УДК 519.62 DOI: 10.14529/mmp140310

МЕТОДЫ ТИПА АДАМСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Булатов, До Тиен Тхань

В статье рассмотрены линейные интегро-дифференциальные системы уравнений первого порядка с тождественно вырожденной матрицей перед производной. Для данных систем задано начальное условие, которое предполагается согласованным с правой частью. Рассматриваемые в статье постановки задач возникают при математическом моделировании сложных электрических цепей. Используя аппарат матричных полиномов, выделен класс задач, имеющих единственное решение. Обсуждаются трудности численного решения таких задач, в частности неустойчивость многих неявных методов. Для численного решения такого класса задач предложены многошаговые методы, которые основаны на явной квадратурной формуле Адамса для интегрального слагаемого и на экстраполяционных формулах. Сформулированы достаточные условия сходимости таких алгоритмов к точному решению.

Приведены результаты численных расчетов, которые хорошо согласуются с теоретическими выкладками.

Ключевые слова: многошаговые методы; интегро-дифференциальные уравнения; матричные полиномы.

1. Постановка задачи и необходимые сведения

При математическом моделировании сложных электрических цепей возникают взаимосвязанные интегро-дифференциальные и интегральные уравнения Вольтерра второго и первого родов [1, 2]. Если данные уравнения объединить, то получим систему интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед производной.

Настоящая работа посвящена численному решению системы

$$A(t)x^{'}(t) + B(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in [0,1], \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $A(t), B(t), K(t,s)$ – $(n \times n)$-матрицы, $f(t), x(t)$ – n-мерные известная и искомая вектор-функции. Элементы $A(t), B(t), K(t,s), f(t)$ предлагаются достаточно гладкие.

В статье рассмотрен случай, когда матрица $A(t)$ тождественно вырожденная, т.е.

$$\det A(t) = 0 \ \forall t \in [0,1]. \tag{3}$$

Под решением системы (1) мы будем понимать любую вектор $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, которая обращает исходную систему в тождество и удовлетворяется начальным условием (2).

Систему вида (1) с условием (3) будем называть системой интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей. Задачи (1) – (2) при выполнении условия (3) принципиально отличаются от систем интегро-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной. В частности, для существования решения системы (1) необходима разрешимость системы линейных алгебраических уравнений вида

$$A(t_0)x^{'}(t_0) = f(t_0) - B(t_0)x_0$$

относительно вектора $x^{'}(t_0)$. Для этого необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\mathrm{rank}(A(t_0)) = \mathrm{rank}(A(t_0)|f(t_0) - B(t_0)x_0).$$

Даже если решение задачи (1) – (2) существует, то оно может быть неединственным. Ниже мы приведем достаточные условия существования единственного достаточно гладкого решения рассматриваемой задачи и обоснуем многошаговые методы ее численного решения.

Приведем класиффикацию рассматриваемых задач:

- Если $K(t,\tau)$ тождественно нулевая матрица, то такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ);
- Если $A(t)$ тождественно нулевая матрица, $detB(t) = 0$ $B(t) \neq 0$, то мы будем иметь интегро-алгебраическое уравнение (ИАУ);
- Если $A(t)$ и $B(t)$ тождественно нулевые матрицы, то мы будем иметь систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода (СИУВ).

Степень сложности систем вида (1) определяется с помощью характеристики, называемой индексом. По аналогии с [3], будем пользоваться следующим определением индекса:

Определение 1. *Минимальное число r, при котором существует квазилинейный дифференциальный оператор*

$$\Omega_r = \sum_{j=0}^{r} W_j(t)(\frac{d}{dt})^j,$$

где $W_j(t) - (n \times n)$ - матрицы из $C(t)$, со свойствами

$$\Omega_r \circ (A(t)x^{'}(t) + B(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds) =$$

$$\tilde{A}(t)x^{'}(t) + \tilde{B}(t)x(t) + \int\limits_0^t \tilde{K}(t,s)x(s)ds = \Omega_r \circ f(t),$$

причем

$$\tilde{A}(t) \neq 0, \ \forall t \in [0,1],$$

назовем индексом системы (1).

Приведем необходимые определения и вспомогательные результаты для дальнейших исследований:

Определение 2. [11] *Матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$, $t \in [0,1]$, где $A(t), B(t), C(t) - (n \times n)$ матрицы, λ, μ – скалярные параметры, имеет простую структуру, если выполнены условия:*

1) $\mathrm{rank}A(t) = \mathrm{const} = r, \ \forall t \in [0,1]$;

2) $\mathrm{rank}[A(t)|B(t)] = r + l = \mathrm{const}\ \forall t \in [0,1]$;

3) $det[\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)] = a_0(t)\lambda^r \mu^l + ...$, *причем* $a_0(t) \neq 0\ \forall t \in [0,1]$.

Теорема 1. [3] *Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:*

1) Элементы $A(t), B(t), f(t), K(t,s)$ принадлежат классу $C^{p+1}_{[0,1]}$;

2) Матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + K(t,t)$ имеет простую структуру;

3) $\mathrm{rank}A(0) = \mathrm{rank}(A(0)|f(0) - B(0)x(0))$.

Тогда задача (1), (2) *имеет на отрезке [0,1] единственное решение* $x(t)$ *из класса* $C^p_{[0,1]}$.

Лемма 1. [6] *Пусть* r*-мерные векторы* θ_i *вычисляются по правилу*

$$\theta_i = \hat{C}\theta_{i-1} + h\sum_{l=1}^{i-1} D_{i,l}\theta_l + F_i, i = 2, 3, ..., N, \ h = 1/N, \tag{4}$$

где векторы $\theta_0, \theta_1, ...\theta_{k-1}$ *- заданы,* $\|D_{i,l}\| \le L_1 < \infty, \|F_i\| \le L_2 < \infty$ *и собственные значения матрицы* $\hat{C}$ *удовлетворяют условию* $|\lambda_j| \le 1$, *и на границе единичного круга нет кратных собственных чисел.*

Тогда справедлива оценка

$$\|\theta_i\| \le L_3\|\Psi_i\|, \ i = 2, 3, ..., N, L_3 < \infty,$$

где $\|\Psi_i\| = max\{\|F_i\|, \|\theta_1\|\}$.

Лемма 2. [11] *Если матричный полином* $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ *имеет простую структуру на всем отрезке [0,1], и элементы* $A(t), B(t), C(t)$ *принадлежат классу функций* $C^p_{[0,1]}$, *то существуют невырожденные матрицы* $P(t)$ *и* $Q(t)$ *с элементами из* $C^p_{[0,1]}$ *такие, что*

$$P(t)A(t)Q(t) = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(t)B(t)Q(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & 0 & B_3(t) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(t)CQ(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) & 0 \\ C_4(t) & C_5(t) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-r-l} \end{pmatrix},$$

где E_m *– единичная матрица размера* m.

Из леммы 2 следует

Лемма 3. *Если матричный полином* $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ *имеет простую структуру на всем отрезке [0,1], и матрицы A(t), B(t) и C(t) имеют блочный вид*

$$A(t) = \begin{pmatrix} A^1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) & A_3(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} B^1(t) \\ B^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) & B_3(t) \\ B_4(t) & B_5(t) & B_6(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} C^1(t) \\ C^2(t) \\ C^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) & C_3(t) \\ C_4(t) & C_5(t) & C_6(t) \\ C_7(t) & C_8(t) & C_9(t) \end{pmatrix},$$

где $A^1(t), \ B^1(t), \ C^1(t)$ *– матрица размер* $(r \times n)$, $B^2(t), \ C^2(t)$ *– матрица размер* $(l \times n)$, $C^3(t)$ *– матрица размер* $(n-r-l) \times n)$ *и* $\mathrm{rank}(A^1(t)) = r = \mathrm{const}\ \forall t \in [0,1]$, $\mathrm{rank}((A(t)|B(t)) = r + l = \mathrm{const}\ \forall t \in [0,1]$, *то*

$$det \begin{pmatrix} A^1(t) \\ qB^2(t) \\ sC^3(t) \end{pmatrix} \ne 0, \ \forall t \in [0,1],$$

где $q \ne 0, \ s \ne 0$.

Вначале приведем описание численных методов решения интегральных уравнений Вольтера I рода, основанных на явных квадратурных формулах типа Адамса.

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $t_i = ih, i = 1,2,...,N, h = 1/N$, и пусть известны значения $y_i \approx x(t_i)$. Тогда

$$\int_0^{t_{i+1}} y(\tau)d\tau = \int_0^{t_{k+1}} y(\tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^{t_{k+1}} L^0_{k+1}(y_0, y_1, ..., y_k, \tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L^j_{k+1}(y_{j-k}, y_{j-k+1}, ..., y_j, \tau)d\tau =$$

$$= h\sum_{l=0}^{k} \beta_l y_l + \sum_{j=k+1}^{i} h\sum_{l=0}^{k} \gamma_l y_{j-l} = h\sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} y_l, \tag{5}$$

где $L^i_{k+1}(y_{i-k}, y_{i-k+1}, ..., y_i, t)$ – интерполяционный полином степени k, проходящей через точки $(y_{i-k}, t_{i-k}), (y_{i-k+1}, t_{i-k+1}), ..., (y_i, t_i)$. Выпишем коэффициенты γ_l (см., например [6]) в таблице 1.

Таблица 1

Коэффициенты γ_l

k	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	Общий множитель
1	1	–	–	–	–	–	1
2	3	–1	–	–	–	–	1/2
3	23	–16	5	–	–	–	1/12
4	55	–59	37	–9	-	–	1/24
5	1901	–2774	2616	–1274	251	–	1/720
6	4277	–7923	9982	–7298	–2877	–475	1/1440

Приведем коэффициенты $\omega_{i+1,l}$ для $k = 0,1,2,3$. (см. например [6–8]):

$$\omega_{i+1,l} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \omega_{i+1,l} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 3 & & \\ 3 & 2 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 & & & & \\ 9 & 5 & 11 & 23 & & & \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 & & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 12 & 7 & 23 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 64 & -32 & 64 & & & & & \\ 55 & 5 & 5 & 55 & & & & \\ 55 & -4 & 42 & -4 & 55 & & & \\ 55 & -4 & 33 & 33 & -4 & 55 & & \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 24 & -4 & 55 & \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 24 & 33 & -4 & 55 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для нечетных k коэффициент $\omega_{i+1,0} = 0$, поэтому нам не потребуется начальное значение x_0 (см. [6–8]) и в этих таблицах при нечетных k первый нулевой столбец опущен.

Отметим, что из самих формул приближенного вычисления интеграла (5) следует рекуррентное соотношение:

$$\begin{cases} \omega_{i+1,j} = \omega_{i,j}, j = 0, 1, ..., i-k-1, \\ \omega_{i+1,i-k} = \omega_{i,i-k} + \gamma_k, \omega_{i+1,i-k-1} = \omega_{i,i-k-1} + \gamma_{k-1}, ..., \omega_{i+1,i} = \omega_0. \end{cases} \tag{6}$$

В работах [6, 8] были построены многошаговые методы, которые основаны на формуле (5) для численного решения интегрального уравнения

$$\int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in [0,1],\ 0 \le s \le t, \tag{7}$$

с достаточно гладкими ядром $K(t,s)$ и $f(t)$ с условиями

$$K(t,t) \neq 0\ \forall t \in [0,1],\ f(0) = 0.$$

Данные k-шаговые методы имеют вид

$$h\sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}, i = k, k+1, ..., N-1, \tag{8}$$

где $K_{i+1,l} = K(t_{i+1}, t_l), f_{i+1} = f(t_{i+1}), x_l \approx x(t_l), h = 1/N$, ω называется весами квадратурной формулы.

В статье [10] были выделены задачи вида:

$$A(t)x^{'}(t) + B(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s,x(s))ds = f(t),\ t \in [0,1], \tag{9}$$

где

$$det A(t) \equiv 0,$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0,$$

имеющие единственное решение. Для численного решения таких задач были предложены и обоснованы многошаговые методы, основанные на формулах дифференцирования назад для первых двух слагаемых и на явных квадратурных формулах Адамса для интегрального слагаемого. Эти методы имеет вид:

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k} \bar{\alpha}_j x_{i+1-j} + hB_{i+1}x_{i+1} + h^2\sum_{j=0}^{i} \bar{\omega}_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = hf_{i+1}, i = k, k+1, ..., N, \tag{10}$$

где α_i – коэффициенты формулы дифференцирования назад, а $\omega_{i+1,l}$ - веса квадратурной формулы явного метода Адамса. Для задач, рассмотренных в данной статье, методы (10) принципиально неприменимы в силу того, что матрица $\overline{\alpha}_0 A_{i+1} + hB_{i+1}$ может быть тождественно вырожденной (детали приведены в заключительном разделе).

2. Численные методы решения

В данном разделе приведены и обоснованы моногошаговые методы численного решения задачи (1), (2), которые удовлетворяют условиями теоремы 1. Приведем численный метод решения задачи (1), (2) с условием (3). Зададим на отрезке [0, 1] равномерную сетку $t_i = ih, i = 1, 2, ..., N, h = 1/N$. Обозначим $A_i = A(t_i), K_{ij} = K(t_i, t_j), f_i = f(t_i), x_i \approx x(t_i)$. Тогда общие многошаговые методы имеют вид:

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j+1} + hB_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \beta_j x_{i+1-j} + h^2 \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{i+1l} K_{i+1l} x_l = hf_{i+1}. \tag{11}$$

Предполагается, что при реализации данных алгоритмов стартовые значения $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$ вычислены достаточно точно и $x_0 = x(0)$.

Формулы (11) могут быть:

1) явными при $\alpha_0 \neq 0, \beta_0 = 0, \omega_{i+1,i+1} = 0$;

2) полуявными при $\alpha_0 \neq 0,\ \beta_0 \neq 0,\ \omega_{i+1,i+1} = 0$, или при $\alpha_0 \neq 0,\ \beta_0 = 0,\ \omega_{i+1,i+1} \neq 0$;

3) неявными при $\alpha_0 \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \omega_{i+1,i+1} \neq 0$.

В силу вырожденности матрицы $A(t)$ явные методы для рассматриваемых задач применять нельзя. Полуявные методы, также неприменимые для задачи (1), (2), удовлетворяющих условиями теоремы 1 в силу того, что матрица $(\alpha_0 A_{i+1} + h\beta_0 B_{i+1})$ или $(\alpha_0 A_{i+1} + h^2 \omega_{i+1,i+1} K_{i+1,i+1})$, могут быть вырожденными. Напомним (см. теорему 1 и лемму 2), что рассматриваемый класс задач включает в себя и интегральные уравнения Вольтера первого рода с ядром на диагонале не равным нулю. А для таких уравнений многие неявные многошаговые методы порождают неустойчивый процесс.

Для численного решения рассматриваемых задач мы предлагаем модифицированные методы, основанные на явных формулах Адамса. А именно, для вычисления слагаемого в уравнении (1) будем использовать $k-1$-шаговый явный метод Адамса, описанный в предыдущем параграфе. Вырождение $A(t)x^{'}(t) + B(t)x(t)$ в точке $t = t_{i+1}$ будем находить по экстраполяционным формулам. Будем вычислять x_{i+1} как значение интерполяционного полинома степени $k-1$, проходящего через $(x_i, t_i), (x_{i-1}, t_{i-1}), ..., (x_{i-k+1}, t_{i-k+1})$ в точке $t = t_{i+1}$, т.е.

$$x_{i+1} = L_{k-1}(x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-k+1,t}) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j x_{i-j}.$$

Аналогично, $x_{i+1} \approx x^{'}(t)|_{t=t_{i+1}}$ – значение производной интерполяционного полинома степени k, проходящего через точки $(x_i, t_i), (x_{i-1}, t_{i-1}), ..., (x_{i-k}, t_{i-k})$ в точке $t = t_{i+1}$, т.е.

$$x^{'}_{i+1} = L^{'}_k(x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-k}) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j}.$$

Таким образом предложенные многошаговые методы имеют вид:

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j} + hB_{i+1} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j x_{i-j} + h^2 \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1l} K_{i+1l} x_l = hf_{i+1}. \tag{12}$$

Приведем коэффициенты β_j для различных $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты β_j

k	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	1	–	–	–	–	–
1	2	–1	–	–	–	–
2	3	–3	1	–	–	–
3	4	–6	4	–1	–	–
4	5	–10	10	–5	1	–
5	6	–15	20	–15	6	–1

Приведем коэффициенты α_j для различных $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ в табл. 3.

Таблица 3

Коэффициенты α_j

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	Общий множитель
1	1	–1	–	–	–	–	–	1
2	5	–8	3	–	–	–	–	1/2
3	26	–57	42	–11	–	–	–	1/6
4	127	–414	534	–322	75	–	–	1/12
5	522	–1755	2540	–1980	810	–137	–	1/60
6	669	–2637	4745	–4920	3015	–1019	147	1/60

Непосредственные вычисления показывают, что корни характеристических уравнений

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j p^{k-j} = 0 \tag{13}$$

при $k \leq 6$ лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней, а при $k \geq 7$ есть хотя бы один корень, по модулю больший единицы.

Аналогично, для характеристических уравнений [4]

$$\sum_{j=0}^{k} \beta_j p^{k-j} = 0 \tag{14}$$

и для уравнений (6) – (8)

$$\sum_{j=0}^{k} \gamma_j p^{k-j} = 0 \tag{15}$$

при $k \leq 5$ корни лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней.

Теорема 2. *Пусть для задачи* (1), (3) *выполнены условия теоремы 1, тогда справедлива оценка* $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^k)\ \forall j = \overline{1, N}$, *где* x_j *определены из системы* (12), $\|x_l - x(t_l)\| \leq K_l h^k,\ K_l < \infty, l = 0, 1, ..., k-1$.

Доказательство. В силу леммы 2 и второго условия теоремы, существует невырожденная матрица P(t) с элементами из $C^{k+1}_{[0,1]}$ такая, что

$$P_{i+1}A_{i+1} = \begin{pmatrix} A^1_{i+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathrm{rank}A^1_{i+1} = r = \mathrm{const}$. Здесь и в дальнейшем принято обозначение $P_{i+1} = P(t_{i+1})$.

Умножая (12) на матрицу P_{i+1}, получим

$$\begin{pmatrix} A^1_{i+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j} + \begin{pmatrix} B^1_{i+1} \\ B^2_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^{k} \beta_j x_{i-j} + h \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} \begin{pmatrix} K^1_{i+1,l} \\ K^2_{i+1,l} \\ K^3_{i+1,l} \end{pmatrix} x_l = \begin{pmatrix} g^1_{i+1} \\ g^2_{i+1} \\ g^3_{i+1} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где

$$P_{i+1}A_{i+1} = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_{i+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{i+1}B_{i+1} = \begin{pmatrix} B^1 & B^2 & B^3 \\ B^4 & B^5 & B^6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1_{i+1} \\ B^2_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{i+1}K_{i+1,l} = \begin{pmatrix} K^1 & K^2 & K^3 \\ K^4 & K^5 & K^6 \\ K^7 & K^8 & K^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^1_{i+1,l} \\ K^2_{i+1,l} \\ K^3_{i+1,l} \end{pmatrix},\ P_{i+1}f_{i+1} = \begin{pmatrix} g^1_{i+1} \\ g^2_{i+1} \\ g^3_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Положим $\varepsilon_i = x_i - x(t_i)$, тогда уравнения ошибки имеет вид:

$$A^1_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \varepsilon_{i-j} + hB^1_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \beta_j \varepsilon_{i-j} + h^2 \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K^1_{i+1,l} \varepsilon_l = h\delta_{i+1}, \tag{17}$$

$$hB^2_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \beta_j \varepsilon_{i-j} + h^2 \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K^2_{i+1,l} \varepsilon_l = h\varphi_{i+1}, \tag{18}$$

$$h^2 \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K^3_{i+1,l} \varepsilon_l = h\rho_{i+1}. \tag{19}$$

Вычитая из $(i+1)$-го уравнения (19) i-е, умножая полученное на h^{-2}, обозначая

$$\Delta K^3_{i+1,l} = K^3_{i+1,l} - K^3_{i,l},\ \Delta\rho_{i+1} = \rho_{i+1} - \rho_i$$

и учитывая формулу (8), получим

$$\sum_{l=0}^{i-k-1} \omega_{i+1,l} \Delta K^3_{i+1,l} \varepsilon_l + ((\omega_{i,i-k} + \gamma_k) K^3_{i+1,i-k} - \omega_{i,i-k} K^3_{i,i-k}) \varepsilon_{i-k} +$$

$$((\omega_{i,i-k+1} + \gamma_{k-1}) K^3_{i+1,i-k+1} - \omega_{i,i-k+1} K^3_{i,i-k+1}) \varepsilon_{i-k+1} + ... + \gamma_0 K^3_{i+1,i} \varepsilon_i = h^{-1} \Delta\rho_{i+1},$$

$$i = k, k+1, ..., N-1.$$

Эти равенства перепишем в виде

$$\sum_{j=0}^{k}\gamma_j K^3_{i+1,i-j}\varepsilon_{i-j}+\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}\Delta K^3_{i+1,l}\varepsilon_l=h^{-1}\Delta\rho_{i+1},\ i=k,k+1,...,N-1. \tag{20}$$

По первому условию теоремы (достаточная гладкость входных данных) справедливо представление

$$\Delta K^3_{i+1,l}=hM^3_{i+1,l},\ \left\|M^3_{i+1,l}\right\|\le M^3<\infty,\ i=k,k+1,...,N-1.$$

$$\Delta K^2_{i+1,l}=hM^2_{i+1,l},\ \left\|M^2_{i+1,l}\right\|\le M^2<\infty,\ i=k,k+1,...,N-1.$$

Используя стандартные оценки для приближенного вычисления определенного интеграла [5] и учитывая первое условие теоремы, получим:

$$\|\Delta\rho_{i+1}\|\le L_2h^{k+1},\ i=k,k+1,...,N-1,$$

или

$$\left\|h^{-1}\Delta\rho_{i+1}\right\|\le L_2h^k,\ L_2<\infty,\ i=k,k+1,...,N-1. \tag{21}$$

По аналогии имеем:

$$\|\delta_{i+1}\|\le L_3h^k,\ L_3<\infty,\ i=k,k+1,...,N-1. \tag{22}$$

Учитывая (20), перепишем уравнения (17),(18),(19) в виде:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\alpha_0A^1_{i+1}+h\beta_0B^1_{i+1}\\ \beta_0B^2_{i+1}\\ \gamma_0K^3_{i+1}\end{pmatrix}\varepsilon_i+\begin{pmatrix}\alpha_1A^1_{i+1}+h\beta_1B^1_{i+1}\\ \beta_1B^2_{i+1}\\ \gamma_1K^3_{i+1}\end{pmatrix}\varepsilon_{i-1}+...+\\ &+\begin{pmatrix}\alpha_kA^1_{i+1}+h\beta_kB^1_{i+1}\\ \beta_kB^2_{i+1}\\ \gamma_kK^3_{i+1}\end{pmatrix}\varepsilon_{i-k}+h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}\begin{pmatrix}K^1_{i+1,l}\\ M^2_{i+1,l}\\ M^3_{i+1,l}\end{pmatrix}\varepsilon_l=F_i,\end{aligned} \tag{23}$$

где $F_i=(\delta^T_{i+1},\varphi^T_{i+1},h^{-1}\Delta\rho^T_{i+1}),\ i=k,k+1,...,N-1.$

В силу второго условия теоремы и леммы 3, при достаточно малых h, матрицы

$$\begin{pmatrix}\alpha_0A^1_{i+1}+h\beta_0B^1_{i+1}\\ \beta_iB^2_{i+1}\\ \gamma_0K^3_{i+1,i}\end{pmatrix},\ i=k,k+1,..,N-1$$

являются невырожденными, а по первому условию теоремы (достаточная гладкость входных данных) справедливо представление

$$\begin{pmatrix}\alpha_0A^1_{i+1}+h\beta_0B^1_{i+1}\\ \beta_0B^2_{i+1}\\ \gamma_0K^3_{i+1,i}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_qA^1_{i+1}+h\beta_qB^1_{i+1}\\ \beta_qB^2_{i+1}\\ \gamma_qK^3_{i+1,i-q}\end{pmatrix}=\mathfrak{E}_q+hD_{i+1,i-q},$$

где

$$\mathfrak{E}_q=\begin{pmatrix}\frac{\alpha_q}{\alpha_0}E_r+M_1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\beta_q}{\beta_0}E_l+M_2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\gamma_q}{\gamma_0}E_{n-r-l+M_3}\end{pmatrix},$$

а $\|D_{i+1,i-q}\| \le d < \infty,\ i = k, k+1, ..., N-1.$

Умножая уравнения (23) на матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_0 A^1_{i+1} + h\beta_0 B^1_{i+1} \\ \beta_0 B^2_{i+1} \\ \gamma_0 K^3_{i+1,i} \end{pmatrix}^{-1}$, получим

$$\varepsilon_i + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{E}_l \varepsilon_{i-l} + h \sum_{j=1}^{i} M_{i+1,j} \varepsilon_j = \mathfrak{F}_i, \tag{24}$$

где

$$M_{i+1,j} = \omega_{i+1,j} \begin{pmatrix} \alpha_0 A^1_{i+1} + h\beta_0 B^1_{i+1} \\ \beta_0 B^2_{i+1} \\ \gamma_0 K^3_{i+1,i} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K^1_{i+1,j} \\ M^2_{i+1,j} \\ M^3_{i+1,i} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{F}_i = \begin{pmatrix} \alpha_0 A^1_{i+1} + h\beta_0 B^1_{i+1} \\ \beta_0 B^2_{i+1} \\ \gamma_0 K^3_{i+1,i} \end{pmatrix}^{-1} F_i,\ i = k, k+1, ..., N.$$

Обозначая $\theta_i = (\varepsilon_i^T, \varepsilon_{i-1}^T, ..., \varepsilon_{i-k}^T)^T$ в формулах (24) стандартным образом, совершим переход от многошаговых методов к одношаговым. Будем иметь

$$\theta_i = C\theta_{i-1} + h \sum_{l=1}^{i-1} D_{i,l} \theta_l + \Psi_i, \tag{25}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} -\mathfrak{E}_1 & -\mathfrak{E}_2 & \cdots & -\mathfrak{E}_k \\ E & 0 & ... & 0 \\ 0 & E & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & E \end{pmatrix},$$

нормы матриц $D_{i,j}$ равномерно ограничены, а векторы Ψ_i определены по правилу

$$\Psi_i = (\mathfrak{F}_i^T, 0, 0, ..., 0)^T.$$

Собственные числа матрицы C совпадают с корнями характеристических уравнений (13), (14), (15), которые, как было отмечено выше, при $k \le 6$ по модулю меньше единицы. Таким образом, в силу условия теоремы

$$\|\theta_0\| \le L_4 h^k,\ L_4 < \infty,$$

а в силу оценок (21) и (22), имеем

$$\|\Psi_i\| \le L_5 h^k,\ L_5 < \infty,\ i = k, k+1, ..., N.$$

Вспоминая, что $\theta_i = (\varepsilon_i^T, \varepsilon_{i-1}^T, ..., \varepsilon_{i-k}^T)^T$ из приведенных выше оценок и леммы 1 следует, что

$$\|\varepsilon_i\| \le L_6 h^k,\ L_6 < \infty,\ i = k, k+1, ..., N-1.$$

□

3. Численные эксперименты

Приведем очень простой модельный пример:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}x'(t)+\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}x(t)+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}e^{t+s}&0&0\\0&e^{t-s}&0\\0&0&e^{t+2s}\end{pmatrix}x(\tau)d\tau=\begin{pmatrix}e^{-2t}+te^t\\(1+t)e^t\\te^t\end{pmatrix},$$

где x-трехмерная искомая вектор-функция с начальным условием $x(0)=(1,1,1)^T$. Данный пример удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и точное решение $x(t)=(e^{-t},e^t,e^{-2t})^T$. Легко заметить, что методы (10) принципиально нельзя применить для данного примера, т.к. $det(\bar{\alpha}A+hB)=0$.

Усложним данный пример, а именно умножим исходную систему на матрицу

$$P(t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\e^t&1&0\\e^{2t}&e^t&1\end{pmatrix}$$

и произведем замену переменной $x(t)=Q(t)y(t)$, где

$$Q(t)=\begin{pmatrix}1&2t&t^2\\0&1&3t\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

В итоге получим

$$A(t)y'(t)+B(t)y(t)+\int\limits_0^t K(t,s)ds=f(t),\ t\in[0,1], \tag{26}$$

где $A(t)=\begin{pmatrix}1&2t&t^2\\e^t&2te^t&e^tt^2\\e^{2t}&2e^{2t}&e^{2t}t^2\end{pmatrix}$, $B(t)=\begin{pmatrix}1&2t+2&t^2+1+2t\\e^t&2te^t+1+2e^t&e^tt^2+3t+e^t+2te^t\\e^{2t}&2e^{2t}t+e^t+2e^{2t}&e^{2t}t^2+3te^t+e^{2t}+2e^{2t}t\end{pmatrix}$,

$$K(t,s)=\begin{pmatrix}e^{t+s}&2e^{t+s}t&e^{t+s}t^2\\e^te^{t+s}&2e^te^{t+s}t+e^{t-s}&e^te^{t+s}t^2+3e^{t-s}t\\e^{2t}e^{t+s}&2e^{2t}e^{t+s}t+e^te^{t-s}&e^{2t}e^{t+s}t^2+3e^te^{t-s}t+e^{t+2s}\end{pmatrix},$$

$$f(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t}+te^t\\e^t(e^{-2t}+te^t)+(1+t)e^t\\e^{2t}(e^{-2t}+te^t)+(1+t)(e^t)^2+te^t\end{pmatrix}.$$

Точное решение $y(t)=Q^{-1}(t)x(t)$, начальное условие $y(0)=(1,1,1)^T$.

Численные расчеты данной задачи при различных значениях k приведены в табл. 4.

Таблица 4

Численные расчеты задачи при различных значениях k

err	k=1	k=2	k=3
N=5	1,309600415814891	0,6015407275019990	0,21171281782986052430
N=10	0,7497289570481798	0,1844243516458794	0,04761740960151257878
N=20	0,3988507964835724	0,0503707677718254	0,00732509005266374868
N=40	0,2051764163549656	0,0129986398315527	0,00097017989140169301
N=80	0,1039752161311108	0,0032742356352037	0,00012382133627371258

Здесь $err = \max_{k \le i \le N} \sqrt{(y_i^1 - y^1(t_i))^2 + (y_i^2 - y^2(t_i))^2 + (y_i^3 - y^3(t_i))^2}$.

В качестве стартовых значений для $y_1, y_2, ..., y_{k-1}$ были взяты точные значения $y(t_1), y(t_2), ..., y(t_{k-1})$. Из приведенной табл. 4 видно, что расчеты хорошо согласуются с теоритическими выкладками.

Исследования были поддержаны грантом РФФИ 13-01-93002Вьет-а.

Литература

1. Ушаков, Е.И. Статическая устойчивость электрических систем / Е.И. Ушаков. – Новосибирск: Наука. сиб. отд-ние, 1988.
2. Сенди, К. Современные методы анализа электрических цепей / К. Сенди. – М.: Энергия, 1971. – 360 с.
3. Булатов, М.В., Об одном семействе вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, Е.В. Чистякова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, №9. – С. 1665–1673.
4. Булатов, М.В. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами / М.В. Булатов, О.С. Будникова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 829–839.
5. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975.
6. Тен Мен Ян Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода: дис.... канд. физ. мат. наук / Тен Мен Ян. – Иркутск, 1985.
7. Brunner, H. The Numerical Solution of Volterra Equations / H. Brunner, P.J. van der Houwen. – Amsterdam: North-Holland, CWI Monographs 3, 1986.
8. Linz, P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations / P. Linz. – SIAM, Philadelphia, 1985.
9. Булатов, М.В. Об интегродифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной / М.В. Булатов. – Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, №5. – С. 692–695.
10. Булатов, М.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами / М.В. Булатов, Е.В. Чистякова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 1248–1255.
11. Булатов, М.В. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально алгебраических уравнений высокого порядка / М.В. Булатов, Ли М.Г. // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1299—1305.

Михаил Валерьянович Булатов, доктор физико-математических наук, профессор, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), mvbul@icc.ru.

До Тиен Тхань, аспирант, Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет (г. Иркутск, Российская Федерация), thanhdotien278@yahoo.com.

Поступила в редакцию 16 мая 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 3, pp. 93–106.

MSC 65R20 **DOI: 10.14529/mmp140310**

Multistep Method for Solving Degenerate Integral-Differential Equations

M. V. Bulatov, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk State Technical University, Irkutsk, Russian Federation, mvbul@icc.ru**,**
Thanh Do Tien, National Research Irkutsk State Technical University, Irkutsk, Russian Federation, thanhdotien278@yahoo.com

In this work we consider the linear integral-differential equations of the fist order with the identically singular matrix at the derivative. For these systems, the initial conditions is given and assumed consistent with the right part. Considered tasking in this paper arise in the mathematical modeling of complex electric circuits. By using the apparatus of matrix polynomials a class of problems, which having a unique solution, is marked out. The difficulties of the numerical solution of such problems, in particular the instability of many implicit methods is considered. For numerical solution of this class of problems we have suggested multistep methods, which are based on an explicit quadrature formula for the integral term Adams and extrapolation formulas. Sufficient conditions for the convergence of such algorithms to the exact solution is formulated.

Keywords: integral-differential equations; multistep methods; matrix polynomials.

References

1. Usakov E.I. *Staticheskaya ustoychivost' elektricheskikh sistem* [Static Stability of Electrical Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1988.
2. Scendy K. *Sovremennyye metody analiza elektricheskikh tsepey* [Modern Methods of Analysis of Electric Circuits]. Moscow, Energiya, 1971. 360 p.
3. Bulatov M.V., Chistyakova E.V. On a Family of Singylar Integro-Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, issue 9, pp. 1558–1566. DOI: 10.1134/S0965542511090065
4. Budnikova O.S., Bulatov M.V. Numerical Solution of Integral-algebraic Equations for Multistep Methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, issue 5, pp. 691–701. DOI: 10.1134/S0965542512050041
5. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1975.
6. Ten Men Yan *Priblizhennoye resheniye lineynykh integral'nykh uravneniy Vol'terra I roda* [Approximate Solution of Linear Volterra Integral Equations of the First Kind. Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics]. Irkutsk, 1985.
7. Brunner H., van der Houwen P.J. *The Numerical Solution of Volterra Equations.* Amsterdam: North-Holland, CWI Monographs 3, 1986.
8. Linz P. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations.* SIAM, Philadelphia, 1985. DOI: 10.1137/1.9781611970852

9. Bulatov M.V. Regularization of Singular Systems of Volterra Integral Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2002*, vol. 42, issue 3, pp. 315–320.
10. Bulatov M.V., Chistyakova E.V. Numerical Solution of Integro-Differential Systems with a Degenerate Matrix Multiplying the Derivative by Multistep Methods. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, issue 9, pp. 1317–1325. DOI: 10.1134/S0012266106090102
11. Bulatov M.V., Lee M.-G. Applications of Matrix Polynomials to the Analysis of Linear Differential-Algegraic Equations of Higher Order. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, issue 10, pp. 1353–1360. DOI: 10.1134/S0012266108100017

Received May 16, 2014