УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp140308

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОСТИ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Л.В. Стенюхин

В нелинейной постановке достаточно хорошо изучены равновесные устойчивые и неустойчивые формы малых капель в поле силы тяжести. Эти формы являются решениями известного уравнения капиллярности и находятся итерационными методами в виде рядов. Если размер капли достаточно большой, или изнутри на нее воздействует потенциал, то нарушается сходимость приближенных решений. При этом полученные решения начинают противоречить физическим экспериментам. Разрешимость капиллярного уравнения доказана Н.Н. Уральцевой.

При воздействии потенциала происходят перестройки поверхности. Описание особых состояний поверхности с помощью уравнения капиллярности осложнено структурой этого и соответствующего линеаризованного уравнений. С другой стороны, задача капиллярности вариационная. Основным слагаемым энергетического функционала является функционал площади, который исследовался в работах А.Т. Фоменко, А.Ю. Борисовича, Л.В. Стенюхина в связи с задачей о минимальных поверхностях. Исследованию экстремалей подобных нелинейных функционалов в банаховых и гильбертовых пространствах посвящены работы Ю.И. Сапронова, Б.М. Даринского, С.Л. Царева, Г.А. Свиридюка и других математиков. В результате, в настоящей работе получены достаточные условия существования особых решений задачи капиллярности при воздействии внешнего потенциала в терминах вариационности задачи и нормального расслоения возмущений. Приведен пример, в котором построена новая редукция капиллярного уравнения вблизи центра симметрии капли. Найдены критические значения параметра, зависящего от числа Бонда, установлена аналитическая форма решения.

Ключевые слова: задача капиллярности; число Бонда; бифуркация; особое решение.

1. Постановка задачи и комментарии к предмету исследования

Рассмотрим связную каплю жидкости заданного объема V, лежащую на горизонтальной плоскости П в поле силы тяжести, направленном вертикально вниз. Предположим, что материал жидкости однороден, так что угол контакта жидкости с плоскостью γ постоянен, $0 \leq \gamma \leq \pi$. Как показал H.C. Wente [1], при этих условиях равновесная поверхность будет поверхностью вращения с осью перпендикулярной плоскости П.

Задача о лежащей малой капле на поверхности является следствием минимизации следующих энергий:
1) энергии поверхностного натяжения;
2) потенциальной энергии силы тяжести;
3) энергии объемных связей (постоянства объема V).
Полная энергия определяется функционалом

$$E(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\Omega} \Upsilon \rho u\, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u\, dx,$$

E, G, F – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, σ – поверхностное натяжение, Υ – потенциальная энергия на единицу массы, ρ – плотность, λ – множитель Лагранжа, отвечающий за объем.

В точках верхней части свободной поверхности P капли высота $u(x,y)$ поверхности P над Π удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\, Tu = \chi u + \lambda, \tag{1.1}$$

где

$$Tu = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u,\ \nabla u = (u_x, u_y), \tag{1.2}$$

$\chi = \frac{\rho g}{\sigma}$. Для нижней части свободной поверхности знак $\operatorname{div}\, Tu$ надо заменить на обратный. Граничное условие задачи с постоянным углом контакта γ имеет вид

$$\overline{n}\ Tu = \cos\gamma, \tag{1.3}$$

$\overline{n}$ – единичная нормаль.

Замена $u = -v - (1/\chi)\lambda$ переводит уравнение (1.1) в уравнение

$$\operatorname{div}\, Tv = \chi v, \tag{1.4}$$

которое является уравнением свободной поверхности в капиллярной трубке. Каждому уравнению (1.1) с высотой капли в центре u_0 соответствует решение уравнения (1.4) с высотой подъема жидкости в центре $v_0 = -(u_0 + \lambda/\chi)$. В [2] показано, что симметричные решения уравнения (1.4) однозначно определяются высотой подъема жидкости в центре. Поэтому, каждой симметрично лежащей капле отвечает единственная капиллярная поверхность, которая (локально) геометрически конгруэнтна границе капли. Обратно, каждой симметричной капиллярной поверхности соответствует лежащая капля, определенная с точностью до аддитивной константы.

Множество всех симметричных капиллярных поверхностей является однопараметрическим семейством с параметром центральной высоты u_0 поверхности. Из принципа соответствия вытекает, что множество всех симметрично лежащих капель может быть описано с помощью однопараметрического семейства кривых.

С учетом вышеизложенного, уравнение (1.1) можно записать в безразмерной форме

$$\operatorname{div}\, Tu = Bu, \tag{1.5}$$

B – число Бонда, $B = \frac{\rho g a^2}{\sigma}$, характеризующее размер конфигурации. Граничное условие (1.3) остается.

2. Явное решение в частном случае

В [2] показано, что для симметрично лежащей капли, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ и малого числа Бонда B, уравнение (1.5) можно записать так

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = Bu - 2\sin\gamma_0. \tag{2.1}$$

Решение ищется на круге Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$ и капля постоянного объема V_0. Если капля подвергается воздействию внешнего потенциала φ, то

$$V_0 = \frac{\pi(2+\cos\gamma_0)(1-\cos\gamma_0)^2}{3\sin^3\gamma_0}, \tag{2.2}$$

$$\cos\gamma_0 = \cos\gamma + \frac{\varphi}{\sigma}. \tag{2.3}$$

Потенциал φ может быть, например, температурой вещества капли или давлением, воздействующим изнутри капли, либо температурой и давлением одновременно. Действие потенциала приводит к изменению формы капли, в частности, к изменению угла контакта с плоскостью П, (2.3). При этом γ_0 является единственным решением уравнения (2.2). Дальнейшее воздействие потенциала φ приведет к изменению числа Бонда B и к перестройке (бифуркации) самой капли.

Для описания дальнейших состояний капли положим в уравнении (2.1) $B = 0$.

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях и* $B = 0$, *существует точное решение уравнения (2.1)*

$$u_0 = \frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1 - r^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}. \tag{2.4}$$

Решение (2.4) проверяется непосредственной проверкой. Это решение послужит отправной точкой для отыскания дальнейших состояний капли, подверженной воздействию потенциала φ.

3. Кольцеобразные решения

Для ненулевых чисел B положим, что решение уравнения (2.1) примет вид

$$u = \frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1 - (r - r_0)^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}, \tag{3.1}$$

r_0 – радиус кольца по центру, $|r - r_0| \le 1$.

Непосредственным вычислением получим, что функция (3.1) является точным решением уравнения

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{r_0\sin\gamma_0}{r} - 2\sin\gamma_0 \tag{3.2}$$

с нулевым граничным условием.

Найдем условия, при которых задача (3.2) эквивалентна задаче (2.1). Для этого

$$Bu = \frac{r_0\sin\gamma_0}{r}, \tag{3.3}$$

то есть

$$\frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1 - (r - r_0)^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0} = \frac{r_0\sin\gamma_0}{Br}. \tag{3.4}$$

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\left(1 + \frac{\sin^2\gamma_0}{B^2r^2}\right)r_0^2 - 2\left(r - \frac{\cos\gamma_0}{Br}\right)r_0 + r^2 - 1 = 0. \tag{3.5}$$

Разрешим уравнение (3.5) относительно r_0, как гарант кольцеобразного состояния.

$$D_1 = \left(\frac{\cos\gamma_0}{B} - 1\right)^2 + \frac{1 - r^2}{B^2r^2}. \tag{3.6}$$

В решении (2.4) безразмерного уравнения (2.1) полярная координата r меняется в пределах $0 \le r \le 1$, значит, с увеличением потенциала φ, у деформированной капли значение $r = 1$ тоже существует. Равенство нулю выражения (3.6) для $r = 1$ порождает условие

$$B = \cos\gamma_0. \tag{3.7}$$

Таким образом, получается следующая

Теорема 2. *Если выполнено условие (3.7), то существует точное аналитическое решение задачи (2.1) типа (3.1) с граничным условием (1.3).*

4. Редукция из функционала площади

Рассмотрим основной энергетический функционал задачи

$$E(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\Omega} \Upsilon \rho u\, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u\, dx. \tag{4.1}$$

Его первое слагаемое является функционалом площади. Пусть u_0 – экстремаль (4.1). Близкие к u_0 поверхности будем задавать в системе координат нормального расслоения к u_0. Это приведет к одному скалярному уравнению для близкой поверхности:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta u}(u_0 + \eta \bar{n}), \bar{n} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta) = 0, \tag{4.2}$$

где $\frac{\delta S}{\delta u}$ – функциональная производная функционала площади, $\bar{n}$ – нормаль к поверхности u_0. Из уравнения (4.2) определяется нормальная координата $\eta = \eta(x, y)$.

Теорема 3. *Функционал площади близких к u_0 поверхностей $S(\eta)$ и его оператор Эйлера $\frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta)$ имеет следующую аналитическую структуру*

$$S(\eta) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dxdy, \tag{4.3}$$

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\eta) = E^3 (EG - F^2)^{-\frac{3}{2}} (A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G). \tag{4.4}$$

Здесь E, G, F – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности,

$$A = \sum_{p=1}^{6} a_{ijk} \eta_x^i \eta_x^j \eta^k + 1,\ B = \sum_{p=1}^{6} b_{ijk} \eta_x^i \eta_y^j \eta^k,\ C = \sum_{p=1}^{6} c_{ijk} \eta_y^i \eta_y^j \eta^k + 1,$$

$$G = \sum_{p=2}^{7} g_{ijk} \eta_x^i \eta_y^j \eta^k + g\eta,$$

где i, j, k – целые неотрицательные числа, $p = i + j + k$. Все коэффициенты $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, g_{ijk}, g$ – являются аналитическими функциями и находятся по формулам, подобным следующей

$$g = (\bar{n}, \bar{n}_{xx} + \bar{n}_{yy}) + \frac{4}{E} \left[(\bar{n}, u_{xx})^2 + (\bar{n}, u_{yy})^2 \right]. \tag{4.5}$$

Линейная часть оператора (4.4) равна

$$L\eta = \Delta \eta + g\eta, \tag{4.6}$$

где Δ – лапласиан.

Таким образом, линеаризованная задача, порожденная функционалом (4.1), имеет следующий вид:

$$\Delta\eta = -g\eta + E^{-3}(EG - F^2)^{3/2}(B\eta + \lambda), \tag{4.7}$$

с нулевыми граничными условиями для η, B – число Бонда. Перестройки состояний капли под действием внешних сил определяются спектром этой задачи.

5. Пример из параграфа 2

Рассмотрим задачу (2.1) – (2.3). Функция (2.4) является ее решением при нулевых чиселах Бонда. Задача (4.7) в данном случае имеет вид

$$\Delta\eta = \left(\frac{\sqrt{(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^3}}{(1-y^2\sin^2\gamma_0)^3}B - g\right)\eta + \left(\frac{\sqrt{(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^3}}{(1-y^2\sin^2\gamma_0)^3}\right)\lambda\,, \tag{5.1}$$

$$g = \frac{\sin^4\gamma_0(3x^2+3y^2-3x^2y^2\sin^2\gamma_0+3x^3y\sin^2\gamma_0+y(x+y)(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0))}{(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^5}+$$

$$+\frac{4\sin^2\gamma_0(1+(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^2)}{(1-y^2\sin^2\gamma_0)(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^2}\,,$$

$$\eta|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь Ω – единичный двумерный диск.

На малом диске $\Omega_1 = \{x^2+y^2 \le \varepsilon\}$ около центра области Ω

$$g = 8\sin^2\gamma_0 + o(x,y),$$

и задача (5.1) соответствует задаче

$$\Delta\eta = (B - 8\sin^2\gamma_0)\eta + \lambda, \tag{5.2}$$

$$\eta|_{\partial\Omega_1} = 0.$$

В результате получается следующая

Теорема 4. *Если*

$$B - 8\sin^2\gamma_0 = \mu_k, \tag{5.3}$$

μ_k – собственное значение лапласиана Δ на области Ω_1, то капиллярная поверхность вблизи начала координат задается функцией

$$u_k = u_0 + \varepsilon e_k, \tag{5.4}$$

где u_0 – функция (2.4), e_k – собственная функция, отвечающая собственному значению μ_k.

Литература

1. Wente, H.C. The Symmetry of Sessile and Pendent Drops / H.C. Wente // Pasific Journal of Mathematics. – 1980. – V. 88, № 2. – P. 387–397.
2. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория / Р. Финн; под. ред. А.Т. Фоменко. – М.: Мир, 1989. – 310 с.

3. Сапронов, Ю.И. Моделирование диффузорных течений жидкости посредством редуцированных уравнений / Ю.И. Сапронов // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2012. – №27 (286), вып. 12. – С. 82–93.

4. Даринский, Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов/ Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – Т. 12. – С. 3–140.

5. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1993. – Т. 57, №3. – С. 192–207.

6. Ниренберг, Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М.: Мир, 1977. – 232 с. – (Серия: Математика. Новое в зарубежной науке, №5).

7. Стенюхин, Л.В. Об особых решениях задачи капиллярности с круговой симметрией / Л.В. Стенюхин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – №2. – С. 242–245.

8. Стенюхин, Л.В. О минимальных поверхностях с ограничениями типа неравенств / Л.В. Стенюхин // Известия вузов. Математика. – 2012. – №11. – С. 51–59.

9. Борисович, А.Ю. Оператор Плато и бифуркации двумерных минимальных поверхностей / А.Ю. Борисович // Глобальный анализ и математическая физика. – Воронеж, 1987. – С. 142–155.

Леонид Витальевич Стенюхин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Высшая математика», Воронежский государственный архитектурно-строительный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), stenyuhin@mail.ru.

Поступила в редакцию 16 мая 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 3, pp. 77–83.

MSC 90C30 **DOI: 10.14529/mmp140308**

Bifurcation Analysis of a Capillarity Problem with Circular Symmetry

L.V. Stenyukhin, Voronezh State Architectural and Construction University, Voronezh, Russian Federation, stenyuhin@mail.ru

Both stable and unstable equilibrium shapes of small drops under gravity are well understood in the nonlinear formulation. These shapes are solutions to the capillarity equation, which we can find in series form using iterative methods. If the droplet is sufficiently large, or a potential acts inside it, then the convergence of the approximate solutions breaks down. In this case the solutions contradict physical experiments. The solvability of the capillary equation was proved by Uraltseva.

The surface adjusts under the action of a potential. The description of special states of the surface using the capillarity equation is complicated by the structure of this equation and its linearization. On the other hand, the capillarity problem is variational. The main term of the energy functional is the area functional studied by Fomenko, Borisovich, and Stenyukhin in connection with minimal surfaces. Sapronov, Darinskii, Tsarev, Sviridyuk, and other authors explored the extremals of similar nonlinear functionals on Banach and Hilbert spaces. As a result, in this paper we obtain sufficient conditions for the existence of special solutions to the capillary problem under the influence of external potential in terms of variational problems and normal bundle of perturbations. In an example we construct a new reduction of the capillarity equation near the center of symmetry of the drop. We find the critical value of the parameter, which depends on the Bond number, and determine the analytic form of the solution.

Keywords: capillarity problem; Bond number; bifurcation; special solution.

References

1. Wente H.C. The Symmetry of Sessile and Pendent Drops. *Pasific Journal of Mathematics*, 1980, vol. 88, no. 2, pp. 387–397. DOI: 10.2140/pjm.1980.88.387
2. Finn R. *Equilibrium capillary surface. Mathematical theory. Edited by A.T Fomenko.* Moscow, Mir, 1989. 310 p.
3. Sapronov Yu.I. About Modelling Diffuser Currents of Liquid by Means of Reduced Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2012, no. 27 (286), pp. 82–93. (in Russian)
4. Darinskii B.M., Sapronov Yu.I., Tsarev S.L. Bifurcations of Extremals of Fredholm Functionals. *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 145, no. 6, pp. 5311–5453. DOI: 10.1007/s10958-007-0356-2
5. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics,* 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601–614. DOI: 10.1070/IM1994v042n03ABEH001547
6. Nirenberg L. *Topics in Nonlinear Functional Analysis.* American Mathematical Soc., 1974. 145 p.
7. Stenyukhin L.V. On Special Solutions of the Capillary with Circular Symmetry. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika* [Proceedings of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2012, no. 2, pp. 242–245. (in Russian)
8. Stenyukhin L.V. Minimal Surfaces with Constraints of Inequality Type. *Russian Mathematics*, 2012, no. 11, pp. 45–51. DOI: 10.3103/S1066369X12110047
9. Borisovich A.Yu. Plateau Operator and Bifurcations of Two-Dimensional Minimal Surfaces. *Global'nyy analiz i matematicheskaya fizika* [Global Analysis and Mathematical Physics], Voronezh, 1987, pp. 142–155. (in Russian)

Received May 16, 2014