УДК 517.958 DOI: 10.14529/mmp140307

О СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ТИПА ОЛДРОЙДА

В.П. Орлов, М.И. Паршин

Для начально-граничной задачи динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда в плоском случае установлена локальная теорема существования сильного решения. Изучаемая сплошная среда является ограниченной областью на плоскости с достаточно гладкой границей. Рассматриваемая система уравнений является обобщением системы Навье-Стокса-Фурье и получается из нее путем добавления в тензор напряжений интегрального слагаемого, отвечающего за память среды. Вначале рассматривается начально-граничная задача для системы вязкоупругости типа Олдройда с переменной вязкостью. Затем рассматривается начально-граничная задача для уравнения сохранения энергии с переменным коэффициентом теплопроводности и интегральной частью. Разрешимость этих задач устанавливается путем сведения к операторным уравнениям, для разрешимости которых применяется принцип сжимающих отображений. Для разрешимости исходной системы термовязкоупругости устраивается итерационный процесс, заключающийся в последовательном решении вспомогательных задач. Подходящие априорные оценки дают сходимость последовательных приближений на достаточно малом временном промежутке. Докозательство существенным образом опирается на результаты L. Consiglieri о разрешимости соответствующей системы Навье – Стокса – Фурье.

Ключевые слова: уравнение Навье – Стокса – Фурье; модель Олдройда; термовязкупругость; сильное решение; неподвижная точка.

Введение

В ограниченной области $\Omega \subset R^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$ рассматривается начально-граничная задача

$$\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mathrm{Div}[\mu(\theta)\mathcal{E}(v)]+\nabla p = = f+\mu_0\mathrm{Div}\int_0^t[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds, \mathrm{div}\, v=0 \text{ на } Q_T=[0,T]\times\Omega; \tag{1}$$

$$\partial\theta/\partial t+v_i\partial\theta/\partial x_i-\mathrm{Div}[k(\theta)\nabla\theta]=\mu(\theta)|\mathcal{E}(v)|^2+ +\mu_0\mathcal{E}(v):\int_0^t[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds+g \text{ на } Q_T; \tag{2}$$

$$v|_{t=0}=v^0 \text{ на } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{3}$$

$$\theta|_{t=0}=\theta^0 \text{ на } \Omega; \quad \theta|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{4}$$

Здесь $v=(v_1,v_2)$ и θ скорость и температура среды соответственно, p – давление, μ – вязкость, k – коэффициент теплопроводности, μ_0, μ – коэффициенты, характеризующие вязкоупругие свойства среды, f и g заданные силы и источники тепла соответственно. Далее, $\mathcal{E}(v)$ – матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}=\frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i)$ – тензор скоростей деформаций, $A:B=a_{ij}b_{ij}$ для матриц A и B, $|A|^2=A:A$.

При $\mu_0 = 0$ система (1) – (4) является системой Навье – Стокса – Фурье. В этом случае в [1] установлена нелокальная сильная разрешимость системы $(1)-(4)$ при некоторых условиях малости на коэффициенты уравнений. В случае $\mu_0 > 0$ в [2] установлена нелокальная слабая разрешимость системы $(1)-(4)$.

Задача (1), (3) изучалась в [4, 5], где установлена нелокальная сильная и слабая разрешимость.

Наша цель состоит в доказательстве сильной разрешимости системы (1) – (4) при $\mu_0 > 0$ на промежутке $[0, T]$, зависящем от данных задачи.

1. Обозначения и определения

Нормы в $L_2(\Omega)$, $W_2^r(\Omega)$, $L_2(Q_T)$, $W_2^{m,k}(Q_T)$ обозначаются как $|\cdot|_0$, $|\cdot|_r$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_{m,k}$ соответственно, $v_x = \{\partial v_i/\partial x_j\}_{i,j=1}^2$. Нам будет удобно понимать $W_2^{m,k}(Q_T)$ как $W_2^k(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_2^m(\Omega))$.

Мы обозначаем через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ замыкание гладких финитных в Ω функций в норме $|\cdot|_1$, $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для функций со значениями в R^2 соответствующие пространства помечаются значком (2) сверху справа. Символы $\|\cdot\|_{m,k}$ и т.д. используются как в векторном, так и в скалярном случае. Для функций переменной t со значениями в каком-нибудь банаховом пространстве v' означает dv/dt.

Ниже H и V являются замыканиями множества гладких финитных соленоидальных в Ω функций по норме $|\cdot|_0$ и $|\cdot|_1$ соответственно. Оператор ортогонального проектирования в $L_2(\Omega)$ на H обозначается через $\mathcal{P}$.

2. Формулировка результата

Ниже предполагаются выполненными следующие условия:

1) $\mu, k \in C(-\infty, \infty)$, причем

$$0 < \mu_0 \le \mu(s) \le \mu_1, |\mu'(s)| \le \mu_2, s \in (-\infty, \infty); \tag{5}$$

$$0 < k_0 \le k(s) \le k_1, |k'(s)| \le k_2, s \in (-\infty, \infty); \tag{6}$$

2) $v^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)^{(2)} \cap V$, $\theta^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)$,

$$\nabla v^0 \cdot n = 0, \nabla \theta^0 \cdot n = 0 \text{ на } Q_T, \tag{7}$$

где n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Определение 1. *Сильным решением задачи (1)-(4) называется пара (v, θ), где*

$$v \in W_1 = W_2^1(0,T;H) \cap L_2(0,T;W_{2,0}^2(\Omega)^{(2)} \cap H) \tag{8}$$

$$\theta \in W_2 = W_2^1(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_{2,0}^2(\Omega)) \tag{9}$$

такая, что выполняются уравнения

$$\begin{gathered} \partial v/\partial t + \mathcal{P} v_i \partial v/\partial x_i - \mathcal{P}\mathrm{Div}(\mu_0 \mathcal{E}) = \\ \mathcal{P} f + \mu_2 \mathcal{P}\mathrm{Div}(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds \end{gathered} \tag{10}$$

и (2) *при п.в.* t *и условия* $(3), (4)$.

Функция p из уравнения (1) восстанавливается через v обычным образом с помощью теоремы де Рама (см. [3]).

Далее, говоря о решении задачи (1) – (4), будем иметь в виду сильное решение.

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in W_2^1(0,T:H)$, $v^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)^{(2)} \cap H$, $g \in W_2^1(0,T:L_2(\Omega))$, $\theta^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)$. *Пусть* μ_2 *и* k_2 *из (5) и (6) достаточно малы. Тогда задача* (1) – (4) *имеет единственное решение при достаточно малом* $T>0$.

Непосредственно доказательство теоремы производится в разделе 5. В следующем разделе даются вспомогательные результаты.

3. Вспомогательные результаты

Доказательство теоремы 1 проведем в ряд этапов.

Рассмотрим сначала задачу

$$L_1(v) := \partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu(\theta)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = f - \mu_0 \mathrm{Div} \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)ds, \tag{11}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{12}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \tag{13}$$

при фиксированном θ.

Установим однозначную разрешимость этой задачи. Положим

$$w = f - \mu_0 \mathrm{Div} \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)ds \tag{14}$$

и перепишем (11) в виде

$$L_1(v) := w, \tag{15}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{16}$$

Рассмотрим сначала задачу (15) – (16) при произвольной w.

Лемма 1. *Пусть* $w \in W_2^1(0,T;H)$. *Тогда задача (15) – (16) однозначно разрешима, и справедлива оценка*

$$\|v\|_{2,0} + \sup_{0\le t\le T} |v(t,x)|_1 \le M_1(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{17}$$

$$\|v_x\|_{L_4(Q_T)} \le M_2(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{18}$$

$$\|v'\|_{L_4(Q_T)} \le M_3(\|w\|_{1,0} + |v^0|_2). \tag{19}$$

Здесь $M_i = \Phi_i(\|\theta\|_{W_4^{1,1}}(Q_T))$, *а* $\Phi_i(s)$ *– некоторые монотонные функции от* s.

Доказательство. Доказательство леммы 1 см. [1].

Обозначим через $L_1^{-1}(w)$ оператор, ставящий в соответствие $w \in W_2^1(0,T:H) := W$ решение v задачи (15) – (16).

Используя L_1^{-1}, перепишем (14) в виде

$$w = K(w), \tag{20}$$

$$K(w) = f + \mu_0 \mathcal{P}\mathrm{Div} \int_0^t \mathcal{E}(L_1^{-1}(w))(s,x)ds := f + K_0(w). \tag{21}$$

Установим разрешимость уравнения (20). Зададим в W_1 эквивалентную норму

$$]w[= q\|w^{'}\|_0 + \|w\|_0, 0 < q < 1. \tag{22}$$

Рассмотрим шар $B(R) = \{w :]w[\leq R\}$, $R > 0$.

Лемма 2. *Найдутся такие достаточно большое $R > 0$ и достаточно малые $T > 0$ и $q > 0$, что оператор K переводит в себя $B(R)$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что в силу ограниченности оператора $\mathcal{P}$ и соотношения $\mathrm{Div}\,\mathcal{E}(v) = \triangle\, v$ ($\triangle$ – оператор Лапласа)

$]K(w)[\leq]f[+]K_0(w)[\leq M\|f\|_{1,0} + q\|\triangle L_1^{-1}(w)\|_0 + \| \int_0^t \triangle L_1^{-1}(w)ds\|_0$.

Из (17) следует, что

$$\|\triangle L_1^{-1}(w)\|_0 \leq M_1(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{23}$$

С помощью неравенства Коши и (17) получаем

$$\| \int_0^t \triangle L_1^{-1}(w)ds\|_0 \leq T^{\frac{1}{2}}\|\triangle L_1^{-1}(w)ds\|_0 \leq T^{\frac{1}{2}} M_1(\|w\|_0 + |v^0|_1). \tag{24}$$

Из (17), (22) и (24) вытекает неравенство

$$]K(w)[\leq M\|f\|_{0,1} + M_1\|w\|_0(q + T^{\frac{1}{2}}) + T^{\frac{1}{2}} M_1|v^0|_1. \tag{25}$$

Из (25) следует, что при $w \in B(R)$

$$]K(w)[\leq M\|f\|_{0,1} + M_1 R(q + T^{\frac{1}{2}}) + T^{\frac{1}{2}} M_1|v^0|_1.$$

Выбирая $R > 0$ достаточно большим, а q и T_0 достаточно малыми, получаем, что при $0 < T < T_0$

$$]K(w)[\leq R, w \in B(R). \tag{26}$$

Таким образом, оператор K переводит $M(R)$ в себя.

Введем в шаре $B(R)$ метрику

$$\rho(w^1, w^2) = \|w^1 - w^2\|_0 \tag{27}$$

и рассмотрим его как метрическое пространство, обозначив $M(R)$.

Покажем, что $M(R)$ является полным метрическим пространством.

Действительно, пусть последовательность $w^n \in M(R)$, $n = 1, 2, ...$ и является фундаментальной по метрике (27). В силу полноты $L_2(0,T;H)$ существует $w^0 = \lim\limits_{n\to\infty} w^n$, $w^0 \in L_2(0,T;H)$. Покажем, что $w^0 \in M(R)$.

Так как $w^n \in M(R)$, то $\|dw^n/dt\|_0$ равномерно ограничена, а поэтому последовательность dw^n/dt слабо компактна в гильбертовом пространстве $L_2(0,T;H)$, и, следовательно, w^n слабо сходится к $z \in L_2(0,T;H)$.

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^T dw^n/dt\varphi\, dt = -\int_0^T w^n d\varphi/dt\, dt \tag{28}$$

при любой гладкой финитной на $[0,T]$ функции $\varphi : [0,T] \to H$.

Переходя к пределу в (28), получаем, что

$$\int_0^T z\varphi\, dt = -\int_0^T w^0 d\varphi/dt\, dt.$$

Отсюда следует, что $z = dw^0/dt$, и, следовательно, $w^0 \in M(R)$.

Полнота $M(R)$ установлена. □

Лемма 3. *Пусть R, T_0 и q таковы, что справедливо (26). Тогда найдется такое $T < T_0$, что при всех $w^1, w^2 \in M(R)$ имеет место неравенство*

$$\|K(w^1) - K(w^2)\|_0 \le q_0\|w^1 - w^2\|_0$$

при некотором $q_0 \in (0,1)$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_0 \le q_0\|w^1 - w^2\|_0, 0 < q_0 < 1. \tag{29}$$

Обозначим $v^i = L_1^{-1}(w^i), i = 1, 2$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered}\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_0 = \|\textstyle\int_0^t(\triangle L_1^{-1}(w^1) - \triangle L_1^{-1}(w^2))\, ds\|_0 = \\ = \|\textstyle\int_0^t \triangle(v^1 - v^2)\, ds\|_0 \le T^{\frac{1}{2}}\|\triangle(v^1 - v^2)\|_0.\end{gathered} \tag{30}$$

Обозначим $w = w^1 - w^2$, $v = v^1 - v^2$, $p = p^1 - p^2$. Очевидно, что

$$\begin{gathered}\widehat{L}_1(0) := \partial v/\partial t - \mathrm{Div}\,[\mu(\theta)\,\mathcal{E}(v)] - \nabla p = w - v_i\partial v^1/\partial x_i - v_i^2\partial v/\partial x_i, \\ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{31}$$

$$v(0) = 0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{32}$$

Оператор $\widehat{L}_1$, порожденный задачей (31) – (32), проще оператора L_1, поскольку в $\widehat{L}_1$ отсутствуют конвективные слагаемые. Поэтому определен оператор $\widehat{L}_1^{-1}$, обладающий всеми свойствами оператора L_1^{-1}. В частности, для $u(t) = \widehat{L}_1^{-1}(\varphi)$ из (17) вытекает неравенство

$$\|v\|_{2,0} + \sup_t |v(t)|_1 \le M_1\|\varphi\|_0. \tag{33}$$

Отсюда следует, что для задачи (31) – (32) справедливо неравенство

$$\|v\|_{2,0} + \sup_t |v(t)|_1 \le M_1(\|w\|_0 + \|v_i\partial v^1/\partial x_i\|_0 + \|v_i^2\partial v_i/\partial x_i\|_0) = M_1(\|w\|_0 + I_1 + I_2). \tag{34}$$

Используя стандартные рассуждения (см. напр. [3]), получаем

$$|v_i\partial v^1/\partial x_i|_0 \le M\|v\|_{L_4(\Omega)}\|\partial v^1/\partial x\|_{L_4(\Omega)} \le M|v|_1\|v_x^1\|_{L_4(\Omega)}, \tag{35}$$

$$\begin{gathered}|v_i^2\partial v/\partial x_i|_0 \le M\|v^2\|_{L_4(\Omega)}\|\partial v/\partial x\|_{L_4(\Omega)} \le \\ M\|v^2\|_{L_4(\Omega)}|v|_2^{1/2}|v|_1^{1/2} \le \varepsilon|v|_2 + M_\varepsilon|v|_1\|v^2\|^2_{L_4(\Omega)}.\end{gathered} \tag{36}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число.

Из оценок (35) – (36) вытекает, что

$$I_1^2 + I_2^2 \le \varepsilon\|v\|^2_{2,0} + M_{\mathcal{E}}\int_0^T |v(x,t)|_1^2(\|v_x^1(t,x)\|^4_{L_4(\Omega)} + \|v^2(t,x)\|)^4_{L_4(\Omega)})\, dt. \tag{37}$$

Воспользуемся теперь неравенствами (34) и (36). Отметим, что они установлены на $[0,T]$. Очевидно, что они верны и на $[0,s] \subset [0,T]$. Поэтому при малом $\varepsilon > 0$ из (37) следует, что справедливо интегральное неравенство

$$|v(s)|_1^2 \leq M_1^2\|w\|_0^2 + M_\varepsilon \int_0^s (\|v_x^1(t,x)\|_{L_4(\Omega)}^4 + \|v^2(t,x)\|_{L_4(\Omega)}^4)|v(x,t)|_1^2\,dt.$$

Из этого интегрального неравенства в силу (18) вытекает

$$|v(s)|_1^2 \leq M_4\|w\|_0, 0 \leq s \leq T, \tag{38}$$

где $M_4 = \Phi_4(\|\theta\|_{W_4^{1,1}(Q_T)})$.

Из оценок (34) – (36), (38) вытекает, что

$$\|v\|_{2,0} \leq M_5\|w\|_0, \tag{39}$$

где $M_5 = \Phi_5(\|\theta\|_{W_4^{1,1}(Q_T)})$. Здесь $\Phi_4(s)$ и $\Phi_5(s)$ монотонные непрерывные функции от s.

Воспользовавшись (30) и (39), получаем

$$\|K_0(w^1) - K_0(w^2)\|_0 \leq M_5 T^{\frac{1}{2}}\|\triangle(w^1 - w^2)\|_0.$$

Выбирая $T < T_0$ достаточно малым, получаем (29) с некоторым $q_0 \in (0,1)$.

Лемма 3 доказана.

Из лемм 2 и 3 в силу принципа сжимающих отображений вытекает однозначная разрешимость уравнения (20). □

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 задача (11) – (13) однозначно разрешима при достаточно малом T, и для решения v справедливы оценки* (17) − (19).

Доказательство. Обозначим через w_* решение уравнения (20). Нетрудно видеть, что $v = L_1^{-1}(w_*)$ является решением задачи (11) – (13), а из леммы 1 вытекает справедливость оценок (17) – (19).

Теорема 2 доказана. □

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\partial\theta/\partial t + v_i\partial\theta/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[k(\theta)\nabla\,\theta] = g + \mu(\xi)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \\ + \mu_0\mathcal{E}(v) : \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds,\end{gathered} \tag{40}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{41}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Пусть $\xi \in W_4^{1,1}(Q_T)$, а v – решение задачи (11) – (13). Тогда задача (40) – (41) имеет единственное решение θ, и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{2,1} + \|\theta'\|_{L_4(Q_T)} + \|\theta\|_{W_4^{1,1}(Q_T)} \leq M_6, \tag{42}$$

где $M_6 = \Phi_6(\|f\|_{0,1}, \|g\|_{0,1}, |v^0|_2, |\theta^0|_2, \|\xi\|_{W_4^{1,1}(Q_T)})$, а $\Phi_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ – монотонная непрерывная функция своих аргументов.

Доказательство. Доказательство теоремы 3 при $\mu_0 = 0$ дано в [1]. При $\mu_0 > 0$ правая часть уравнения (2) содержит дополнительное слагаемое $\mu_0\mathcal{E}(v) : \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)ds$, которое лучше слагаемого $\mu(\xi)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)$ и также не зависит от θ.

Поэтому доказательство теоремы 3 для случая $\mu_0 = 0$ проходит и для случая $\mu_0 > 0$ с несущественными дополнениями. □

4. Доказательство теоремы 3

Пусть $K = \{\xi : \xi \in W_4^{1,1}(Q_T), \nabla\xi|_{t=0} = \nabla\theta^0, \|\xi\|_{W_4^{1,1}(Q_T)} \leq R_0\}$.

Построим оператор $\mathcal{L} : K \to W_4^{1,1}(Q_T)$.

Поставим в соответствие $\xi \in K$ решение v^ξ задачи (11) – (13) при $\theta = \xi$. Затем поставим в соответствие v^ξ решение θ задачи (40) при $v = v^\xi$, так что $v = \mathcal{L}\xi$.

Очевидно, что для разрешимости задачи (1) – (4) достаточно найти неподвижную точку оператора $\mathcal{L}$.

При $\mu_0 = 0$ в [1] показано, что оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям принципа Шаудера о неподвижной точке. При этом доказательство опирается на теоремы 2 и 3 о разрешимости соответствующих задач при $\mu_0 = 0$.

Там же установлено, что решение единственно. Отметим, что в случае $\mu_0 = 0$ утверждение теоремы 2 справедливо при любом $T > 0$.

При $\mu_0 > 0$ ситуация отличается от случая $\mu_0 = 0$ лишь ограничением на малость T. Само же доказательство существования неподвижной точки $\mathcal{L}$ и единственности решения остается таким же, как и для $\mu_0 = 0$.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что продолжению решения задачи (11) – (13) на больший промежуток препятствует отсутствие оценки на $|v(T,x)|_2$ (аналогично условию $v^0 \in W_{2,0}^2(\Omega)^2 \cap H$) и «рост» по t интегрального слагаемого.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №13-01-0041.

Литература

1. Consiglieri, L. Weak Solution for a Class of Non-Newtonian Fluids with Energy Transfer / L. Consiglieri // J. Math. Fluid, Mech. – 2000. – V. 2. – P. 267–293.

2. Орлов, В.П. Об одной задаче динамики термовязкоупругости среды типа олдройта / В.П. Орлов, М.И. Паршин // Известия ВУЗов. Математика. – 2014. – № 5. –С. 68–74.

3. Темам, Р. Уравнение Навье – Стокса / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

4. Агранович, Ю.Я. Исследование математических моделей вязкоупругих жидкостей / Ю.Я. Агранович, П.Е. Соболевский // Доклады АН УССР. Серия А. – 1989. – № 10. – С. 71–74.

5. Агранович, Ю.Я. Исследование слабых решений модели Олдройда вязкоупругой жидкости / Ю.Я. Агранович, П.Е. Соболевский // Качественные методы исследования операторных уравнений. – Ярославль, 1991. – С. 39–43.

Владимир Петрович Орлов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математическое моделирование», Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), orlov_vp@mail.ru.

Максим Игоревич Паршин, аспирант, кафедра «Математическое моделирование», Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), parshin_maksim@mail.ru.

Поступила в редакцию 3 января 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 3, pp. 69–76.

MSC 90C30 DOI: 10.14529/mmp140307

On the Strong Solutions in an Oldroyd-Type Model of Thermoviscoelasticity

V.P. Orlov, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, orlov_vp@mail.ru,
M.I. Parshin, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation,
parshin_maksim@mail.ru

For the initial-boundary value problem in a dynamic Oldroyd-type model of thermoviscoelasticity, we establish the local existence theorem for strong solutions in the planar case. The continuum under consideration is a plane bounded domain with sufficiently smooth boundary. The corresponding system of equations generalizes the Navier–Stokes–Fourier system by having an additional integral term in the stress tensor responsible for the memory of the continuum. In our proof, we study firstly the initial-boundary value problem for an Oldroyd-type viscoelasticity system with variable viscosity. Then we consider the initial-boundary value problem for the equation of energy conservation with a variable heat conductivity coefficient and an integral term. We establish the solvability of these problems by reducing them to operator equations and applying the fixed-point theorem. For the original thermoviscoelasticity system, we construct an iterative process consisting in a consecutive solution of auxiliary problems. Suitable a priori estimates ensure that the iterative process converges on a sufficiently small interval of time. The proof relies substantially on Consiglieri's results on the solvability of the corresponding Navier – Stokes – Fourier system.

Keywords: Navier – Stokes equation; Oldroyd-type model; thermoviscoelastic; strong solutions; fixed point.

References

1. Consiglieri L. Weak Solution for a Class of Non-Newtonian Fluids with Energy Transfer. *J. Math. Fluid, Mech.,* 2000, vol. 2, pp. 267–293. DOI: 10.1007/PL00000952
2. Orlov V.P., Parshin M.I. On One Problem of Dynamics of Thermoviscoelastic Medium of Oldroyd Type. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 5, pp. 57–62. DOI: 10.3103/S1066369X14050089
3. Temam R. *Navier – Stokes Equations.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1977.
4. Agranovich Yu.Ya., Sobolevskii P.E. [Research of Mathematical Models of Viscoelastic Liquids]. *Dokl. Akad. Nauk UkrSSR. Series A*, 1989, no. 10, pp. 71–74.
5. Agranovich Yu.Ya., Sobolevskii P.E. [Research of Weak Solutions of Model of Oldroyd of Viscoelastic Liquid]. *Kachestvennye metody issledovaniya operatornykh uravneniy* [Qualitative Methods of Research of the Operator Equations], Yaroslavl, 1991, pp. 39–43. (in Russian)

Received January 3, 2014