_{k,l=1}^n$ – матрица, где $a_{kl} = \mu_k \delta_{kl} + (P\omega_k, \omega_l)$, δ_{kl} – символ Кронекера.

Известно [9], что для собственных чисел $\{\widetilde{\beta}_k(n)\}_{k=1}^n$ матрицы $\mathbf{A}$ справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\beta}_k^p(n) = Sp\mathbf{A}^p, \quad p = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где $Sp\mathbf{A}^p$ – след p-й степени матрицы $\mathbf{A}$.

След p-й степени матрицы $\mathbf{A}$ вычисляется по формуле

$$Sp\mathbf{A}^p = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_p = 1}^{n} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r}. \tag{7}$$

Здесь $r = \begin{cases} s+1, & s \neq p, \\ 1, & s = p. \end{cases}$ Формулы (7) были найдены при численных расчетах величин $Sp\mathbf{A}^p$ и многократно проверялись при различных p. При $p=1$ из (7) получим известное равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\beta}_k(n) = Sp\mathbf{A}.$$

Используя (6) и (7), при $p=1$ найдем

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\beta}_k(n) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Вводя обозначения $\varepsilon_k(n) = \beta_k - \widetilde{\beta}_k(n)$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} [a_{kk} + \varepsilon_k(n)]. \tag{8}$$

Запишем уравнение (8) для $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k = \sum_{k=1}^{n-1} [a_{kk} + \varepsilon_k(n-1)]. \tag{9}$$

Вычитая (9) из (8), найдем

$$\beta_k = \mu_k + (P\omega_k, \omega_k) + \eta_k(n), \tag{10}$$

где

$$\eta_k(n) = \varepsilon_k(n) - \sum_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\beta}_k(n) - \widetilde{\beta}_k(n-1)].$$

Не трудно показать, что числа $\widetilde{\delta}_1(n)$ и $\eta_k(n)$ при $k=n$ совпадают. Это означает, что при выполнении условий $q_n = \dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$ для $\forall n \in N$ формулы (3) и (10) эквивалентны. В случае, когда $q_n \geq 1$, для нахождения собственных значений спектральной задачи (1) надо использовать формулы (10).

Если в (10) подставить $\varepsilon_k(n) = \beta_k - \widetilde{\beta}_k(n)$, то получим формулы, удобные для численных расчетов

$$\widetilde{\beta}_k(n) = \mu_k + (P\omega_k, \omega_k) - \sum_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\beta}_k(n) - \widetilde{\beta}_k(n-1)], \ k = \overline{1,n}. \tag{11}$$

В дальнейшем, алгоритм численного решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами, будет строиться на формулах (11).

Допустим, что оператор $T+P$ задан в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$, а P–ограниченный оператор умножения на функцию $p(s)$, тогда

$$\widetilde{\beta}_k(n) = \mu_k + \int_a^b p(s)\omega_k^2(s)ds - \sum_{k=1}^{n-1}[\widetilde{\beta}_k(n) - \widetilde{\beta}_k(n-1)],\ k = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Формулы (11) получены, используя диагональные элементы $a_k = \mu_k + (P\omega_k, \omega_k)$ ($k = \overline{1,n}$) матрицы $\mathbf{A} = \|a_{kl}\|_{k,l=1}^n$ размерности $n \times n$. В случае, если n не велико, ошибка нахождения собственных значений $\{\widetilde{\beta}_k\}_{k=1}^n$, найденных методом Бубнова–Галеркина, может быть большой, следовательно, использовать формулы (11) в этом случае надо с осторожностью.

При выполнении требований теоремы 1 метод Бубнова–Галеркина сходится, поэтому при увеличении значений n точность вычислений собственных значений $\{\widetilde{\beta}_k\}_{k=1}^n$ по формулам (11) возрастает. В этом случае, использование формул (11) для нахождения собственных значений оператора $T+P$ становится вычислительно эффективным в силу достаточно простых вычислений.

3. Решение обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами

Рассмотрим задачу восстановления потенциала P по собственным значениям $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ оператора $T+P$ в гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$, используя формулы (10), где $[a,b]$ отрезок изменения переменной s. Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, P– ограниченный оператор умножения на функцию $p(s)$. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ оператора T, образующие базис пространства $L_2[a,b]$.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ap \equiv \int_a^b K(x,s)p(s)ds = f(x),\ c \le x \le d, \tag{13}$$

где функции $f(x)$ и $K(x,s)$ такие, что

$$f(x_k) = \widetilde{\beta}_k - \mu_k + \sum_{k=1}^{n-1}[\widetilde{\beta}_k(n) - \widetilde{\beta}_k(n-1)],\quad K(x_k,s) = \omega_k^2(s),\ c \le x_k \le d,\ k = \overline{1,n}.$$

Пусть ядро интегрального уравнения (13) $K(x,s)$ непрерывно и замкнуто в квадрате $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, а функции $p(s) \in W_2^1[a,b]$ и $f(x) \in L_2[c,d]$.

Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (13) является некорректно поставленной. Ее приближенные решения могут быть найдены с помощью метода регуляризации Н.А. Тихонова. Численное решение уравнения (13) будет определять приближенные значения функции $p(s)$ в узловых точках s_i, $i = \overline{1,I}$, $a = s_1 < s_2 < ... < s_I = b$. Число узловых точек I можно выбрать достаточно большим, чтобы получить хорошую точность при интерполяции функции $p(s)$.

Отрезок $[c,d]$ выбирается так, чтобы точность нахождения собственных чисел $\widetilde{\beta}_n$ оператора $T+P$, принадлежащих этому отрезку и найденных по формулам (11), удовлетворяла требованиям исследователя.

4. Численный эксперимент

Проиллюстрируем разработанный метод на спектральной задаче Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -u'' + p(s)\ u = \beta\ u, \quad a < s < b; \\ cos\alpha\ u'(a) + sin\alpha\ u(a) = 0; \\ cos\gamma\ u'(b) + sin\gamma\ u(b) = 0, \quad \alpha, \gamma\ \in [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим оператор $T\omega \equiv -\omega''$. Причем функция ω удовлетворяет граничным условиям (14). Нетрудно показать, что оператор T самосопряженный, и его собственные числа $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$[\sin\alpha\sin(\sqrt{\mu}a) + \sqrt{\mu}\cos\alpha\cos(\sqrt{\mu}a)] \times [\sin\gamma\cos(\sqrt{\mu}b) - \sqrt{\mu}\cos\gamma\sin(\sqrt{\mu}b)] +$$

$$+[\sqrt{\mu}\cos\alpha\sin(\sqrt{\mu}a) - \sin\alpha\cos(\sqrt{\mu}a)] \times [\sin\gamma\sin(\sqrt{\mu}b) + \sqrt{\mu}\cos\gamma\cos(\sqrt{\mu}b)] = 0.$$

Собственные функции имеют вид:

$$\omega_k(s) = C_k\{[\sin\alpha\sin(\sqrt{\mu_k}a) + \sqrt{\mu_k}\cos\alpha\cos(\sqrt{\mu_k}a)]\cos(\sqrt{\mu_k}s) +$$

$$+[\sqrt{\mu_k}\cos\alpha\sin(\sqrt{\mu_k}a) - \sin\alpha\cos(\sqrt{\mu_k}a)]\sin(\sqrt{\mu_k}s)\}, \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Постоянные C_k находятся из условия нормировки.

Для проверки полученных результатов, сравним собственные значения $\widetilde{\beta}_k(n)$ спектральной задачи Штурма–Лиувилля (14), найденные по формулам (11), и методом Бубнова–Галеркина $\widehat{\beta}_k(n)$. В табл. 1 приведен пример численных расчетов собственных значений задачи (14) при $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = \pi/3$, $\gamma = \pi/5$, $p(s) = s^2 + 15s + (s^2 - 10s)i$. Расчеты проводились при условии, что $\widetilde{\beta}_k(n) - \widetilde{\beta}_k(n-1) = 0$ для $k = \overline{1,41}$ и $n = 41$.

Из табл. 1 видно, что при увеличении размерности матрицы $\mathbf{A}$ соответствующие величины $|\widetilde{\beta}_k(n) - \widehat{\beta}_k(n)|$ уменьшаются. Исключение составляет последняя строка ($k = 41$). Для сравнения точности вычисления собственных значений спектральной задачи (14) по формулам (11) и методом Бубнова–Галеркина приведем табл. 2, значения которой получены при $n = 81$.

Величины собственных $\widetilde{\beta}_k(41)$ и $\widetilde{\beta}_k(81)$ значений задачи (14) при $k = \overline{1,41}$ не меняются, а величины $\widehat{\beta}_k(41)$ и $\widehat{\beta}_k(81)$, как это видно из табл. 2, различны при $k = \overline{35,41}$. Это говорит о том, что формулы (11) точнее, чем метод Бубнова–Галеркина. Данный факт надо иметь ввиду при выборе отрезка $[c,d]$.

Проведенные многочисленные расчеты при различных значениях параметров a, b, c, d, α, β, $p(s)$ спектральной задачи (14) показали высокую точность и вычислительную эффективность полученных формул (11).

Результаты численных расчетов нахождения приближенных значений $\widetilde{p}(s)$ функции $p(s)$ в узловых точках $\{s_k\}_{k=1}^{41}$ при следующих значениях параметров $a = 1$, $d = 2$, $\alpha = Pi/3$, $\gamma = Pi/5$, $\widetilde{f}(x_k) = \beta_k - \mu_k - 2 - 3i$, $k = \overline{1,41}$ и возмущаемым оператором $p(s) = s^2 + s + (s^2 - s)i$ приведены в табл. 3.

Многочисленные вычисления показывают, что приближенные значения $\widetilde{p}(s)$ потенциала $p(s)$ в узловых точках $\{s_k\}_{k=1}^{n}$ находятся с заданной точностью невязок $||A\widetilde{p} - \widetilde{f}||$ в большом диапазоне изменения параметров и функциональных зависимостей потенциала $\widetilde{p}(s)$ спектральной задачи (14).

Величины $\zeta_k = |\widetilde{f}(x_k) - \int_a^b K(x_k,s)\widetilde{p}(s)ds|$ определяют поточечную абсолютную погрешность решения. Невязка, найденная в узловых точках s_k приближенного решения $\widetilde{p}(s_k)$, равна $||A\widetilde{p} - \widetilde{f}|| = 0,000332$. Параметр регуляризации α при численном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода (13) методом регуляризации Тихонова вычислялся с помощью метода невязки. В нашем случае $\alpha = 0,00167$.

Таблица 1

k	$\widetilde{\beta}_k(41)$	$\widehat{\beta}_k(41)$	$\lvert\widetilde{\beta}_k(41)-\widehat{\beta}_k(41)\rvert$
1	$35,544313-13,634443i$	$35,095744-13,222069i$	$0,609316$
2	$62,950802-12,885344i$	$63,153968-13,074541i$	$0,277618$
3	$111,931462-12,761626i$	$112,005121-12,828291i$	$0,099348$
4	$180,893757-12,719634i$	$180,933740-12,755878i$	$0,053965$
5	$269,663026-12,700433i$	$269,687656-12,722813i$	$0,033279$
6	$378,197795-12,690065i$	$378,214659-12,705422i$	$0,022809$
7	$506,484092-12,683835i$	$506,496324-12,694988i$	$0,016553$
8	$654,516136-12,679800i$	$654,525442-12,688294i$	$0,012599$
9	$822,291180-12,677037i$	$822,298490-12,683714i$	$0,009900$
10	$1009,807782-12,675064i$	$1009,813683-12,680457i$	$0,007995$
11	$1217,065125-12,673604i$	$1217,069987-12,678049i$	$0,006588$
12	$1444,062720-12,672495i$	$1444,066798-12,676224i$	$0,005526$
13	$1690,800258-12,671632i$	$1690,803726-12,674804i$	$0,004700$
14	$1957,277537-12,670947i$	$1957,280524-12,673680i$	$0,004048$
15	$2243,494419-12,670395i$	$2243,497018-12,672773i$	$0,003523$
16	$2549,450809-12,669943i$	$2549,453091-12,672032i$	$0,003094$
17	$2875,146638-12,669569i$	$2875,148658-12,671418i$	$0,002738$
18	$3220,581857-12,669255i$	$3220,583658-12,670903i$	$0,002441$
19	$3585,756429-12,668990i$	$3585,758045-12,670468i$	$0,002190$
20	$3970,670326-12,668763i$	$3970,671783-12,670097i$	$0,001976$
21	$4375,323525-12,668568i$	$4375,324846-12,669778i$	$0,001791$
22	$4799,716010-12,668399i$	$4799,717214-12,669501i$	$0,001632$
23	$5243,847769-12,668252i$	$5243,848870-12,669259i$	$0,001492$
24	$5707,718790-12,668122i$	$5707,719801-12,669048i$	$0,001370$
25	$6191,329066-12,668008i$	$6191,329997-12,668861i$	$0,001263$
26	$6694,678589-12,667907i$	$6694,679449-12,668695i$	$0,001167$
27	$7217,767353-12,667817i$	$7217,768151-12,668548i$	$0,001082$
28	$7760,595355-12,667736i$	$7760,596097-12,668415i$	$0,001006$
29	$8323,162589-12,667664i$	$8323,163281-12,668297i$	$0,000938$
30	$8905,469054-12,667598i$	$8905,469700-12,668190i$	$0,000876$
31	$9507,514746-12,667539i$	$9507,515352-12,668093i$	$0,000821$
32	$10129,299664-12,667485i$	$10129,300232-12,668005i$	$0,000770$
33	$10770,823804-12,667436i$	$10770,824338-12,667926i$	$0,000724$
34	$11432,087166-12,667392i$	$11432,087669-12,667853i$	$0,000682$
35	$12113,089748-12,667351i$	$12113,090224-12,667787i$	$0,000645$
36	$12813,831549-12,667314i$	$12813,831998-12,667725i$	$0,000610$
37	$13534,312567-12,667279i$	$13534,312997-12,667673i$	$0,000584$
38	$14274,532802-12,667247i$	$14274,533210-12,667621i$	$0,000553$
39	$15034,492254-12,667218i$	$15034,492699-12,667626i$	$0,000605$
40	$15814,190920-12,667191i$	$15814,191344-12,667577i$	$0,000574$
41	$16613,628801-12,667165i$	$16613,642998-12,680169i$	$0,019252$

Значения поточечной абсолютной погрешности ζ_k и невязки $||A\widetilde{p}-\widetilde{f}||$ позволяют сделать вывод о хорошей точности нахождения приближенных значений функции $p(s)$ в узловых точках $\{s_k\}_{k=1}^{41}$ дискретизации.

Заключение

На основе методов регуляризованных следов и Бубнова–Галеркина в работе разработан вычислительно эффективный численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами. В среде Maple написан пакет

Таблица 2

k	$\widetilde{\beta}_k(81)$	$\widehat{\beta}_k(81)$	$\lvert\widetilde{\beta}_k(81)-\widehat{\beta}_k(81)\rvert$	$\lvert\widetilde{\beta}_k(41)-\widehat{\beta}_k(41)\rvert$
1	$35,544313-13,634443i$	$35,095744-13,222069i$	$0,609316$	$0,609316$
2	$62,950802-12,885344i$	$63,153968-13,074541i$	$0,277618$	$0,277618$
3	$111,931462-12,761626i$	$112,005121-12,828291i$	$0,099347$	$0,099348$
4	$180,893757-12,719634i$	$180,933740-12,755878i$	$0,053965$	$0,053965$
5	$269,663026-12,700433i$	$269,687656-12,722813i$	$0,033279$	$0,033279$
...	...	...	...	...
35	$12113,089748-12,667351i$	$12113,090222-12,667786i$	$0,000643$	$0,000645$
36	$12813,831549-12,667314i$	$12813,831997-12,667724i$	$0,000608$	$0,000610$
37	$13534,312567-12,667279i$	$13534,312992-12,667668i$	$0,000576$	$0,000584$
38	$14274,532802-12,667247i$	$14274,533205-12,667616i$	$0,000546$	$0,000553$
39	$15034,492254-12,667218i$	$15034,492636-12,667568i$	$0,000518$	$0,000605$
40	$15814,190920-12,667191i$	$15814,191283-12,667523i$	$0,000492$	$0,000574$
41	$16613,628801-12,667165i$	$16613,629147-12,667482i$	0.000469	$0,019252$

программ, позволяющий восстанавливать потенциал $p(x)$ по спектральным характеристикам операторов T и $T+P$. Метод достаточно прост в применении.

Литература

1. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // ДАН России. – 2001. – Т. 380, № 2. – С. 160–163.
2. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра–Зомерфельда /В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // ДАН России. – 2001. – Т. 378, № 4. – С. 443–446.
3. Вычисление первых собственных значений задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 742–746.
4. Кадченко, С.И. Вычисление сумм рядов Релея-Шредингера возмущенных самосопряженных операторов / С.И. Кадченко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1494–1505.
5. Кадченко, С.И. Метод регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2009. – № 37 (170), вып. 4. – С. 4–23.
6. Кадченко, С.И. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 46–51.
7. Садовничий, В.А. Теория операторов: учеб. для вузов / В.А. Садовничий. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 368 с.
8. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 510 с.

Таблица 3

k	s_k	$\widetilde{p}(s_k)$	$\zeta(s_k)$
1	1,00	$-0,171367-3,264364i$	0,000263
2	1,02	$-0,160810-3,257749i$	0,000414
3	1,05	$-0,159809-3,259522i$	0,000416
4	1,08	$-0,127397-3,239065i$	0,000383
5	1,10	$-0,073524-3,209196i$	0,000340
6	1,12	$-0,000780-3,168803i$	0,000291
7	1,15	$0,088559-3,118688i$	0,000239
8	1,18	$0,192973-3,059556i$	0,000187
9	1,20	$0,310316-2,992326i$	0,000139
10	1,22	$0,439103-2,917834i$	0,000097
11	1,25	$0,577139-2,837348i$	0,000063
12	1,28	$0,722921-2,751879i$	0,000039
13	1,30	$0,874160-2,663079i$	0,000026
14	1,32	$1,029362-2,572065i$	0,000020
15	1,35	$1,186250-2,480701i$	0,000013
16	1,38	$1,343431-2,390057i$	0,000011
17	1,40	$1,498856-2,301886i$	0,000032
18	1,42	$1,651343-2,217039i$	0,000056
19	1,45	$1,799317-2,136803i$	0,000112
20	1,48	$1,941899-2,061682i$	0,000129
21	1,50	$2,078157-1,992246i$	0,000147
22	1,52	$2,207546-1,928612i$	0,000213
23	1,55	$2,329831-1,870574i$	0,000244
24	1,58	$2,444754-1,817935i$	0,000280
25	1,60	$2,552672-1,769869i$	0,000309
26	1,62	$2,653515-1,726022i$	0,000333
27	1,65	$2,748016-1,685267i$	0,000349
28	1,68	$2,836163-1,647283i$	0,000360
29	1,70	$2,918806-1,611015i$	0,000365
30	1,72	$2,995881-1,576331i$	0,000365
31	1,75	$3,068142-1,542541i$	0,000361
32	1,78	$3,135405-1,509778i$	0,000355
33	1,80	$3,198232-1,477837i$	0,000347
34	1,82	$3,256321-1,447088i$	0,000339
35	1,85	$3,310072-1,417720i$	0,000332
36	1,88	$3,359118-1,390223i$	0,000327
37	1,90	$3,403846-1,364925i$	0,000324
38	1,92	$3,443919-1,342275i$	0,000323
39	1,95	$3,479684-1,322542i$	0,000327
40	1,98	$3,511869-1,305460i$	0,000329
41	2,00	$3,529356-1,297436i$	0,000332

9. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. М.: Наука, 1966. – 659 с.
10. Васильева, А.Б. Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – М.: МГУ, 1989. – 156 с.
11. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 542 с.

Сергей Иванович Кадченко, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск, Российская Федерация), kadchenko@masu.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 4, pp. 15–25.

MSC 47A75

A Numerical Method for Solving Inverse Problems Generated by the Perturbed Self-Adjoint Operators

S.I. Kadchenko, Magnitogorsk State University, Magnitogorsk, Russian Federation, kadchenko@masu.ru

Based on the methods of regularized traces and Bubnov–Galerkin's method a new method for the solution of inverse problems is developed in spectral characteristics perturbed self-adjoint operators. Simple formulas for calculating the eigenvalues of discrete operators without the roots of the corresponding secular equation are found. Computation of eigenvalues of a perturbed self-adjoint operator can be started with any of their numbers, regardless of whether the previous numbers of eigenvalues are known or not. Numerical calculations for eigenvalues of the Sturm–Liouville's operator show that the proposed formulas for large numbers of eigenvalues give more accurate results than the Bubnov–Galerkin's method. In addition, the obtained formulas allow us to calculate the eigenvalues of perturbed self-adjoint operator with very large numbers, where the use of the Bubnov–Galerkin's method becomes difficult. It can be used in problems of hydrodynamic stability theory, if you want to find signs of the real or imaginary parts of the eigenvalues with large numbers.

An integral Fredholm equation of the first kind, restoring the value of the perturbing operator in the nodal points of the sample, is obtained.

The method is tested on inverse problems for the Sturm–Liouville's problem. The results of numerous calculations have shown its computational efficiency.

Keywords: the inverse spectral problem; perturbation theory; discrete and self-adjoint operators; eigenvalues; eigenfunctions; incorrectly formulated problems.

References

1. Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichiy V.A. A New Method for the Approximate Calculation of the First Eigenvalues of the Spectral Problem of Hydrodynamic Stability of Poiseuille Flow in a Circular Pipe [Novyy metod priblizhennogo vychisleniya pervyh sobstvennyh chisel spektral'noy zadachi gidrodinamicheskoy ustoychivosti techeniya Puazeylya v krugloy trube]. *DAN Russia*, 2001, vol. 380, no. 2, pp. 160–163.
2. Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichiy V.A. A New Method for the Approximate Calculation of the First Eigenvalues of the Orr–Zomerfeld Spectral Problem [Novyy metod pribizhennogo vychisleniya pervyh sobstvennyh chisel spektral'noy zadachi Orra–Zommerfel'da]. *DAN Russia*, 2001, vol. 378, no. 4, pp. 443–446.
3. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. Calculation of the First Eigenvalues of the Hydrodynamic Stability of Viscous Flow Between Two Rotating Cylinders [Vychislenie pervyh sobstvennyh znacheniy zadachi gidrodinamicheskoy ustoychivosti tacheniya vyazkoy zhidkosti mezhdu dvumya vrashchayushchimisya

tsilindrami]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2000, vol. 36, no. 6, pp. 742–746.

4. Kadchenko S.I. Computing the Sums of Rayleigh-Schrцdinger Series of Perturbed Self-Adjoint Operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 9, pp. 1435–1445.
5. Kadchenko S.I. The method of Regularized Traces [Metod regulyarizovannykh sledov]. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫,* 2009, no. 37 (170), issue 4, pp. 4–23.
6. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. A Numerical Method for Finding the Eigenvalues of the Discrete Semi-bounded From Below Operators [Chislennyy metod nakhozhdeniya sobstvennykh znacheniy diskretnykh poluogranichennykh snizu operatorov]. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫,* 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 46–51.
7. Sadovnichiy V.A. *Teoriya operatorov* [Operator Theory]. Moscow, 1999. 368 p.
8. Mihlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, 1970. 510 p.
9. Demidovich B.P. *Osnovy vychislitel'noy matematiki* [Foundations of Computational Mathematics]. Moscow, 1966. 659 p.
10. Vasil'eva A.B. *Integral'nye uravneniya* [Integral Equations]. Moscow, 1989. 156 p.
11. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral Equation Methods, Algorithms, Programs]. Kiev, 1986. 542 p.

Поступила в редакцию 11 мая 2013 г.