УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

С.Г. Пятков, А.Г. Боричевская

В настоящей работе рассмотрены вопросы корректности некоторых обратных задач для математических моделей, возникающих при описании процессов тепломассопереноса. По данным первой начально-краевой задачи и условию Неймана на боковой поверхности цилиндра (таким образом, на боковой поверхности цилиндра заданы данные Коши) восстанавливаются решение параболического уравнения второго порядка и коэффициент этого уравнения, принадлежащий ядру некоторого дифференциального уравнения первого порядка и характеризующий параметры среды. Неизвестный коэффициент может в том числе входить и в главную часть дифференциального оператора. Решение уравнения ищется в пространствах Соболева с достаточно большим показателем суммируемости, а неизвестный коэффициент в классе непрерывных функций. Показано, что локально по времени задача имеет единственное устойчивое решение.

Ключевые слова: обратная задача; тепломассоперенос; краевая задача; параболическое уравнение; корректность; диффузия.

Введение

В работе рассматривается параболическое уравнение

$$u_t - L_0u - qL_1u = f, \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

где G – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с границей Γ, $S = \Gamma \times (0,T)$ и L_i $(i = 0,1)$ – операторы второго порядка по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$. Уравнение (1) дополняется начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

краевыми условиями

$$u|_S = \varphi(x,t) \tag{3}$$

и данными переопределения

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(x,t), \tag{4}$$

где n – внешняя единичная нормаль к Γ. Условие (4) также может быть заменено на условие вида

$$l(u)|_S = \psi(x,t), \quad l(u) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + b_0(x,t)u, \tag{5}$$

где $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – гладкое векторное поле в Q такое, что для некоторой постоянной $\delta_0 > 0$ выполняется неравенство

$$|\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)n_i| \geq \delta_0 \quad \forall (x,t) \in S.$$

Ясно, что при подходящих условиях на вектор $\vec{b}$ и функцию b_0 задачи (1)–(4) и (1)–(3), (5) эквивалентны. Мы рассматриваем обратную задачу об определении вместе с решением u уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), (5) неизвестной функции $q(x,t)$, которая удовлетворяет дополнительному условию $l(q)=0$ в Q. Подобные постановки в том или ином виде имеются в литературе (см., например, [1]). Фактически это условие означает, что функция q не зависит от одной из переменных. Соответствующие математические модели возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях (см., например, [2, 3]). Задачи с условиями переопределения, заданными не на границе цилиндра, а на некоторых внутренних многообразиях (в частности, на плоскостях, пересекающих G), рассматривались в работах Белова Ю.Я., Аниконова Ю.Е. и ряда других авторов (см. [4–7] и имеющуюся там библиографию). Довольно подробно обратные задачи с данными Коши на боковой поверхности цилиндра были рассмотрены в случае $n=1$ (см. [8]. Ряд результатов по обратным задачам с данными Коши на боковой поверхности цилиндра изложен в монографиях [9, 10], где в основном рассматривается случай $n=1$, и неизвестные коэффициенты или правая часть зависят лишь от пространственных переменных. Мы также сошлемся на монографии [12, 13], где можно найти библиографию и ряд результатов, посвященных параболическим обратным задачам. Цель настоящей работы – получить теоремы существования и единственности решений (u,q) задачи (1)–(3), (5) в пространствах Соболева. Результаты были анонсированы в [14].

1. Определения и основные результаты

Мы используем пространства Лебега $L_p(G)$ и пространства $C^k(\overline{G})$, состоящие из функций, имеющих в области G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G)$ являются стандартными (см. [15, 16]). Символ $B_{p,p}^s(G)$ обозначает пространство Бесова. Для данного интервала $J=(0,T)$, положим $Q=G\times J$ и $W_p^{s,r}(Q)=L_p(J;W_p^s(G))\cap L_p(G;W_p^r(J))$, соответственно, $W_p^{s,r}(S)=L_p(J;W_p^s(\Gamma))\cap L_p(\Gamma;W_p^r(J))$. Аналогично определяем анизотропные пространства Гельдера и Бесова (см. [15, 16]). Считаем, что область Ω ограничена и $\partial\Omega\in C^2$. Мы говорим, что $\Gamma=\partial G\in C^\beta$ $(\beta\geq 1)$, если для каждой точки $x_0\in\Gamma$ существует касательная плоскость и окрестность U этой точки со следующими свойствами: в локальной системе координат y, полученной из исходной после вращения и переноса начала координат так, что ось y_n направлена по нормали к Γ в x_0, для некоторых постоянных $d,r>0$ имеем

$$\overline{U}\cap G=\{y\in\mathbb{R}^n: y'\in\overline{B_r},\omega(y')<y_n\leq\omega(y')+d\},\ y'=(y_1,\ldots,y_{n-1}),$$

$$\overline{U}\cap(\mathbb{R}^n\setminus\overline{G})=\{y\in\mathbb{R}^n:\omega(y')-d\leq y_n<\omega(y')\},$$

$$\Gamma\cap\overline{U}=\{y\in\mathbb{R}^n: y'\in\overline{B_r},\ y_n=\omega(y')\},\quad \omega\in C^\beta(\overline{B_r}),$$

где $B_r=\{y':\ |y'|<r\}$ и без ограничения общности считаем, что $Mr<d/4$, где M – постоянная Липшица функции ω в B_r. Если условие $\Gamma\in C^2$ выполнено, то норма в пространстве $W_p^s(\Gamma)$ (или в пространстве $B_{p,p}^s(\Gamma)$) $(s\leq 2)$ может быть определена следующим образом (см. [15]). Пусть $\{U_j\}_{j=1}^m$ открытое покрытие Γ областями вида U из вышеприведенного определения и $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ – соответствующее бесконечно дифференцируемое разбиение единицы. Для каждого j можем определить преобразование $z'=y'$, $z_n=y_n-\omega(y')$ выпрямляющее границу (y – локальная система координат). Тогда

$$\|u\|_{W_p^s(\Gamma)}=\Big(\sum_{j=1}^m\|\varphi_j u(x(y(z',0)))\|^p_{W_p^s(B_r)}\Big)^{1/p},\ z'=(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}).$$

Нормы, отвечающие различным наборам $\{U_j\}_{j=1}^m$ и покрытиям границы $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$, эквивалентны. Здесь символ W_p^s может быть заменен на символ $B_{p,p}^s$. Отметим, что преобразования координат $x \to y \to z$ в каждой из областей U_j, вообще говоря, различны. Обозначим $Q^\gamma = G \times (0,\gamma)$, $S^\gamma = \partial G \times (0,\gamma)$. Относительно данных предполагаем, что

$$u_0, l(u_0) \in B_{p,p}^{2-\frac{2}{p}}(G), \quad \varphi \in C^{2,1}(\overline{S}), \quad \psi \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(S), \tag{6),}$$

где здесь и далее считаем, что $p > n+2$. Это условие гарантирует, что любая функция $u \in W_p^{2,1}(Q)$ принадлежит на самом деле классу $C^{1+\beta,(1+\beta)/2}(\overline{Q})$ для некоторого $\beta > 0$ (см. лемму 3.3 гл. 2 в [16].

Запишем условия согласования в виде

$$u_0|_\Gamma = \varphi(x,0), \ l(u_0)|_\Gamma = \psi(x,0). \tag{7}$$

Считаем, что

$$b_i \in C^{2,1}(\overline{Q}) \ (i = 0,1,\ldots,n), \quad \sum_{i=1}^n b_i n_i|_S < 0, \quad b_0 \geq \delta_1 > 0 \tag{8}$$

для всех $(x,t) \in Q$ и некоторой постоянной $\delta_1 > 0$. Пусть

$$f(x,t) \in L_p(Q), \ l(f) \in L_p(Q), \ f\ |_S \in C(\overline{S}). \tag{9}$$

Выражение $l(f)$ здесь понимается в смысле теории обобщенных функций. Пусть L_0, L_1 имеют вид

$$L_i u = \sum_{ij=1}^n a_{i,j}^k u_{x_i x_j} + a_i^k u_{x_i} + a_0^k u \ \ (k = 0,1).$$

Относительно коэффициентов операторов L_0, L_1 предполагаем, что

$$a_{ij}^k \in W_\infty^1(Q), \quad a_i^k, \ a^k \in W_p^1(Q), \ a_i^k\ |_S, \ a_0^k\ |_S \in C(\overline{S}). \tag{10}$$

При выполнении условий (6)–(10) существует функция $\Phi \in W_p^{2,1}(Q) : l(\Phi) \in W_p^{2,1}(Q)$ и $\Phi|_{t=0} = u_0$, $\Phi|_S = \varphi$, $l(\Phi)|_S = \psi$. Существование такой функции Φ вытекает из стандартных теорем о продолжении (см., например, теорему 7.6 в [18]). Можно показать, используя представление (20) ниже и наши условия, что $L_0\Phi|_S, \ L_1\Phi|_S \in C(\overline{S})$. Функция Φ определяется не единственным образом. Мы дополнительно предположим, что можно построить функцию Φ с вышеуказанными свойствами, которая удовлетворяет условию

$$|L_1\Phi| \geq \delta_2 > 0 \tag{11}$$

для всех $(x,t) \in S$ и некоторой постоянной $\delta_2 > 0$. Для справедливости основной теоремы достаточно, чтобы неравенство (11) выполнялось лишь локально по времени, т.е. для всех $(x,t) \in S^\gamma$ для некоторого $\gamma > 0$. Мы предположили выполнение (11) на всей границе S лишь для удобства использования. Определим функцию $q_0 \in C(\overline{Q})$ как решение задачи (см. лемму 3 ниже)

$$l(q_0) = 0, \ -q_0|_S = (f - \varphi_t + L_0\Phi)/L_1\Phi|_S.$$

Мы будем предполагать, что оператор $L = L_0 + q_0 L_1$ эллиптичен, т.е. существует постоянная $\delta_3 > 0:$

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}^0 + q_0 a_{ij}^1)\xi_i\xi_j \geq \delta_3|\xi|^2, \ \forall (x,t) \in \overline{Q}, \ \forall \xi \in R^n. \tag{12}$$

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $p > n+2$, и выполнены условия* (6)–(12). *Тогда найдется такое $\gamma_0 > 0$, что на промежутке времени $[0,\gamma_0]$ существует единственное решение (u,q) задачи* (1)–(3), (5) *такое, что*

$$u \in W_p^{2,1}(Q^{\gamma_0}),\ l(u) \in W_p^{2,1}(Q^{\gamma_0}),\quad q \in C(\overline{Q^{\gamma_0}}),\ l(q) = 0.$$

2. Доказательство основных результатов

Вначале мы приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $b \in L_p(Q)$. Если $p > \max(q,(n+2)/2)$ $(q \in (1,\infty))$, то*

$$\|bu\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1-\frac{n+2}{2p}}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)},$$

If $p > \max(q, n+2)$, то

$$\|b\nabla u\|_{L_p(Q^\tau)} \leq c\tau^{1/2-\frac{(n+2)}{2p}}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}.$$

Постоянная $c > 0$ не зависит от $\tau \leq T$ и $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$.

Доказательство этой леммы содержится в доказательстве теоремы 9.1 гл. 4 в [16].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (8), (12) *и $p > n+2$. Тогда для $g \in L_p(Q^\gamma)$ $(\gamma \in (0,T])$ существует единственное решение $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$ задачи*

$$u_t - Lu = g, \tag{13}$$

$$u|_{t=0} = 0,\quad l(u)|_S = 0, \tag{14}$$

удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c\|g\|_{L_p(Q^\gamma)}, \tag{15}$$

где постоянная c не зависит от γ. Если функция $l(g)$ определена (в смысле теории обобщенных функций) и $l(g) \in L_p(Q^\gamma)$, то решение задачи (12), (13) *обладает свойством $l(u) \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$ и удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} + \|l(u)\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c(\|g\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|l(g)\|_{L_p(Q^\gamma)}). \tag{16}$$

Доказательство этой леммы может быть найдено в работе [17].

Лемма 3. *Пусть $\varphi_0 \in C(\overline{S})$, и выполнены условия* (8). *Тогда существует решение задачи $l(u) = 0$, $u|_S = \varphi_0$ из пространства $C(\overline{Q})$, удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq c\|\varphi_0\|_{C(\overline{Q})}.$$

К сожалению, мы не нашли прямой ссылки на этот результат. Однако, это утверждение может быть получено, например, с помощью метода ε-регуляризации, априорной оценки из леммы, вытекающей из принципа максимума, и некоторых дополнительных рассуждений.

Доказательство основного результата. Пусть u – решение задачи (1)–(3), (5) из указанного в теореме 1 класса. Сделаем замену переменных $u = v + \Phi$, $q = q_0 + q_1$, где функция Φ продолжение краевых условий внутрь области, удовлетворяющее условию (11) (см. построение функции q_0). Получим, что функция v есть решение задачи

$$v_t - L_0 v - (q_0 + q_1)(L_1 v + L_1 \Phi) = f - \Phi_t + L_0 \Phi,$$

или

$$v_t - Lv - q_1(L_1 v + L_1 \Phi) = f - \Phi_t + L_0 \Phi + q_0 L_1 \Phi = g, \tag{17}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad l(v)|_S = 0, \tag{18}$$

$$v|_S = 0, \tag{19}$$

где $L = L_0 + q_0 L_1$. Поскольку $\Gamma \in C^2$, существует конечное покрытие $\{U_j\}$ границы Γ областями U_j из определения гладкости границы. Фиксируем j и рассмотрим одну из областей $U = U_j$. Перейдем к локальной системе координат y и затем произведем выпрямление границы $z_n = y_n - \omega(y'),\ z_i = y_i$. Оператор l запишется в виде:

$$l(v) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b_i} u_{y_i} + \widetilde{b_0} u$$

и затем в виде

$$l(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(z) v_{z_i} + \alpha_0(z) v, \quad \alpha_n(z) = \tilde{b}_n(y(z)) - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{b}_i(y(z)) \omega_{z_i}.$$

При $z_n = 0$ имеем

$$|\alpha_n(z)|(1 + |\nabla_z \omega|^2)^{-1/2} = |\sum_{i=1}^{n} b_i n_i(x(y(z', 0)))| \geq \delta_0 > 0.$$

Можем записать

$$v_{z_n} = \frac{1}{\alpha_n(z)}(l(v) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(z) v_{z_i} - \alpha_0(z) v).$$

Находя выражение для операторов L_k $(k = 0, 1)$ в переменных z и заменяя производную v_{z_n}, получим представление

$$L_k v = \sum_{i,j=1}^{n-1} \beta_{ij}^k v_{z_i z_j} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in}^k \frac{\partial}{\partial z_i} l(v) + \beta_{nn}^k l(l(v)) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i^k v_{z_i} + \beta_n^k l(v) + \beta_0^k v, \tag{20}$$

где

$$\beta_{nn}^k(z', 0) = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k n_i n_j}{(\sum_{i=1}^n b_i n_i)^2}(x(y(z', 0))). \tag{21}$$

Из представления видно, что коэффициенты β_{nn}^k не зависят от систем координат y, z в данной точке на Γ. Полагая $(x, t) \in S$ и используя вышеприведенные представления операторов, из (17) получим

$$-\beta_{nn} l(l(v))|_S - q_1(\beta_{nn}^1 l(l(v)) + L_1 \Phi)\ |_S = g|_S,$$

где $\beta_{nn} = \beta_{nn}^0 + q_0 \beta_{nn}^1 > 0$. По построению $g|_S(x, 0) = 0$ и $g \in C(\overline{S})$ (в силу условий на данные). Таким образом,

$$q_1|_S = -\frac{g + \beta_{nn}(l(l(v)))}{(\beta_{nn}^1 l(l(v)) + L_1 \Phi)}\Big|_S = A(q_1|_S). \tag{22}$$

Мы имеем, что $l(v) \in W_p^{2,1}(Q)$. В силу теорем вложения (см. лемму 3.3 гл. 2 в [16]) $l(v) \in C^{\beta,\beta/2}(\overline{Q})$ для некоторого $\beta > 0$ и тем более непрерывна. На уравнение (22) можно смотреть как на операторное уравнение для определения функции $q_1|_S \in C(\overline{S})$. Оператор A сопоставляет $q_1|_S = \varphi$ решение задачи $l(q_1) = 0,\ q_1|_S = \varphi$ (см. лемму 3) и затем функцию $A(q_1)$, где $v = v(q_1)$ решение задачи

$$v_t - Lv - q_1(L_1 v + L_0\Phi) = g, \tag{23}$$

$$v|_{t=0} = 0,\ l(v)|_S = 0. \tag{24}$$

Перепишем (22) несколько в другом виде. Представим v в виде $v = v_1 + v_2$, где v_1 есть решения задачи (23), (24) с $q_1 = 0$. Тогда

$$v_{2t} - Lv_2 - q_1(L_1 v_1 + L_1 v_2 + L_1\Phi) = 0, \tag{25}$$

$$v_2|_{t=0} = 0,\ l(v_2)|_S = 0. \tag{26}$$

Положим $q_1|_S = q^1$. Уравнение (22) перепишется в виде

$$q^1 = -\frac{g + \beta_{nn}(l(l(v_1))) + \beta_{nn} l(l(v_2))}{\beta^1_{nn} l(l(v_2)) + \beta^1_{nn} l(l(v_1)) + L_1\Phi}\Big|_S = A(q^1), \tag{27}$$

где правая часть представима в виде

$$A(q^1) = g_0|_S + A_1(q^1), \quad g_0 = -\frac{g + \beta_{nn} l(l(v_1))}{L_1\Phi + \beta^1_{nn}(l(l(v_1)))}.$$

Равенство выполнено на S. Проверим выполнение условий теоремы о неподвижной точке. Фиксируем $\gamma \in (0, T]$. Найдется $r_0 > 0$ такое, что при $\|q_1\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \leq r_0$ оператор $L + q_1 L_1$ эллиптичен в Q^γ для каждого $\gamma \leq T$, и соответственно для задачи

$$v_{2t} - Lv_2 - q_1 L_1 v_2 = f_0,$$

$$v_2|_{t=0} = 0,\ l(v_2)|_S = 0$$

справедливо утверждение леммы 2 и соответствующие оценки из этой леммы. Без ограничения общности можем считать, что постоянные в этих оценках не зависят от q_1 такого, что $\|q_1\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \leq r_0$ и от $\gamma \in (0, T]$. Таким образом, имеем равномерные оценки

$$\|v_2\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c\|f_0\|_{L_p(Q^\gamma)} \tag{28}$$

$$\|l(v_2)\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c(\|f_0\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|l(f_0)\|_{L_p(Q^\gamma)}),$$

где c – постоянная, не зависящая от $\gamma \leq T$ и $q_1 :\ \|q_1\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \leq r_0$. Тогда задача (25), (26) имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке

$$\|v_2\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} + \|l(v_2)\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq\ c_1\|q_1\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \leq c_1 r_0. \tag{29}$$

При получении последней оценки используем условия на коэффициенты и лемму 1 (заменяя параметр τ величиной T). Пусть $r_1 = r_0/c$, где c – постоянная из оценки леммы 3. Поскольку $g_0|_S(x, 0) = 0$ и $l(l(v_1))(x, 0) = 0$ (отметим, что $l(v_1) \in C^{1+\beta,(1+\beta)/2}(\overline{Q^\gamma})$) для некоторого $\beta > 0$ по лемме 3.3 гл. 2 в [16]), существует постоянная $\gamma_0 > 0 :\ \forall\gamma \leq \gamma_0$

$$\|g_0|_S\|_{C(\overline{S^\gamma})} \leq r_1/2.$$

Возьмем $\gamma \le \gamma_0$. Покажем, что найдется $\gamma \le \gamma_0$ такое, что оператор A переводит шар $B^\gamma = \{q^1 : \ \|q^1\|_{C(\overline{S^\gamma})} \le r_1\}$ в себя и является в нем сжимающим. Имеем

$$A_1(q^1) = \Big(-\frac{g + \beta_{nn} l(l(v_1)) + \beta_{nn} l(l(v_2))}{\beta^1_{nn} l(l(v_1)) + \beta^1_{nn} l(l(v_2)) + L_1\Phi} - g_0\Big)\Big|_S =$$

$$= \Big(l(l(v_2))(\beta^1_{nn}(g + \beta_{nn} l(l(v_1)) - \beta_{nn}(L_1\Phi + \beta^1_{nn} l(l(v_1))) \cdot$$

$$(\beta^1_{nn} l(l(v_1)) + \beta^1_{nn} l(l(v_2)) + L_1\Phi)^{-1}(\beta^1_{nn} l(l(v_1)) + L_1\Phi)^{-1}\Big)\Big|_S.$$

Как вытекает из леммы 1 и оценки (29), найдется $\beta_0 > 0$ такое, что

$$\|\beta^1_{nn} l(l(v_2))\|_{C(\overline{S^\gamma})} \le \gamma^{\beta_0} c(r_0), \quad \|\beta^1_{nn} l(l(v_1))\|_{C(\overline{S^\gamma})} \le c\gamma^{\beta_0}.$$

Тогда существует постоянная $\gamma_1 \le \gamma_0 : \ \forall\ \gamma \le \gamma_1$

$$|L_1\Phi + \beta^1_{nn} l(l(v_1)) + \beta^1_{nn} l(l(v_2))| \ge \frac{\delta_2}{2}, \quad |L_1\Phi + \beta^2_{nn} l(l(v_2))| \ge \frac{\delta_2}{2}, \ \forall\ (x,t) \in \overline{S^\gamma}.$$

Тогда можем записать оценку $\|A_1(q_1)\|_{C(\overline{S^\gamma})} \le \gamma^\beta c_1(r_0)$ и, следовательно, для самого оператора A будем иметь

$$\|A(q^1)\|_{C(\overline{S^\gamma})} \le \gamma^\beta c_1(r_0) + \frac{r_1}{2}, \ \forall\ \gamma \le \gamma_1.$$

Выберем $\gamma_2 \le \gamma_1 : \ \forall\ \gamma \le \gamma_2\ \|A(q^1)\|_{C(\overline{S^\gamma})} \le r_1$ и таким образом, оператор A переводит шар B^γ в B^γ. То, что оператор A является сжимающим в этом шаре быть может при несколько меньшем параметре γ_2, проверяется совершено аналогично. Таким образом, применяя теорему о неподвижной точке, получим, что найдется $\gamma_2 \le \gamma_0 \le T$ и функция $q_1 \in C(\overline{Q^{\gamma_2}})$ такие, что на промежутке времени $[0, \gamma_2]$ выполнено уравнение (22). Найдем далее функцию v_2 как решение задачи (25), (26) и далее восстановим функцию $v = v_1 + v_2$. В силу леммы 2, функция v принадлежит указанному в условии теоремы классу. Покажем, что построенная функция v удовлетворяет условию (19). Функция v есть решение задачи (25), (26) где функция $q_1|_S$ есть решение (22), причем $\|q_1\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \le r_0$. Построим покрытие границы областями $\{U_j\}_{j=1}^m$ из определения гладкости границы и соответствующее разбиение единицы $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$. Построим также функции $\psi_j \in C_0^\infty(U_j)$ такие, что $\psi_j(x) = 1$ для всех x принадлежащих $\operatorname{supp}\varphi_j$. Функции φ_j мы используем в определении нормы в пространстве $W_p^{2,1}(S)$. В каждой из областей U_j мы перейдем к системе координат z, выпрямляя границу Γ. Используя представление (20) в уравнении (17) на Γ и равенство (22), придем к уравнению

$$v^j_t - \sum_{i,j=1}^{n-1} \beta_{ij} v^j_{z_i z_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i v^j_{z_i} - \beta_0 v^j = v^j_t - L^0 v^j = 0, \quad z' \in B_r,$$

где $v^j = v(z', 0, t)$, $t \le \gamma_2$, $\beta_{ij} = \beta^0_{ij} + q\beta^1_{ij}$, $\beta_i = \beta^0_i + q\beta^1_i$, $\beta_0 = \beta^0_0 + q\beta^1_0$. По построению, оператор L^0 эллиптичен в $Q^\gamma_0 = B_r \times (0,\gamma)$, $\gamma \le \gamma_2$. Отметим, что следы функций v_t, $v_{z_i z_j}$ при $z_n = 0$ принимаются в пространстве L_p и, более того, $v(z',0) \in W_p^{2,1}(B_r)$. Положим $S^\gamma_0 = \partial B_r \times (0,\gamma)$. Возьмем $\gamma \le \gamma_2$. Функции $u^j = \varphi_j v^j$ есть решения задач

$$u^j_t - L^0 u^j = -(L^0\varphi_j v^j - \varphi_j L^0 v^j), \quad u^j|_{S^\gamma_0} = 0, \ u^j(z',0) = 0.$$

Следовательно, как вытекает из общих результатов о разрешимости параболических задач (см. [16]), функция u^j удовлетворяет оценке

$$\|u^j\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma_0)} \le c\|(L^0\varphi_j v^j - \varphi_j L^0 v^j)\|_{L_p(Q^\gamma_0)},$$

причем можем считать, что постоянная c справа не зависит от γ. Используя лемму 1, оценим правую часть через $c_1\|\psi_j v^j\|_{W_p^{2,1}(Q_0^\gamma)}\gamma^{\theta_0}$ для некоторого $\theta_0 > 0$. Таким образом, получим оценку

$$\sum_{j=1}^{m}\|u^j\|_{W_p^{2,1}(Q_0^\gamma)} \le c_2\gamma^{\theta_0}\sum_{j=1}^{m}\|\psi_j v^j\|_{W_p^{2,1}(Q_0^\gamma)}.$$

Левая часть здесь есть эквивалентная норма функции $v|_S$ в пространстве $W_p^{2,1}(S^\gamma)$. Очевидно, что правая часть также оценивается через $c_3\gamma^{\theta_0}\|v|_S\|_{W_p^{2,1}(S^\gamma)}$ Таким образом, можем записать оценку

$$\|v|_S\|_{W_p^{2,1}(S^\gamma)} \le c_3\gamma^{\theta_0}\|v|_S\|_{W_p^{2,1}(S^\gamma)}.$$

Отсюда, выбрав достаточно малое $\gamma_3 \le \gamma_2$, получим, что $v|_{S^{\gamma_3}} = 0$. Повторяя рассуждения на промежутках $[\gamma_3, 2\gamma_3]$ и т.д. получим, что $v|_{S^{\gamma_2}} = 0$. Таким образом, мы доказали, что функции v есть решение задачи (17)–(19). Тогда функция $u = v + \Phi$ есть решение исходной задачи (1)–(3), (5). Единственность решений задачи вытекает из вышеприведенных рассуждений (равно как и оценка устойчивости).

Работа поддержана грантом РФФИ №12-01-00260а.

Литература

1. Кожанов, А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 414, № 4. – С. 722–744.
2. Трянин, А.П. Определение коэффициентов теплообмена на входе в пористое тело и внутри него из решения обратной задачи / А.П. Трянин // Инженерно-физич. журн. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 469–475.
3. Shidrar, A. An Inverse Heat Conduction Problem / A. Shidrar // South. Asien Bull. of Math. – 2002. – V. 26. – P. 503–507.
4. Belov, Ya.Ya. Inverse Problems for Parabolic Equations / Ya.Ya. Belov. – Utrecht: VSP, 2002. – 211 p.
5. Pyatkov, S.G. On Some Classes of Inverse Problems for Parabolic and Elliptic Equations / S.G. Pyatkov, B.N. Tsybikov // J. Evol. Equat. – 2011. – V. 11, № 1. – P. 155–186.
6. Pyatkov, S.G. On Some Classes of Inverse Problems for Parabolic Equations / S.G. Pyatkov // J. Inv. Ill-Posed problems. – 2011. – V. 18, № 8. – P. 917–934.
7. Pyatkov, S.G., Samkov, M.L. On Some Classes of Coefficient Inverse Problems for Parabolic Systems of Equations / S.G. Pyatkov, M.L. Samkov // Sib Adv. in Math. – 2012. – V. 22, № 4. – P. 287–302.
8. Ivanchov, M. Inverse Problems for Equation of Parabolic Type / M. Ivanchov. – Lviv: WNTL Publishers, 2003. –240 p.
9. Isakov, V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V. Isakov. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – 346 p.
10. Ramm, A.G. Inverse Problems. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering / A.G. Ramma. – Boston: Springer Science, Business Media, Inc., 2005. – 442 p.
11. Isakov, V. Inverse Source Problems / V. Isakov. – Providence, Rhode Island: AMS, 1990. – 193 p.
12. Prilepko, A.I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 1999. – 709 p.

13. Kabanikhin, S.I. Inverse and Ill-Posed Problems / S.I. Kabanikhin. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2012. – 459 p.
14. Боричевская, А.Г. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с данными Коши на боковой поверхности цилиндра / А.Г. Боричевская. – Тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». Стерлитамак, 2013. – Уфа: Изд-во БашГУ, 2013. – С. 52–57.
15. Triebel, H. Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators / H. Triebel. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978. – 528 p.
16. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
17. Pyatkov, S.G. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с данными Коши на боковой поверхности цилиндра / S.G. Pyatkov, A.G. Borichevskaya // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Ин-т математики им. Соболева, 2012. – С. 187–196.
18. Grisvard, P. Equations Differentialles Abstraites / P. Grisvard // Ann. Scient. Ec. Norm. Super. – 1969. 4^e-series. – V. 2. – P. 311–395.

Сергей Григорьевич Пятков, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Высшая математика», Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация), pyatkov@math.nsc.ru.

Альбина Генадьевна Боричевская, аспирант, кафедра «Высшая математика», Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация), a_borichevskaya@ugrasu.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 4, pp. 63–72.

MSC 35R130, 35K10, 35K57, 35Q35

Some Inverse Problems for Mathematical Models of Heat and Mass Transfer

S.G. Pyatkov, Yugra State University, Khanty-Mansiisk, Russian Federation, pyatkov@math.nsc.ru,
A.G. Borichevskaya, Yugra State University, Khanty-Mansiisk, Russian Federation, a_borichevskaya@ugrasu.ru

In the article we consider well-posedness questions of inverse problems for mathematical models of heat and mass transfer. We recover a solution of a parabolic equation of the second order and a coefficient in this equation characterizing parameters of a medium and belonging to the kernel of a differential operator of the first order with the use of data of the first boundary value problem and the additional Neumann condition on the lateral boundary of a cylinder (thereby we have the Cauchy data on the lateral boundary of a cylinder). An unknown coefficient can occur in the main part of the equation. A solution is sought in a Sobolev space with sufficiently large summability exponent and an unknown coefficient in the class of continuous functions. The problem is shown to have a unique stable solution locally in time.

Keywords: inverse problem; heat and mass transfer; boundary value problem; parabolic equation; well-posedness; diffusion.

References

1. Kozhanov A.I. Nonlinear Loaded Equations and Inverse Problems. *Zhurn. Vychisl. Matem. i Matem. Phiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2004, vol. 414, no. 4, pp. 722–744.
2. Tryanin A.P. Determination of Heat-Transfer Coefficients at the Inlet into a Porous Body and Inside it by Solving the Inverse Problem. *Inzhenerno-Fizichecheski Zhurnal*, 1987. vol. 52, no. 3, pp. 469–475.
3. Shidrar A. An Inverse Heat Conduction Problem. *South. Asien Bull. of Math.*, 2002, vol. 26, pp. 503–507.
4. Belov Ya.Ya. *Inverse Problems for Parabolic Equations.* Utrecht, VSP, 2002. 211 p.
5. Pyatkov S.G., Tsybikov B.N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations. *J. Evol. Equat.*, 2011, vol. 11, no. 1, pp. 155–186.
6. Pyatkov S.G. On Some Classes of Inverse Problems for Parabolic Equations. *J. Inv. Ill-Posed problems*, 2011, vol. 18, no. 8, pp. 917–934.
7. Pyatkov S.G., Samkov M.L. On Some Classes of Coefficient Inverse Problems for Parabolic Systems of Equations. *Sib Adv. in Math.*, 2012, vol. 22, no. 4, pp. 287–302.
8. Ivanchov M. *Inverse Problems for Equation of Parabolic Type.* Lviv, WNTL Publishers, 2003. 240 p.
9. Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Berlin, Springer-Verlag, 2006. 346 p.
10. Ramm A.G. *Inverse Problems. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering.* Boston, Springer Science, Business Media, Inc., 2005. 442 p.
11. Isakov V. *Inverse Source Problems.* Providence, Rhode Island, AMS, 1990. 193 p.
12. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin, I.A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics.* N.Y., Marcel Dekker, Inc., 1999. 709 p.
13. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems.* Berlin, Boston, De Gruyter, 2012. 459 p.
14. Borichevskaya, A.G. On an Inverse Problem for a Parabolic Equation with the Cauchy Data on the Lateral Boundary of a Cylinder [Ob odnoi obratnoi zadache dlya parabolicheskogo uravneniya s dannymi Koshi na bokovoi poverkhnosti tsilindra]. *Proceedings of the international conference ≪Differential Equations and Related Problems≫.* Sterlitamak, 2013. pp. 52–57.
15. Triebel H. *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators.* Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978. 528 p.
16. Ladyzhenskaya O.A., Sollonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabollicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Moscow, Nauka, 1967, 736 p.
17. Pyatkov S.G., Borichevskaya A.G. On an Inverse Problem for a Parabolic Equation with the Cauchy Data on the Lateral Boundary of a Cylinder [Ob odnoi obratnoi zadache dlya parabolicheskogo uravneniya s dannymi Koshi na bokovoi poverkhnosti tsilindra]. *Neklassicheskie Uravneniya Matematicheskoi Fiziki* [Nonclassical Equations of Mathematical Physics], Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 2012, pp. 187–196.
18. Grisvard, P. Equations Differentialles Abstraites. *Ann. Scient. Ec. Norm. Super.,* 1969, series 4, vol. 2, pp. 311–395.

Поступила в редакцию 2 августа 2013 г.