УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp150212

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Н.А. Манакова

В связи с большим количеством приложений на первый план выходит вопрос о численном решении задач оптимального управления. В случае нелинейного уравнения состояния поиск численного решения задачи оптимального управления значительно затрудняется. Одним из подходов к решению данной проблемы является метод декомпозиции. Этот метод позволяет линеаризовать исходное уравнение и весь феномен нелинейности перенести на функционал качества, что в значительной степени позволяет упростить численную схему нахождения приближенного решения задачи оптимального управления. В статье рассмотрен метод декомпозиции для задачи оптимального управления решениями полулинейной модели соболевского типа.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; оптимальное управление; метод декомпозиции.

Введение. Многие начально-краевые задачи для полулинейных уравнений в частных производных, неразрешенных относительно производной по времени, описывающие процессы, протекающие в механике, технике, производстве, в подходящих функциональных пространствах могут быть сведены к задаче Шоуолтера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\, \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^{k} N_j(x) = u,\ L(x(0) - x_0) = 0. \tag{1}$$

В работе [1] было показано, что рассмотрение условия Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа позволяет уйти от феномена несуществования решения задачи Коши при произвольных начальных данных и позволяет значительно упростить численные алгоритмы нахождения приближенных решений. Рассмотрим задачу оптимального управления решениями задачи (1)

$$J(x,u) \to \inf,\ u \in \mathfrak{U}_{ad}. \tag{2}$$

Здесь $J(x,u)$ – некоторый, специальным образом построенный функционал качества; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Задача оптимального управления для линейного уравнения соболевского типа рассматривалась в монографии [2, гл. 7]. Задача оптимального управления для полулинейного уравнения соболевского типа рассматривалась в [3]. В случае нелинейного уравнения состояния поиск оптимального управления затрудняется. Одним из подходов к решению данной проблемы является метод декомпозиции [4]. Этот метод позволяет линеаризовать исходное уравнение и весь феномен нелинейности перенести на функционал, что в значительной степени упрощает численную схему нахождения приближенного решения задачи оптимального управления. В статье рассмотрен метод декомпозиции в задаче оптимального управления (2) для полулинейной модели соболевского типа (1).

1. Постановка задачи оптимального управления. Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и

$(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*), j = \overline{1,k}, k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \tag{3}$$

плотны и непрерывны, а вложение $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле $\mathcal{H}$) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathfrak{H}$, а $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, симметричный, 2-коэрцитивный оператор. Пусть $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*), r \geq 1, j = \overline{1,k}$ – s-монотонные и p_j-коэрцитивные операторы, где $p_j \geq 2$ и $p_k = \max\limits_j p_j$, имеют симметричную производную Фреше.

Построим пространство $\mathfrak{U} = L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве $\mathfrak{U}$ непустое замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Рассмотрим задачу оптимального управления (1), (2), где функционал качества зададим формулой

$$J(x, u) = \alpha \int\limits_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} \, dt + \beta \int\limits_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 \, dt, \ \alpha + \beta = 1, \tag{4}$$

где $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Введем в рассмотрение множество

$$\operatorname{coim} L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi \rangle = 0 \, \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x | \ x \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \operatorname{coim} L)\}.$$

Определение 1. *Слабым обобщенным решением* задачи (1) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L \frac{dx}{dt}, w \right\rangle + \langle Mx, w \rangle + \sum_{j=1}^k \langle N_j(x), w \rangle \right] dt = \int\limits_0^T \varphi(t) \langle u, w \rangle \, dt \\ L(x(0) - x_0) = 0, \quad \forall w \in \mathfrak{H}, \ \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{gathered} \tag{5}$$

Теорема 1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}, T \in \mathbb{R}_+, u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (1).*

Доказательство теоремы аналогично приведенному в работе [3].

Определение 2. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (1), (2), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x,u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (1) в смысле опеределения 1; вектор-функцию $\tilde{u}$ назовем *оптимальным управлением* в задаче (1), (2).

Замечание 1. *Допустимым элементом* задачи (1), (2) назовем пару $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$, удовлетворяющую задаче (1). Поскольку множество $\mathfrak{U}_{ad} \neq \emptyset$, то для любого $u \in \mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ в силу теоремы 1 существует единственное решение $x = x(u)$ задачи (1), поэтому условие существования допустимых элементов задачи (1), (2) выполнено.

Теорема 2. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (1), (2).*

Доказательство теоремы аналогично приведенному в работе [3].

2. Метод декомпозиции. Линеаризуем уравнение в (1) при помощи введения дополнительной переменной в уравнение состояния. Для этого определим $x = x(u, v) = x(t, u, v)$ как решение линейной задачи относительно вектор-функции x

$$\begin{gathered} L\dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^{k} N_j(v) = u, \quad L(x(0) - x_0) = 0, \\ u \in \mathfrak{U}_{ad}, \ v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k). \end{gathered} \tag{6}$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x | \ x \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H}), \ \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \operatorname{coim} L)\}.$$

Теорема 3. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, $v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$ задача (6) имеет единственное слабо обобщенное решение $x \in \mathfrak{X}_1$.*

Доказательство. Перепишем задачу (6) в виде

$$L\dot{x} + Mx = y, \quad L(x(0) - x_0) = 0, \tag{7}$$

где $y = u - \sum\limits_{j=1}^{k} N_j(v)$, $y \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) \cap L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$. Тогда в силу теоремы 1 существует единственное слабо обобщенное решение задачи (6) в смысле определения 1. $\square$

Тогда задача оптимального управления (1), (2) с функционалом качества (4) эквивалентна задаче

$$\begin{gathered} L\dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^{k} N_j(v) = u, \quad x(u, v) = v, \quad L(x(0) - x_0) = 0, \\ u \in \mathfrak{U}_{ad}, \ v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} J_\theta(x, u, v) = \theta \cdot \alpha \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} \, dt + \\ + (1 - \theta) \cdot \alpha \int_0^T \|v(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} \, dt + \beta \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 \, dt \to \inf, \ \theta \in (0, 1). \end{gathered} \tag{9}$$

В силу равенства $x(u, v) = v$ функционал (9) эквивалентен функционалу (4).

Определение 3. Тройку $(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k) \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (8), (9), если

$$J_\theta(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{u}) = \inf_{(x, v, u)} J_\theta(x, v, u),$$

где (x, u, v) удовлетворяет (8) в смысле определения 1.

Теорема 4. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (8), (9).*

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что оператор $(L\frac{d}{dt} + M) : \mathfrak{X}_1 \to L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) \cap L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ есть гомеоморфизм. Поэтому функционал стоимости (4) можно записать в виде $J(x, v, u) = J(v, u)$. Пусть $\{u_m\} \subset \mathfrak{U}_{ad}, \{v_m\} \subset L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k)$ – последовательности такие, что

$$\lim_{m\to\infty} J(v_m, u_m) = \inf J(v, u),$$

тогда из (9) вытекает, что

$$\|u_m\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)} \leq \text{const}, \quad \|v_m\|_{L_{p_k}(0,T;\mathfrak{B}_k)} \leq \text{const} \tag{10}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$. Из (10) (переходя, если надо, к подпоследовательности) извлечем слабо сходящиеся последовательности:

$$u_m \rightharpoonup \tilde{u} \text{ слабо в пространстве } L_2(0,T;\mathfrak{H}^*),$$
$$v_m \rightharpoonup \tilde{v} \text{ слабо в пространстве } L_{p_k}(0,T;\mathfrak{B}_k).$$

В силу теоремы Мазура точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Обозначим за $x_m = x(v_m, u_m)$ решение уравнения

$$L \overset{\cdot}{x}_m + M x_m + \sum_{j=1}^{k} N_j(v_m) = u_m. \tag{11}$$

Тогда в силу свойств операторов M, N_j получим

$$M x_m \in L_2(0,T;\mathfrak{H}^*), \quad N(v_m) = \sum_{j=1}^{k} N_j(v_m) \in L_{q_k}(0,T;\mathfrak{B}_k^*).$$

Из (8) получим, что $L \overset{\cdot}{x}_m \in L_2(0,T;\mathfrak{H}^*) \cap L_{q_k}(0,T;\mathfrak{B}_k^*)$. Введем в $\operatorname{coim} L$ норму $|x|^2 = \langle Lx, x\rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства $\mathcal{H}$. Из уравнения (11) получим

$$\begin{gathered} |x_m(t)|^2 + C_1 \int_0^t \|x_m(\tau)\|^2_{\mathfrak{H}} d\tau \leq C_2 \int_0^T \|u_m(\tau)\|^2_{\mathfrak{H}^*} d\tau + |x_m(0)|^2 \leq C_3, \\ \int_0^t |\overset{\cdot}{x}_m(\tau)|^2 d\tau \leq C_4, \end{gathered} \tag{12}$$

где $C_i = \text{const} > 0$. Тогда в силу (10), (12) можно извлечь такие подпоследовательности, которые снова обозначим $\{x_m\}$, $\{v_m\}$, $\{u_m\}$, что

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \ * -\text{слабо в } L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L),$$

$$x_m \rightharpoonup \tilde{x} \ -\text{слабо в } L_2(0,T;\mathfrak{H}),$$

$$M x_m \rightharpoonup M\tilde{x} \ -\text{слабо в } L_2(0,T;\mathfrak{H}^*).$$

$$N(v_m) \rightharpoonup \mu \ -\text{слабо в } L_{q_k}(0,T;\mathfrak{B}_k^*).$$

Перейдем к пределу в уравнении состояния (11) и получим

$$L \overset{\cdot}{\tilde{x}} + M\tilde{x} + \mu = \tilde{u}.$$

В силу (12) x_m ограничены в $L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L) \cap L_2(0,T;\mathfrak{H})$, $\dot{x}_m$ ограничены в $L_2(0,T;\operatorname{coim} L)$. Тогда в силу компактного вложения $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ получим, что последовательность x_m сходится сильно и почти всюду в $L_2(0,T;\mathcal{H})$. Воспользуемся леммой 1.3 [5, с. 25] и получим $\mu = N(\tilde{v})$. Значит, переходя к пределу в уравнении состояния (11), получим

$$L \overset{\cdot}{\tilde{x}} + M\tilde{x} + \sum_{j=1}^{k} N_j(\tilde{v}) = \tilde{u}.$$

Следовательно, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{v}, \tilde{u}) = \tilde{v}$ и $\liminf J(u_m, v_m) \geq J(\tilde{u}, \tilde{u})$. Значит, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ есть оптимальное управление в задаче (8), (9). $\square$

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln: VSP, 2003.
3. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.
4. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987.
5. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.

Наталья Александровна Манакова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), manakovana@susu.ac.ru.

Поступила в редакцию 21 февраля 2015 г.

MSC 49J27, 47H05 **DOI: 10.14529/mmp150212**

Method of Decomposition in the Optimal Control Problem for Semilinear Sobolev Type Models

N.A. Manakova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, manakovana@susu.ac.ru

Due to the large number of applications the question of numerical solution of optimal control problems becomes very important. In the case of nonlinear state equations the search for optimal control is significantly difficult. One approach to the solution of this problem is the decomposition method. This method allows to linearize the original equation and to transfer the whole phenomenon of nonlinearity to the functional that greatly simplifies the numerical scheme for finding of approximate solution an optimal control problem.

Keywords: Sobolev type equations; optimal control; decomposition method.

References

1. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russian)
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, Köln, VSP, 2003.
3. Manakova N.A. Optimal Control Problem for the Oskolkov Nonlinear Filtration Equation. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 9, pp. 1213–1221.
4. Lions J.-L. *Contrôle optimal de systémes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Paris, Dunod, 1968.
5. Lions J.-L. *Quelques mérthodes de reśolution des problémes aux limites non linéaires.* Paris, Dunod, 1968.

Received February 21, 2015