

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФFUЗОРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ПОСРЕДСТВОМ РЕДУЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.И. Сапронов

Знание динамических характеристик жидкости в гидроциклонах и диффузорах имеет большое значение для задачи оптимизации технических характеристик проточных частей турбинных насосов, участвующих в перекачке нефти по магистральным трубопроводам. Описание же динамических характеристик жидкости в этих устройствах можно получить на основе имеющихся аналитических выражений для решений модельных уравнений гидродинамики или их упрощенных вариантов, используемых в подобных задачах. Как показывает практика, получаемые из уравнения Навье – Стокса редуцированные (упрощенные) уравнения гидродинамического типа позволяют достаточно точно моделировать течения жидкости в областях произвольных геометрических форм. В данной статье использован подход, связанный с функциональной редукцией уравнения Гельмгольца, в случае плоского диффузорного течения, к краевой задаче для ОДУ Джеффри – Гамеля (посредством подстановки Гамеля). При конечных значениях числа Рейнольдса установлена возможность построения приближений к решениям редуцированного уравнения через нелинейную аппроксимацию Галеркина – Ритца — по одной из (вариационных) версий метода Ляпунова – Шмидта. Посредством такой аппроксимации можно сколь угодно точно определять поле скоростей частиц жидкости и, как следствие, извлекать информацию о таких свойствах течения, как его диффузорность или конфузорность на отдельных участках. В статье приведены примеры графических изображений приближенно вычисленных эпюр скоростей для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$.

Ключевые слова: уравнение Навье – Стокса; уравнение Гельмгольца, диффузорное течение; подстановка Гамеля; вариационный метод Ляпунова – Шмидта; эпюра скоростей.

1. Постановка задачи и комментарии к предмету исследования

Необходимость отыскания точных и приближенных (в том или ином смысле) аналитических выражений для решений модельных уравнений гидродинамики возникает при изучении и создании многих технических устройств. Например, описание динамических характеристик жидкости в гидроциклонах и диффузорах имеет большое значение для задачи оптимизации технических характеристик проточных частей турбинных насосов, участвующих в перекачке нефти по магистральным трубопроводам. Описание же динамических характеристик жидкости в этих устройствах можно получить на основе имеющихся аналитических выражений для решений модельных уравнений гидродинамики, используемых в подобных задачах, или их упрощенных вариантов.

Упрощенные варианты уравнения Навье – Стокса используются при изучении диффузорных течений, начиная с основополагающих работ Джеффри [1] и Гамеля [2] (1915 и 1917 гг.). Сведения по математическому моделированию на этой основе течений в плоском диффузоре можно найти в [3–6].

Цель статьи¹ заключена в демонстрации того, что задача о динамике жидкости в диффузорах (плоском, объемном и диффузоре-улитке) допускает применение нелокальной ре-

¹Работа выполнена при поддержке ОАО «Турбонасос».

дуцирующей схемы Ляпунова – Шмидта, посредством которой можно сколь угодно точно описывать поле скоростей частиц жидкости в областях произвольных геометрических форм. При таком подходе извлекается и дополнительная информация о «качественных свойствах» течений, полученная на основе аналитических и геометрических свойств так называемых ключевых отображений и ключевых функций [7].

Часто базой вычислительного процесса в случае плоского диффузора является функциональная редукция к краевой задаче для ОДУ (посредством подстановки Гамеля для вихревой функции) с последующим использованием свойства полной интегрируемости полученного ОДУ. Но, как известно, представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к точности приближений — вследствие недостаточной точности существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. В работах [3, 4] представлены результаты построения приближенных решений редуцированного уравнения на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений — в противовес методу использования точного аналитического решения в эллиптических функциях.

Наш подход основан в целом на двухступенчатой редукции: функциональной редукции к краевой задаче для ОДУ с квадратичной нелинейностью (первая ступень) и редукция к конечномерному алгебраическому уравнению (вторая ступень) — через нелинейную аппроксимацию Галеркина – Ритца по схеме Ляпунова – Шмидта.

Общая структура представленной в статье теоретической базы вычислительного алгоритма сохраняется при переходе к объемному диффузору и диффузору-улитке. В доработке нуждаются лишь отдельные блоки алгоритма, что вызвано наличием аналитических препятствий, связанных с усложнением редуцирующих переходов.

2. Двумерные уравнения Навье – Стокса и Гельмгольца

Обратимся к двумерному уравнению Навье – Стокса [5]

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \nu \Delta(v) - \text{grad}(p). \quad (1)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двумерный лапласиан, $\frac{\partial v}{\partial x}$ — матрица Якоби вектора скорости $v = v(x_1, x_2, t)$ по компонентам точки $x = (x_1, x_2)$, $p = p(x_1, x_2, t)$ — давление. Искомое поле векторов скорости v считается заданным на некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и «стандартными» краевыми условиями.

В полярных координатах стационарное уравнение Навье-Стокса принимает следующий вид (см. [5]):

$$\left. \begin{aligned} (U \cdot \tilde{\nabla})u - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\tilde{\Delta}u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} \right), \\ (U \cdot \tilde{\nabla})v + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \left(\tilde{\Delta}v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$(U \cdot \tilde{\nabla}) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

К уравнениям Навье – Стокса добавляется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0.$$

В преобразованиях, упрощающих уравнение (1), используются следующие соотношения (устанавливаемые непосредственной проверкой):

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \operatorname{grad} (\Delta \psi); \quad \operatorname{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial x} v \right) = [\psi, \Delta(\psi)].$$

Здесь $\operatorname{rot} (v) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$, $\psi(x_1, x_2, t)$ — так называемая вихревая функция, $[\psi, \varphi]$ — якобиан функций ψ, φ .

Условие неразрывности $\operatorname{div}(v) = 0$ для двумерной жидкости в односвязной области приводит к тому, что решение обязано принимать следующий вид:

$$v := \operatorname{sgrad}(\psi) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^\top.$$

Для функции ψ естественно потребовать выполнение граничного условия

$$(n, \operatorname{sgrad}(\psi)) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (3)$$

n — поле нормалей к границе области.

Пусть $u := \operatorname{rot}(v) = \Delta(\psi)$, и $\dot{u} = \operatorname{rot}(\dot{v}) = \Delta(\dot{\psi})$. Применив двумерный ротор к левой и правой частям уравнения (1), получим уравнение Гельмгольца ([5], стр. 406)

$$\Delta(\dot{\psi}) = [\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi). \quad (4)$$

3. Подстановка Гамеля и редукция к ОДУ

Анализ стационарного варианта

$$[\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi) = 0 \quad (5)$$

уравнения Гельмгольца (4) можно осуществить, используя редуцирующий переход к краевой задаче для ОДУ ([5], с. 450 – 484). Наиболее известной редукцией является подстановка Гамеля, осуществляемая посредством сужения стационарного уравнения Гельмгольца на класс функций вида (см. [5], с. 478) $\psi = Q q(\theta)$. Ниже $Q := \int_0^\beta r u d\theta$ — поток жидкости через диффузорную дугу окружности $\{0 \leq \theta \leq \beta, r = \text{const}\}$, β — величина раствора диффузорного угла.

Используя соотношения

$$\Delta(\varphi) = Q \frac{q''}{r^2}, \quad [\Delta(\varphi), \varphi] = -Q^2 \frac{2q''q'}{r^4}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{q''}{r^2} \right) = \frac{6q''}{r^4},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q''}{r^2} \right) = -\frac{2q''}{r^4}, \quad \frac{1}{r^2} \left(\frac{q''}{r^2} \right)'' = \frac{q''''}{r^4}$$

получим (после подстановки Гамеля) вместо (5) следующее ОДУ:

$$q'''' + 4q'' + 2\mathcal{R} q''q' = 0, \quad (6)$$

где $\mathcal{R} = \frac{Q}{\nu}$ — число Рейнольдса.

В случае плоского диффузора уравнение (6) дополняется краевыми условиями (см. (3))

$$q(0) = 0, \quad q(\beta) = 1, \quad q'(0) = q'(\beta) = 0.$$

Условие $q(\beta) = 1$ вытекает из того, что $\int_0^\beta q' d\theta = \frac{1}{Q} \int_0^\beta r u d\theta = 1$ — (нормированный) поток через сечение диффузора окружностью $r = \text{const}$ (см. [3, 4]).

После масштабирующего преобразования угловой переменной $\theta \rightarrow \beta\theta$ получим краевую задачу

$$q'''' + \lambda q'' + 2\tilde{\mathcal{R}} q'' q' = 0, \quad (7)$$

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 1, \quad q'(0) = q'(1) = 0, \quad (8)$$

где $\lambda = 4\beta^{-2}$, $\tilde{\mathcal{R}} = \beta^{-1}\mathcal{R}$.

Замечание 1. Нетрудно установить, что краевая задача (7) – (8) является вариационной: левая часть уравнения (7) является градиентом функционала

$$V = \int_0^1 L(q'', q') d\theta, \quad L(q'', q') = \frac{(q'')^2}{2} - \lambda \frac{(q')^2}{2} + \tilde{\mathcal{R}} \frac{(q')^3}{3}. \quad (9)$$

Таким образом, решения уравнения (7) являются экстремальными функционала (9) (при условии (8)). Следовательно, построение решений уравнения (7) можно осуществлять на основе локальной и нелокальной версий вариационного метода Ляпунова – Шмидта.

Замечание 2. В работах [3, 4] представлены результаты построения приближенных решений уравнения (7) на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений уравнения (7) — в противовес методу использования точного аналитического решения в эллиптических функциях. Такая возможность имеется вследствие интегрируемости уравнения (7). Представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к приближениям вследствие недостаточной точности ($10^{-4} - 10^{-6}$) существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. Требуемая точность в современных прикладных задачах — $10^{-8} - 10^{-10}$ и выше.

После первичного интегрирования уравнения (7) и замены $q' = u$ получим краевую задачу

$$u'' + \lambda u + \tilde{\mathcal{R}} u^2 = c, \quad c = \text{const} \quad (10)$$

(уравнение Джеффри – Гамеля),

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (11)$$

при дополнительном интегральном ограничении

$$\int_0^1 u d\theta = 1. \quad (12)$$

Левая часть уравнения (10) является градиентом функционала действия

$$V := \int_0^1 \frac{1}{2} \left((u')^2 - \lambda u^2 \right) + \frac{1}{3} u^3 d\theta \quad (13)$$

при краевых условиях (11). Функционал (13) удобно рассматривать (см. [7]) на гильбертовом пространстве $H^1[0, 1]$, состоящем из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию (11) и имеющих производную класса $L_2[0, 1]$. Скалярное произведение в $H^1[0, 1]$

задается соотношением $\langle u, v \rangle_1 = \int_0^1 u' v' d\theta$.

Интегрирование (вторичное) уравнения (10) приводит к следующему интегральному соотношению (с двумя константами c, d):

$$\frac{1}{2}((u')^2 + \lambda u^2) + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}u^3 - cu = d, \quad (14)$$

или $\frac{1}{2}(u')^2 + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}(u + \alpha)^3 - \tilde{c}u = \tilde{d}$, где $\alpha = \frac{\lambda}{2\tilde{\mathcal{R}}}$, $\tilde{c} = c + \frac{\lambda^2}{4\tilde{\mathcal{R}}}$, $\tilde{d} = d - \frac{\lambda^3}{24\tilde{\mathcal{R}}^2}$.

Изменение значений параметров приводит к изменению графика (рис. 1) и интегральных кривых (рис. 2), вплоть до слияния (на фазовом портрете рис. 2) локального минимума с седлом и их исчезновения (после перехода вектора параметров $\lambda, \tilde{\mathcal{R}}, c$ через каустику функции $\frac{1}{2}(v^2 + \lambda u^2) + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}u^3 - cu$).

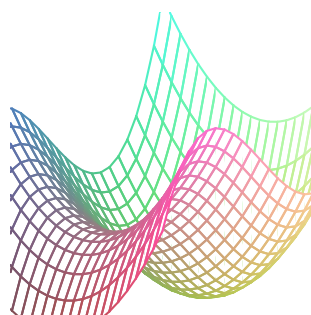


Рис. 1. График функции, равной левой части интегрального соотношения (14)

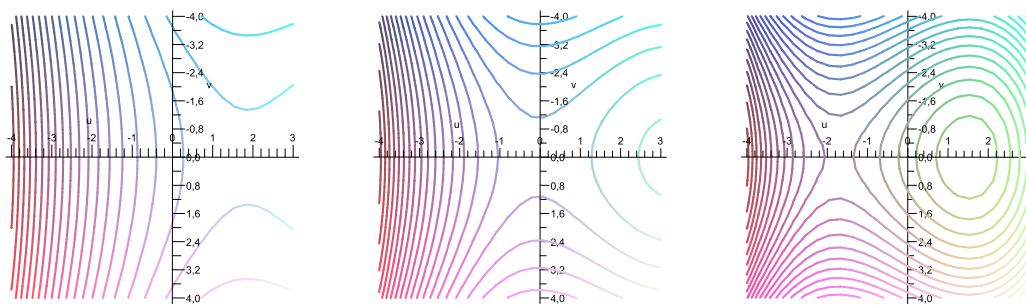


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (10) при различных значениях параметров (14)

«Управляя» параметрами $\lambda, \tilde{\mathcal{R}}, c, d$, можно получить изображения всевозможных геометрических форм интегральных кривых и их расположений относительно системы координат u, v ($v := u'$) на фазовой плоскости. Рассматривая пересечения интегральными кривыми прямой $u = 0$, можно получить представление о тех фрагментах интегральных кривых, которые дают решение краевой задачи (10) – (11). Приближенные аналитические формулы для этих фрагментов можно получить, применив специальные вычислительные методы (например, методы, использованные в [3, 4, 7, 15]).

По-видимому, аналогичный подход можно применять при изучении других гидродинамических моделей, например, рассмотренных в [8–10].

4. Случай нулевого значения числа Рейнольдса

Рассмотрим задачу (10) – (11) при $\tilde{\mathcal{R}} = 0$:

$$u'' + \lambda u = c, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad \int_0^1 u d\theta = 1. \quad (15)$$

Решения задачи (15) являются критическими точками квадратичного функционала

$$\int_0^1 \frac{1}{2} ((u')^2 - \lambda u^2) d\theta \quad (16)$$

на гиперплоскости

$$\mathcal{M} = \{u \in H^1[0, 1] : \int_0^1 u d\theta = 1\} \quad (17)$$

в тройке $E = F = H = H^1[0, 1]$ (см. [7]).

Теорема 1. Совокупность экстремалей сужения функционала (16) на гиперплоскость (17) есть объединение следующих серий векторов (при соответствующих значениях параметра λ):

$$s_{0,k} = \frac{\pi k}{2} \sin(\pi k \theta), \quad \lambda = \lambda_{0,k} := (\pi k)^2; \quad (\mathcal{S}_0)$$

$$s_{\varepsilon,k} = a(\varepsilon) \sigma_{\varepsilon}(\theta), \quad \sigma_{\varepsilon}(\theta) := \sin(\varepsilon + (\pi k - 2\varepsilon)\theta) - \sin(\varepsilon), \quad (\mathcal{S}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,k} := (\pi k - 2\varepsilon)^2; \quad k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$a(\varepsilon)$ — величина, обратная к среднему значению функции $\sigma_{\varepsilon}(\theta)$;

$$s_{\varepsilon,2m} = \frac{1}{\sin(\varepsilon)} (\sin(2\pi m \theta - \varepsilon) + \sin(\varepsilon)) =$$

$$= \frac{1}{\sin(\varepsilon)} (\cos(\varepsilon) \sin(2\pi m \theta) + \sin(\varepsilon)(1 - \cos(2\pi m \theta))), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (\mathcal{SC}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,2m} := (2\pi m)^2, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$f_{0,j} = 1 - \cos(2j \pi \theta), \quad \lambda = \mu_{0,j} := (2j \pi)^2; \quad (\mathcal{C}_0)$$

$$f_{\varepsilon,j} = b(\varepsilon) \rho_{\varepsilon}(\theta), \quad \rho_{\varepsilon}(\theta) = \cos(\varepsilon + 2(j\pi - \varepsilon)\theta) - \cos(\varepsilon), \quad (\mathcal{C}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \mu_{\varepsilon,j} := 4(j \pi - \varepsilon)^2, \quad j = 1, 2, \dots;$$

$b(\varepsilon)$ — величина, обратная к среднему значению функции $\rho_{\varepsilon}(\theta)$.

Доказательство проводится на основе общей формулы решений линейного неоднородного уравнения (15) с последующим подбором констант, соответствующих второму и третьему соотношениям в (15).

5. Случай конечного значения числа Рейнольдса

При малых значениях числа Рейнольдса экстремали функционала (13), суженного на гиперплоскость (17), можно вычислять как ветви экстремалей, зависящих от числа Рейнольдса, — посредством теории возмущений, основанной на непосредственном применении теоремы о неявной функции. При «конечных» значениях числа Рейнольдса возникает необходимость применения более мощных средств нелинейного анализа [11], например, применения нелинейного метода Галеркина – Ритца по схеме Ляпунова – Шмидта.

Возможность нелокальной конечномерной редукции в краевой задаче (10) – (11) поясним сначала на простейшем примере: правая часть уравнения $x = \varepsilon(x - x^2 + x = 1)$ является сжимающим отображением $[-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ при достаточно малых значениях параметра ε . Зарождение свойства сжатия для отображения $x \rightarrow \varepsilon(x - x^2 + 1)$ отражено в следующих графиках.

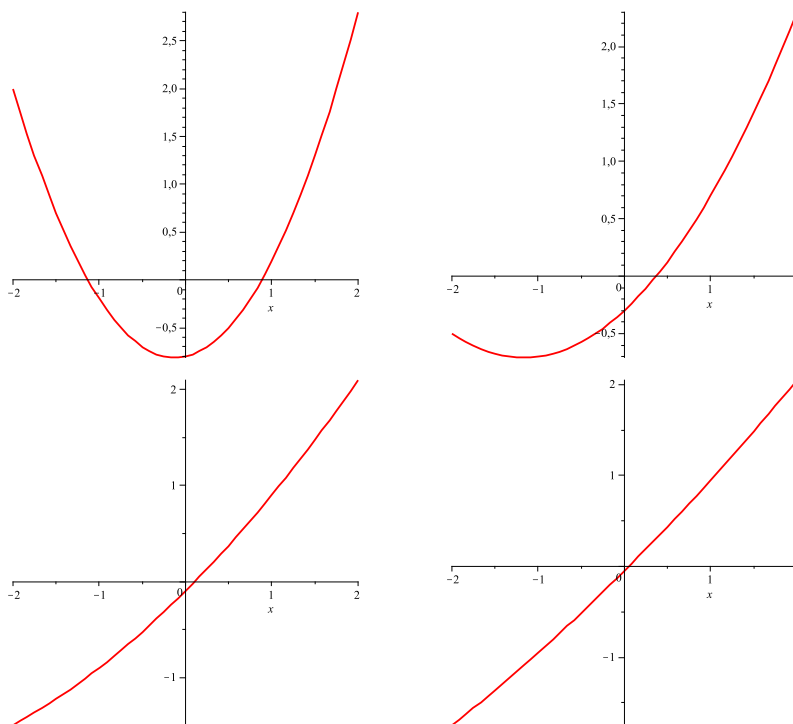


Рис. 3. Графики функции $f(x) = x - \varepsilon(x - x^2 + 1)$ при $\varepsilon = 0,8, 0,3, 0,1, 0,05$

Аналогичный эффект сжимаемости имеет место и в случае общего операторного уравнения

$$x = \mathcal{B}(g(x, x) + \mathcal{C}x + c), \quad x \in F \tag{18}$$

в банаховом пространстве F , если норма $\|\mathcal{B}\|_F$ достаточно мала. Здесь $g(x, x)$ – непрерывный квадратичный оператор $F \rightarrow F$, \mathcal{B}, \mathcal{C} – линейные непрерывные операторы $F \rightarrow F$, $c \in F$.

Свойство сжимаемости оператора $K(x) := \mathcal{B}(g(x, x) + \mathcal{C}x + c)$ позволяет разыскивать приближенные решения уравнения (18) посредством стандартных итераций $x_n = K(x_{n-1})$ [11].

Для осуществления нелокальной редукции Ляпунова-Шмидта в краевой задаче (10) – (11) запишем ее в виде операторного уравнения

$$f(w) := \mathcal{A}w - \lambda w + g(w, w) + c = 0, \quad w \in E, \tag{19}$$

где $E = C^2[0, 1] \cap \{w(0) = w(1) = 0\}$, $\mathcal{A} = -d^2/d\theta^2$, $g(w, w) := \tilde{\mathcal{R}}w^2$, $c = \text{const}$. Оператор f действует из E в $F = C[0, 1]$. Линейный оператор \mathcal{A} является положительным и диагонализуемым:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^2 \xi_k e_k, \tag{20}$$

$e_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin(\pi k \theta)$ — собственная функция оператора \mathcal{A} , отвечающая собственному значению $(\pi k)^2$. Заметим, что собственные функции e_k образуют ортонормированную систему в $H^1[0, 1]$.

Перепишем уравнение (19) в виде

$$w - \mathcal{A}^{-1}(g(w, w) + \lambda w - c), \quad w \in H^1[0, 1]. \quad (21)$$

Используя процедуру ортогонального разложения пространства в сумму подпространств, разобьем уравнение (21) в систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} u - \mathcal{A}_1^{-1}(g_1(w, w)) + \lambda u - a &= 0, \\ v - \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(w, w)) + \lambda v - b &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}|_N$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}|_{N^\perp \cap E}$, $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, $w = u + v$, $u = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $v = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k$, $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, $b = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k e_k$, $\alpha_k = \langle c, e_k \rangle_1$. Второе уравнение системы (22) рассмотрим в пространстве функций $N^\perp \cap H^1[0, 1]$. Из спектральных свойств оператора \mathcal{A} (см. (20)) вытекает, что при достаточно больших размерностях редукции n норма оператора $\mathcal{A}_2^{-1} : N^\perp \cap H^1 \rightarrow N^\perp \cap H^1$ становится малой, и поэтому оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(u + v, u + v) + \lambda v - b)$ переводит некоторый шар $\|v\|_{H^1} \leq L$ (в $N^\perp \cap H^1$) в себя, являясь при этом сжимающим. То есть мы оказываемся в условиях второго замечания. Это означает, что решения второго уравнения системы (22) можно получать в аналитической форме

$$v = \Phi(u), \quad (23)$$

с любой наперед заданной точностью, посредством итераций $v_n = K(v_{n-1})$. Подставив выражение (23) в первое уравнение системы (22), получим так называемое ключевое уравнение

$$\tau(u) := f_1(u + \Phi(u)) = 0 \quad (24)$$

на конечномерном пространстве N . Все аналитические и топологические свойства исходного уравнения и его решений наследуются ключевым уравнением и его решениями [7]. Связь между решениями исходного и ключевого уравнений осуществляется формулой

$$w = u + \Phi(u).$$

Уравнение (24) является потенциальным с потенциалом (ключевой функцией)

$$W(u) := V(u + \Phi(u)), \quad u \in N.$$

Поиск и анализ экстремалей функционала V можно осуществлять посредством изучения экстремалей ключевой функции W . Вычисление функции W и анализ ее критических точек можно осуществлять по технологиям, изложенным в [7, 11–15].

Заключительный этап предложенной здесь вычислительной схемы состоит в отборе тех решений задачи (10) – (11), для которых выполняется ограничение (12).

6. Области редуцируемости модельного уравнения

Посредством оценок размера образа отображения K и его константы Липшица можно точно указать область, на которой допускается конечномерная редукция уравнения $w = K(w)$.

Предварительно заметим, что имеют место следующие неравенства:

$$\|w\|_F \leq \|w\|_1 \quad \forall w \in H^1, \quad \|\mathcal{A}_2^{-1}(v)\|_1 \leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} \|v\|_1 \quad \forall v \in N^\perp \cap H^1 \quad (25)$$

(см. (20)). Следовательно,

$$\|g(w.w)\|_1 = 2\sqrt{\int_0^1 (ww')^2 d\theta} \leq 2\|w\|_F \|w\|_1 \leq 2\|w\|_1^2. \quad (26)$$

Пусть $w \in T_L = \{w \in H^1[0, 1] : \|w\|_1 \leq L\}$. Из оценки (26) получаем

$$\|K(v)\|_1 = \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda v + g_2(w.w) - b)\|_1 \leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda L + 2L^2 + \beta), \quad (27)$$

где $\beta = \|b\|_1$. Следовательно, если $\|K(v)\|_1 \leq L$, то оператор K переводит шар T_L в себя. Последнее утверждение справедливо в случае выполнения соотношения (см. (27))

$$\frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda L + 2L^2 + \beta) \leq L$$

или

$$L^2 - pL + q \leq 0, \quad (28)$$

где $p = \frac{\pi^2(n+1)^2 - \lambda}{2}$, $q = \frac{\beta}{2}$. Для обеспечения свойства сжимаемости оператора $K : T_L \rightarrow T_L$ обратимся к оценке нормы разности значений K в произвольной паре точек v_1, v_2 :

$$\begin{aligned} \|K(v_2) - K(v_1)\|_1 &= \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda(v_2 - v_1) + \mathcal{R}((u + v_2)^2 - (u + v_1)^2))\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda + 4L) \|v_2 - v_1\|_1. \end{aligned}$$

Получаем то, что для обеспечения свойства сжимаемости K достаточно потребовать выполнения условия

$$\gamma := \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda + 4L) < 1, \quad (29)$$

или, что одно и то же, условия

$$\lambda + 4L < \pi^2(n+1)^2. \quad (30)$$

Таким образом, установлено следующее утверждение:

Теорема 2. При выполнении условий (28), (30) и при $\|u\|_1 \leq L$ оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(\mathcal{R}(u + v)^2 + \lambda v - b)$ переводит шар $T_L = \{v \in H^1[0, 1] : \|v\|_1 \leq L\}$ в себя и является сжимающим отображением $T_L \rightarrow T_L$.

Замечание 3. Константа γ (см. (29)) позволяет оценивать скорость сходимости итераций $v_{m+1}(u) = K(v_m(u))$ к редуцирующему отображению $\Phi(u)$:

$$\|v_m(u) - \Phi(u)\|_1 \leq \gamma^m \frac{\mathcal{D}}{1 - \gamma}, \quad \mathcal{D} = \frac{\mathcal{R}L + \beta}{\pi^2(n+1)^2}.$$

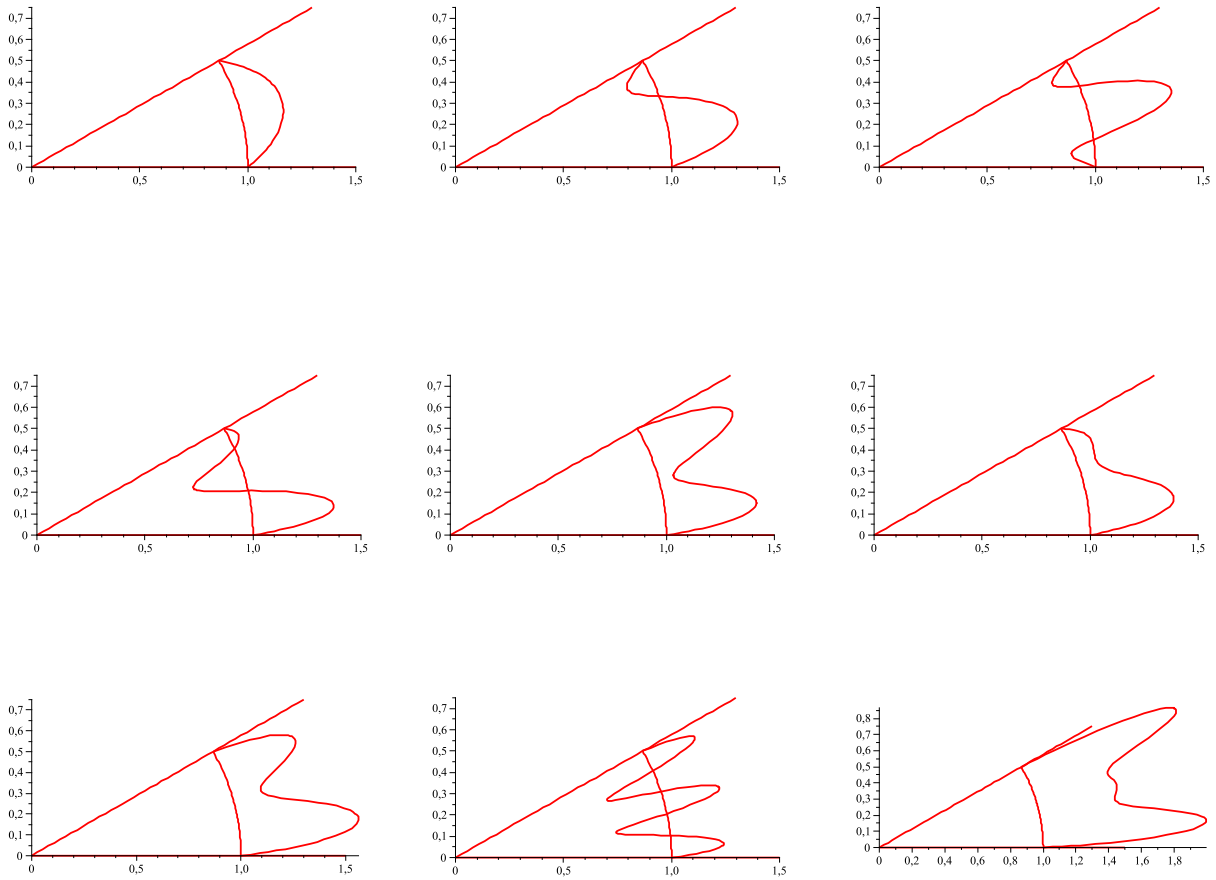


Рис. 4. Эпюры скоростей для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$

7. Примеры эпюр скоростей стационарных течений, соответствующих экстремалам функционала действия

Ниже приведены примеры приближенно вычисленных эпюр скоростей на окружности $r = 1$ для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$ (рис. 4).

Замечание 4. Вслед за вычислением поля скоростей можно вычислить давление непосредственно на основе (2) (уравнения Навье – Стокса в полярных координатах).

Литература

1. Jeffery, G.B. The Two-Dimensional Steady Motion of a Viscous Fluid / G.B. Jeffery // Phil. Mag. Ser.6. – 1915. – V.29, №172. – P. 455–465.
2. Hamel, G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten / G. Hamel // Jahresber. Detsch. Math. Ver. – 1917. – Bd 25. – P. 34–60.

3. Акуленко, Л.Д. Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре / Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – №3. – С. 25–36.
4. Акуленко, Л.Д. Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре / Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, вып. 3. – С. 431–441.
5. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидродинамика. Ч. 2 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М.: Физматгиз, 1963. – 728 с.
6. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
7. Даринский, Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – Т. 12. – С. 3–140.
8. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Известия АН СССР, серия математическая. – 1993. – Т. 57, №3. – С. 192–207.
9. Свиридюк, Г.А. О задаче Веригина для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия вузов. Математика. – 2003. – №7. – С. 54–58.
10. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Известия вузов. Математика. – 2007. – №3. – С. 22–28.
11. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
12. Борзаков, А.Ю. Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей / А.Ю. Борзаков, А.А. Лемешко, Ю.И. Сапронов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2003. – Вып. 2. – С. 100–112.
13. Борзаков, А.Ю. Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга / А.Ю. Борзаков // Сборник трудов математического факультета ВГУ. – 2005. – Вып. 9. – С. 9–22.
14. Костин, Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 418, №4. – С. 295–299.
15. Костина, Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений / Т.И. Костина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2011. – №1. – С. 181–186.

Юрий Иванович Сапронов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математическое моделирование», Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), yusaprg@mail.ru.

Поступила в редакцию 3 января 2014 г.

MSC 90C30, 90C90

DOI: 10.14529/mmp140207

Modelling Liquid Flows in Diffusers by Reduced Equations

Yu.I. Sapronov, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, yusapr@mail.ru

To know the dynamic characteristics of liquid in hydrocyclones and diffusers is important for optimizing the technical parameters of the liquid ends of turbine pumps on long-distance oil pipelines. It is possible to describe these characteristics by using the available analytic expressions for the solutions to the model equations of hydrodynamics or their simplified versions used in these problems.

It is known that the simplified systems of hydrodynamic type derived from the Navier – Stokes equation allow us to model quite precisely liquid flows in regions of arbitrary geometric shape. In this article we reduce the Helmholtz equation in the case of a flat diffuser flow to a boundary value problem for the Jeffrey – Hamel ODE by means of the Hamel substitution. At finite values of the Reynolds number we establish the possibility of constructing approximate solutions to the reduced equation via nonlinear Ritz – Galerkin approximation using a variational version of the Lyapunov – Schmidt method. With this approximation, we can determine the liquid velocity field to arbitrary precision. The article includes examples of approximately computed velocity diagrams for the flows close to n -modal with $n \leq 5$.

Keywords: Navier – Stokes equations; Helmholtz equations; diffuser current; Hamel substitution; Lyapunov – Schmidt variation method; velocity diagram.

References

1. Jeffery G.B. The Two-Dimensional Steady Motion of a Viscous fluid. *Phil. Mag. Ser. 6*, 1915, vol. 29, no. 172, pp. 455–465. DOI: 10.1080/14786440408635327
2. Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. *Jahresber. Detsch. Math. Ver.*, 1917, Bd 25, pp. 34–60.
3. Akulenko L.D., Kumakshev S.A. Bifurcation of a Main Steady-State Viscous Fluid Flow in a Plane Divergent Channel. *Fluid Dynamics*, 2005, no. 3, pp. 359–368. DOI: 10.1007/s10697-005-0076-6
4. Akulenko L.D., Kumakshev S.A. Bifurcation of Multimode Flows of a Viscous Fluid in a Plane Diverging channel. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, issue 3, pp. 296–302. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2008.07.007
5. Kochin N.E., Kibel I.A., Rose N.V. *Teoreticheskaya gidrodinamika. Ch. 2* [Theoretical Hydrodynamics. Part 2]. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 736 p.
6. Landau L.D., Lifschic E.I. *Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika* [Theoretical Physics. V. VI. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1986. 736 p.
7. Darinskii B.M., Sapronov Yu.I., Tsarev S.L. Bifurcations of Extremals of Fredholm Functionals. *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 145, no. 6, pp. 5311–5453. DOI: 10.1007/s10958-007-0356-2

8. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601–614. DOI: 10.1070/IM1994v042n03ABEH001547
9. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. On the Verigin Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2003, vol. 47, no. 7, pp. 55–59.
10. Zagrebina S.A. On the Showalter–Sidorov Problem. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2007, vol. 51, no. 3, pp. 19–24. DOI: 10.3103/S1066369X07030036
11. Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P. *Geometricheskie metody nelineinogo analiza* [Geometric Methods of Nonlinear Analysis]. Moscow, Nauka, 1975. 512 p.
12. Borzakov A.Yu., Lemeschko A.A., Sapronov Yu.I. [Nonlinear Approximation and Visualization Rittsevskie Extremals Bifurcation]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika* [Proceedings of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2003, issue 2, pp. 100–112. (in Russian)
13. Borzakov A.Yu. [Application of Methods of Finite-Dimensional Reduction to Global Analysis of Boundary Value Problems for the Equation Duffing]. *Sbornik trudov matematicheskogo fakul'teta VGU* [Proceedings of the Math. Faculty of VSU], 2005, issue 9, pp. 9–22. (in Russian)
14. Kostin D.V. Analysis Scheme for Bimodal Deflections of a Weakly Inhomogeneous Elastic Beam. *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 77, issue 1, pp. 46–50. DOI: 10.1134/S1064562408010122
15. Kostina T.I. [Nonlocal Calculation of the Key Functions in the Problem of Periodic Solutions of Variational Equations]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika* [Proceedings of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2011, no. 1, pp. 181–186. (in Russian)

Received January 3, 2014