УДК 517.518 DOI: 10.14529/mmp150207

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Б.Д. Нгуен, В.Ф. Чистяков

В настоящее время, при анализе сложных электрических и электронных схем, часто встречаются системы, включающие в себя взаимосвязанные дифференциальные, интегральные и алгебраические уравнения. Алгебраические уравнения отвечают за отличие в моделях балансовых соотношений, в частности, законов сохранения или уравнений состояния, системы дифференциальных уравнений описывают динамику процесса. Если процесс обладает последействием, то математическая модель может включать и интегральные уравнения (ИУ). Системы взаимосвязанных дифференциальных, алгебраических и интегральных уравнений можно записать в виде векторных интегро-дифференциальных уравнений с матрицей неполного ранга в области определения при старшей производной искомой вектор-функции. Численное решение краевых и начальных задач для таких систем сопряжено с большими трудностями. В данной работе обсуждается метод наименьших квадратов и приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: вырожденная система; общее решение; интегро-дифференциальные уравнения; краевая задача; метод наименьших квадратов.

Введение

В течение последних сорока лет большое внимание уделяется системам дифференциальных уравнений с матрицей неполного ранга или вырожденным оператором в области определения при старшей производной искомой вектор-функции и численным методам их решения [1–5]. Системы интегро-дифференциальных уравнений с матрицей неполного ранга в области определения при старшей производной искомой вектор-функции и особенно численные методы решения краевых задач для них в прошлое тридцатилетие исследовались фрагментарно. Сейчас это быстро растущая область исследования (см. например, монографию [6], и работы [7–10] с приведенной там библиографией). Ранее изучались только постановки начальных задач. Краевые задачи практически не рассматривались. Методы, применяемые в работах [11, 12] при решении краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), сложно, а для систем с прямоугольными матрицами коэффициентов невозможно адаптировать к нашим задачам. В данной работе изучается метод наименьших квадратов, применяемый в работе [13] для решения начальных задач для дифференциально-алгебраических уравнений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ)

$$(\Lambda_1 + V)x := A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) + \int_\alpha^t K(t,s)x(s)ds = f,\ t \in T = [\alpha, \beta], \qquad (1)$$

где $A(t),\ B(t),\ K(t,s) - (\nu \times n)$-матрицы, $\dot{x}(t) = dx(t)/dt,\ x(t), f \equiv f(t)$-искомая и заданная вектор-функция соответственно, $\Lambda_1 x := A(t)\dot{x} + B(t)x,\ V-$оператор Вольтерра с ядром $K(t,s)$, с краевыми условиями:

$$Cx(\alpha) + Dx(\beta) = a, \tag{2}$$

где $C,\ D - (m \times n)$-матрицы, a-заданный вектор. Предполагается, что входные данные достаточно гладкие, и выполнено условие

$$\mathrm{rank} A(t) < \min\{\nu, n\},\ t \in T. \tag{3}$$

Если $\nu = n$, то условие (3) эквивалентно равенству $\det A(t) \equiv 0, t \in T$.

Система (1) называется *замкнутой*, если $\nu = n$, *переопределенной*, если $\nu > n$, и *недоопределенной* , если $\nu < n$.

В работе используются нормы q-мерного вектора $b = (b_1, b_2, ..., b_q)^T, \in \mathbf{R}^q$, и вектор-функции $b(t) = (b_1(t), b_2(t), ..., b_q(t))^T,\ t \in T$, вычисляемые по правилам

$$\|b\|_E^2 = \sum_{j=1}^{q} b_j^2,\ \|b\|_I = \max_{j\in[1,\cdots,q]} |b_j|\,,\ \ \|b(t)\|_{L_2(T)}^2 = \int_\alpha^\beta \|b(s)\|_E^2\,ds,\ \|b(t)\|_{\mathbf{C}(T)} = \max_{t\in T} \|b(t)\|_I\,,$$

где T-символ транспонирования.

Замечание 1. Для упрощения записи указание зависимости от t в работе будет иногда опускаться, если это не вызывает путаницы. Включения $V(t) \in \mathbf{C}^i(T),\ i > 1$, где $V(t)-$ матрица или вектор-функция, означают, что все производные всех ее элементов непрерывны до порядка i включительно. Непрерывности соответствуют обозначения: $V(t) \in \mathbf{C}(T)$. Запись $V(t) \in L_2(T)$ означает, что все элементы $V(t)$ являются функциями суммируемыми с квадратом на T.

Под решением задачи (1), (2) мы будем понимать вектор-функцию $x \equiv x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, которая обращает систему (1) в тождество на T при подстановке и удовлетворяет условию (2).

Задачи (1), (2), удовлетворяющие условию (3), часто возникают при анализе сложных электрических и электронных схем [14]. Схема обычно изображается в виде направленного графа (цепи), состоящего из ветвей и узлов с фиксированным направлением каждой ветви. В общем случае уравнения цепи состоят из двух частей: уравнения баланса токов (расходов) в узлах (первый закон Кирхгофа), уравнений баланса напряжений (перепадов давлений) в контурах (второй закон Кирхгофа), дополняемых уравнениями ветвей (обобщенный закон Ома). Законы Кирхгофа можно представить в матричной форме с использованием контурной и узловой матриц: $\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ соответственно. В результате ряда преобразований (см. [7]) мы получим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}L \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}R \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mathcal{B}\tilde{C}_{\text{B}} \\ 0 \end{pmatrix} \int_{t_0}^{t} x(s)ds + \begin{pmatrix} u_C(t_0) + e_{\text{B}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

где $x \equiv x(t)-$вектор-функция токов на ветвях, $R_{\text{B}},\ \tilde{C}_{\text{B}}$ – диагональные матрицы активных сопротивлений и величин, обратных емкостям ветвей соответственно; L_{B} – матрица индуктивностей, которая может быть вырожденной, $u_C(t_0) + e_{\text{B}}-$ вектор напряжений на зажимах источников (тока и напряжения). При выписывании уравнений Кирхгофа и матрицы индуктивностей мы можем получить линейно-зависимые уравнения, и конечная система может быть переопределенной. В зависимости от суточного температурного режима сопротивления, индуктивности, емкости ветвей могут зависеть от времени.

2. Теоремы о разрешимости

Уравнения вида (1) могут обладать сложной внутренней структурой. В таком случае мы можем идти только по пути выделения классов уравнений, для которых доказаны утверждения о существовании и единственности решений, с последующей разработкой численных методов решения.

Определение 1. *Если существует оператор*

$$\tilde{\Lambda}_k = L_0(t) + L_1(t)\frac{d}{dt} + ... + L_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k,$$

где $L_0(t),\ L_1(t), ...,\ L_k(t)$ *–* $(\nu \times \nu)$*-матрицы из* $\mathbf{C}(T)$*, со свойством*

$$\tilde{\Lambda}_k \circ (\Lambda_1 + V)y = \tilde{A}(t)\dot{y} + \tilde{B}(t)y + \int_\alpha^t \tilde{K}(t,s)y(s)ds\ \forall y \in \mathbf{C}^{k+1}(T),$$

где $\tilde{A}(t),\ \tilde{B}(t),\ \tilde{K}(t,s)$ *–* $(\nu \times n)$*-матрицы, непрерывные в своих областях определения,*

$$\mathrm{rank}\tilde{A}(t) = \min\{\nu, n\}\ \forall t \in T,$$

то будем говорить, что для системы (1) определен левый регуляризирующий оператор (ЛРО). Минимально возможное число k *называется индексом системы (1).*

Определение 2. *Если для пучка* $(\nu\times n)$*-матриц* $\lambda A(t)+B(t)$ *существует* $(\nu\times\nu)$*-матрица* $P(t)$ *со свойствами*

$$\det P(t) \neq 0\ \forall t \in T,\ P(t)[\lambda A(t) + B(t)] = \lambda\begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} = \min\{\nu, n\}\ \forall t \in T,$$

то будем говорить, что пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ *имеет индекс один на отрезке* T*.*

Лемма 1. [6] *Пучок* $(n \times n)$*-матриц* $\lambda A(t) + B(t)$ *имеет индекс один на отрезке* T *тогда и только тогда, когда выполнен критерий «ранг-степень»:*

$$\mathrm{rank}\ A(t) = \deg\det[\lambda A(t) + B(t)] = const = r\ \forall t \in T. \quad (4)$$

Далее нам потребуется такое утверждение.

Лемма 2. [6] *Пусть* $(\nu\times n)$*-матрица* $A(t) \in \mathbf{C}^i(T),\ i = 0, 1, 2, \cdots$*, имеет постоянный ранг* r *на* T*. Тогда существуют квадратные матрицы* $P(t),\ Q(t) \in \mathbf{C}^i(T)$ *соответствующей размерности со свойствами*

$$\det P(t) \neq 0, \det Q(t) \neq 0\ \forall t \in T,\ P(t)A(t)Q(t) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ t \in T, \quad (5)$$

где E_r*−единичная матрица размерности* r*.*

Следствие 1. *Для* $(\nu \times n)$*-матриц* $A(t)$ *полного ранга, когда* $\mathrm{rank}A(t) = \min\{\nu, n\}\ \forall t \in T$*, существуют матрицы* $P(t),\ Q(t)$ *из леммы 2 со свойствами*

$$A(t)Q(t) = \begin{pmatrix} E_\nu & 0 \end{pmatrix},\ \nu < n,\ P(t)A(t) = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix},\ n < \nu,\ t \in T.$$

Свойства систем (1), имеющих индекс один, определяются следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) выполнены условия*
1) $A(t), B(t), f(t) \in \mathbf{C}^1(T), K(t,s) \in \mathbf{C}^1(T \times T)$;
2) пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ *имеет индекс один на отрезке* T.
Тогда:
1) система (1) имеет индекс один;
2) существуют квадратные матрицы $\mathcal{P}(t),\ \mathcal{Q}(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *подходящей размерности со свойствами* $\det \mathcal{P}(t) \neq 0,\ \det \mathcal{Q}(t) \neq 0\ \forall t \in T$, *система*

$$\mathcal{P}(t)(\Lambda_1 + V)\mathcal{Q}(t)u = \mathcal{P}(t)f,$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \\ \dot{u_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 & B_{13} \\ 0 & E_{\nu-r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix},\ \nu < n, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix},\ \nu = n, \tag{7}$$

где $J(t)$*−некоторый* $(r \times r)$*-блок,*

$$V_{ij}z = \int_\alpha^t K_{ij}(t,s)z(s)ds,$$

$K_{ij}(t,s)$*−блоки подходящей размерности произведения* $\mathcal{P}(t)K(t,s)\mathcal{Q}(t)$, u_j*− компоненты вектор-функции* u, *соответствующие блочной структуре матриц коэффициентов.*

Более того, если $n < \nu$, $\mathrm{rank}(A(t)|B(t)) = n\ \forall t \in T$, *то существуют квадратные матрицы* $\mathcal{P}(t),\ \mathcal{Q}(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *подходящей размерности со свойствами* $\det \mathcal{P}(t) \neq 0,\ \det \mathcal{Q}(t) \neq 0\ \forall t \in T$, *система*

$$\mathcal{P}(t)(\Lambda_1 + V)\mathcal{Q}(t)u = \mathcal{P}(t)f,$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \\ V_{31} & V_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Доказательство. В качестве ЛРО можно принять оператор

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (d/dt)P_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t \end{pmatrix} = P(t), \tag{9}$$

где $P(t)$−матрица из определения 2. Далее, умножим систему (1) на матрицу $P(t)$ и произведем замену $x(t) = Q(t)y(t)$, где $P(t),\ Q(t)$ матрицы из равенства (5). Для определенности будем считать, что $\nu < n$. Получим

$$P(t)(\Lambda_1 + V)Q(t)y =$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P(t)f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Блочная структура в равенстве (10) выписана с учетом разбиения на блоки произведения $P(t)A(t)Q(t)$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y,\ W_{ij}z = \int_\alpha^t \tilde{K}_{ij}(t,s)z(s)ds,$$

$\tilde{K}_{ij}(t,s)-$блоки подходящей размерности произведения $P(t)K(t,s)Q(t)$.

В силу условия 2) теоремы rank $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \min\{\nu, n\}\ \forall t \in T$. В силу этого rank$B_{22} = \nu - r\ \forall t \in T$. Согласно следствию 1 найдется невырожденная матрица $\tilde{Q}$ со свойством $B_{22}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} E_{\nu-r} & 0 \end{pmatrix}$. После замены переменных $y = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} v$ система (10) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v_1} \\ \dot{v_2} \\ \dot{v_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} \\ B_{21} & E_{\nu-r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & \tilde{V}_{12} & \tilde{V}_{13} \\ W_{21} & \tilde{V}_{22} & \tilde{V}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где $y_1 = v_1,\ y_2 = \tilde{Q}\begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Умножая систему (11) на матрицу $\begin{pmatrix} E_r & -\tilde{B}_{13} \\ 0 & E_{\nu-r} \end{pmatrix}$ и производя замену $u_3 = v_3,\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B_{21} & E_{\nu-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, мы приведем систему (11) к виду (6), где $J(t) = B_{11} - \tilde{B}_{12}B_{21},\ B_{13} = \tilde{B}_{13}$. Суперпозиции этих действий дадут нам матрицы $\mathcal{P}(t),\ \mathcal{Q}(t)$.

Существование форм (7), (8) доказывается аналогично. $\square$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\nu \leq n$. Тогда системы разрешимы при любой $f(t)$, и их общее решение имеет вид*

$$x(t,c) = X_r(t)c + \zeta(t), \qquad (12)$$

$$\zeta(t) = \int_\alpha^t \tilde{K}(t,s)f(s)ds + C_0(t)f(t) + \int_\alpha^t \tilde{K}(t,s)w(s)ds + \bar{C}_0(t)w(t),$$

$$x(t,c) = \bar{X}_r(t)c + \bar{\zeta}(t), \qquad (13)$$

$$\bar{\zeta}(t) = \int_\alpha^t \bar{K}(t,s)f(s)ds + \bar{C}_0(t)f(t),$$

где $X_r(t),\ \bar{X}_r(t) - (n \times r)$-матрицы, $\tilde{K}(t,s), C_0(t),\ \bar{K}(t,s), \bar{C}_0(t) - (n \times n)$-матрицы, гладкие в областях определения, $w(t)-$произвольная гладкая вектор-функция, с-вектор произвольных постоянных, и других решений на T нет.

Доказательство. Рассмотрим случай замкнутой системы. Из второго блочного уравнения (7) получим

$$u_2 = (E_{n-r} + V_{22})^{-1}[-V_{21}u_1 + \tilde{f}_2]. \qquad (14)$$

Поставим u_2 из (14) в первое уранение. В результате получим:

$$\dot{u_1} + Ju_1 + \tilde{V}u_1 = F, \qquad (15)$$

где $\tilde{V}-$ оператор Вольтерра с некоторым ядром $\tilde{K}(t,s)$, $F-$ некоторое алгебраическое выражение относительно $\tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2(t)$ и соответствующих операторов Вольтерра, действующих на перечисленные функции.

Здесь учтено, что произведение операторов Вольтерра является оператором Вольтерра и $(E_{n-r} + V_{22})^{-1} = E_{n-r} + \tilde{V}_{22}$, где $\tilde{V}_{22}$–некоторый оператор Вольтерра. Далее, разрешив (15) как обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{u}_1 + Ju_1 = \Psi, \Psi = F - \tilde{V}u_1,$$

получим интегральное уравнение Вольтерра

$$u_1 = U(t)c + Wu_1 + \tilde{\Psi},$$

где $U(t)$–матрицант системы $\dot{u}_1 = -Ju_1$, $W = \tilde{W}\tilde{V}$, c–вектор произвольных постоянных,

$$\tilde{W}g = \int_\alpha^t U(t)U^{-1}(s)g(s)ds,\ \tilde{\Psi} = W = \tilde{W}F,\ u_1 = (E_r + W)^{-1}[U(t)c + \tilde{\Psi}]. \tag{15}$$

Поставляя u_1 в (14), найдем выражение для u_2 и после умножения на $\mathcal{Q}$ получим вид общего решения системы (13). Полагая в (6) компоненту u_3 произвольной функцией и повторяя вышеприведенные выкладки, получим (12). Следствие доказано. □

В случае переопределенной системы для первых двух блочных уравнений из (8) мы можем повторить рассуждения из следствия и получим формулу (13). Из формулы (8) мы видим, что вектор произвольных постоянных должен удовлетворять еще такому уравнению

$$\mathcal{L}(t)c = \psi(t), \tag{16}$$

где

$$\mathcal{L}(t) = (V_{31}\ V_{32}) \begin{pmatrix} (E_r + W)^{-1}U(t) \\ -(E_{n-r} + V_{22})^{-1}V_{21}(E_r + W)^{-1}U(t) \end{pmatrix},$$

$$\psi(t) = -(V_{31}\ V_{32}) \begin{pmatrix} (E_r + W)^{-1}\tilde{\Psi}) \\ -(E_{n-r} + V_{22})^{-1}V_{21}(E_r + W)^{-1}\tilde{\Psi} \end{pmatrix},$$

где обозначения в формуле (16) соответствуют обозначениям из формул (6) – (15). Согласно [2], система (16) разрешима относительно c тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\psi(t) = \mathcal{L}(t)\mathcal{C}^{-}\theta, \tag{17}$$

где $\mathcal{C}^{-}$полуобратная матрица $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}\mathcal{C}^{-}\mathcal{C} = \mathcal{C}$,

$$\mathcal{C} = \int\limits_\alpha^\beta \mathcal{L}^\top(s)\mathcal{L}(s)ds,\ \theta = \int\limits_\alpha^\beta \mathcal{L}^\top(s)\psi(s)ds. \tag{18}$$

Все решения описываются формулой

$$c = \mathcal{C}^{-}\theta + [E_r - \mathcal{C}^{-}\mathcal{C}]\bar{c}, \tag{19}$$

где $\bar{c}$–произвольный вектор $\mathbf{R}^r$. При выполнении условия (17), а ему удовлетворяют все функции из образа оператора системы (1) $(\Lambda_1 + V)z,\ z \in \mathbf{C}^1(T)$, общее решение переопределенной системы имеет вид

$$x(t, \bar{c}) = X_d(t)\bar{c} + \tilde{\zeta}(t), \tag{20}$$

где

$$X_d(t) = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} (E_r + W)^{-1}U(t) \\ -(E_{n-r} + V_{22})^{-1}V_{21}(E_r + W)^{-1}U(t) \end{pmatrix} [E_n - \mathcal{C}^{-}\mathcal{C}],$$

$$\tilde{\zeta}(t) = X_d(t)\mathcal{C}^{-}\theta + \int_{\alpha}^{t} \mathbf{K}(t,s)f(s)ds + \mathbf{C}_0(t)f(t),$$

где $X_d(t) - (n \times d)$-матрицы, $d = \mathrm{rank}[E_r - \mathcal{C}^{-}\mathcal{C}]$, $\mathbf{K}(t,s)$, $\mathbf{C}_0(t) - (n \times m)$-матрицы, гладкие в областях определения. Из (19) следует, что размерность многообразия переопределенных систем не зависит в наших условиях от свободного члена $f(t)$.

Следствие 3. *Если выполнены условия теоремы 1 и условие (19), то краевая задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы относительно векторов c, $\bar{c}$ системы алгебраических уравнений:*

$$Z_1 c = a - C\zeta(\alpha) - D\zeta(\beta),\ Z_1 = CX_r(\alpha) + DX_r(\beta),\ \nu < n, \tag{21}$$

$$Z_2 c = a - C\bar{\zeta}(\alpha) - D\bar{\zeta}(\beta),\ Z_2 = C\bar{X}_r(\alpha) + D\bar{X}_r(\beta),\ \nu = n, \tag{22}$$

$$Z_3 \bar{c} = a - C\tilde{\zeta}(\alpha) - D\tilde{\zeta}(\beta),\ Z_3 = CX_d(\alpha) + DX_d(\beta),\ \nu > n. \tag{23}$$

Если решение системы c, $\bar{c}$ единственно, то единственно решение задачи (1), (2).

Замечание 2. Случай $n < \nu$, $\mathrm{rank}(A(t)|B(t)) > n\ \forall t \in T$, в работе не рассматривается.

Замечание 3. Пусть найдется матрица $P(t)$ из определении 2, но условие о полноте ранга не выполнено: $\mathrm{rank}\ A^1(t) < \min\{\nu, n\}\ \forall t \in T$, $A^1(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}$, то можно попытаться найти матрицу $P^1(t)$ с аналогичными свойствами и повторить процесс.

Лемма 3. *Пусть в системе (1) $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$, где $\mathbf{C}^A(T)$, $\mathbf{C}^A(T \times T)-$пространства вещественно-аналитических функций, и индекс системы равен k.*

Тогда существуют матрицы $P^i(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = 1, 2, \cdots k$, $\det P^i(t) \neq 0\ \forall t \in T$, соответствующей размерности со свойствами: произведение операторов, построенных по формуле (9) является ЛРО. Иначе говоря, можно принять

$$\Lambda_k = \prod_{i=1}^{k} \Omega_i,\ \Omega_i = \begin{pmatrix} P_1^i(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (d/dt)P_2^i(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_1^i(t) \\ P_2^i(t \end{pmatrix} = P^i(t).$$

Для замкнутых систем доказательство приведено в [6]. Для незамкнутых систем алгоритм доказательства почти не меняется.

Если для системы (1) определен ЛРО и $\nu \geq n$, то многообразие ее решений конечномерно. В обратном случае мы этого не можем гарантировать.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$(\Lambda_1 + V)x = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(t)s & g(t) \end{pmatrix} x(s)ds = 0,\ t \in [0,1],$$

где $\gamma-$вещественный параметр, $g(t)-$функция из $\mathbf{C}^A(T)$. Имеем $x_2 = -tx_1$, где $(x_1\ x_2)^\top = x$. Отсюда $(\gamma - 1)x_1 = 0 \Leftrightarrow \dim\ \ker\ (\Lambda_1 + V) < \infty$ при $\gamma \neq 1$. Если $\gamma = 1$, то можно принять $x = (-u(t)\ tu(t))^\top$, где $u(t)-$ произвольная функция из $\mathbf{C}^1[0,\ 1]$. В качестве базиса в пространстве решений можно принять функции $\phi_j = \begin{pmatrix} -t^j & t^{j+1} \end{pmatrix}^\top$, $j = 0, 1, \cdots$. Иначе говоря, $\dim\ \ker\ (\Lambda_1 + V) = \infty$. Выбором функции $g(t)$ можно задавать любой наперед заданный индекс рассматриваемой системы при условии $\gamma \neq 1$.

3. Численный метод

Системы индекса 1 обладают важным свойством.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, краевая задача (1),(2) разрешима и для некоторой вектор-функции $x_\epsilon(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, выполнены условия*

$$\|\phi_\epsilon(t)\|_{\mathbf{C}(T)} < \epsilon, \ \|h_\epsilon\|_I < \epsilon, \tag{24}$$

где

$$\phi_\epsilon(t) = (\Lambda_1 + V)x_\epsilon(t) - f(t), \ h_\epsilon = Cx_\epsilon(\alpha) + Dx_\epsilon(\beta) - a.$$

Тогда найдутся решение задачи $x(t)$ и положительные числа ϵ_0, κ такие, что

$$\|x_\epsilon(t) - x(t)\|_{\mathbf{C}(T)} < \kappa\epsilon, \ \epsilon < \epsilon_0.$$

Более того, если в краевых условиях (2) $C = E_n$, $D = 0$ (краевая задача является задачей Коши), и для некоторой вектор-функции $x_\epsilon(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, выполнены условия

$$\|\phi_\epsilon(t)\|^2_{L_2(T)} < \epsilon, \ x_\epsilon(\alpha) - x(\alpha) = h_\epsilon = 0, \tag{25}$$

тогда найдутся решение задачи $x(t)$ и положительные числа ϵ_1, κ_1 такие, что

$$\|x_\epsilon(t) - x(t)\|^2_{L_2(T)} < \kappa_1\epsilon, \ \epsilon < \epsilon_1.$$

Доказательство. Выпишем для невязки $y(t) = x(t) - x_\epsilon(t)$ краевую задачу

$$(\Lambda_1 + V)y(t) = \phi_\epsilon(t), \ Cy(\alpha) + Dy(\beta) = h_\epsilon. \tag{26}$$

Пусть $\nu < n$. Полагаем в формуле (12) произвольную вектор-функцию $w(t) \equiv 0$ и $f(t) = \phi_\epsilon(t)$. Выписываем систему (21) применительно к задаче (26) $Z_1 c = b$, $b = h_\epsilon - C\zeta(\alpha) - D\zeta(\beta)$. Система совместна. Из условий (24) и формулы (12) в результате простых оценок (с учетом гладкости) вытекает, что справедливо неравенство $\|b\|_I < \tilde{\kappa}\epsilon$, где $\tilde{\kappa}$—некоторая константа. Согласно формуле (19) общее решение $c = Z_1^- b + [E_r - Z_1{}^- Z_1]v$, где v— произвольный вектор. Полагая $v = 0$, видим, что вектор констант в этом случае имеет оценку $\|\|_I < \tilde{\kappa}_1\epsilon$. Подставляя этот вектор в (12), мы находим вектор функцию $y(t)$ и нужное нам решение $x(t) = y(t) + x_\epsilon(t)$. Для случаев $\nu = n$, $n < \nu$ утверждение доказывается аналогично. Не нужно только оговаривать условие $w(t) \equiv 0$.

Во второй части утверждения мы имеем дело с задачей Коши. Пусть $\nu < n$. Из формулы (15) мы видим, что при нулевых начальных данных $c = 0$, так как $U(\alpha) = E_r$. Следовательно, полагая в формуле (12) $w(t) \equiv 0$ и подставляя в нее $f(t) = \phi_\epsilon(t)$, после несложных оценок получим нужное нам неравенство. Следует только учесть: если $\xi(t) \in \mathbf{C}(T)$, $\varepsilon(t) \in L_2(T)$, то $\xi(t)\varepsilon(t) \in L_2(T)$, $\|\xi(t)\varepsilon(t)\|_{L_2(T)} \le \|\xi(t)\|_{\mathbf{C}(T)} \|\varepsilon(t)\|_{L_2(T)}$ [15]. □

Итак, для краевых задач (1), (2), где система имеет индекс 1, существует гарантированная оценка отклонения приближающей вектор-функции от множества решений краевой задачи.

Будем искать приближения к решению краевой задачи (1), (2) в виде полинома

$$p_i(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_i t^i, \ i = 1, 2, \ldots,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_i$-векторные коэффициенты, подлежащие определению.

По методу множителей Лагранжа [16], построим функцию:

$$S(c_0, c_1, \ldots, c_i, \lambda) = \|\delta(t)\|^2_{L_2(T)} + (\lambda, \Omega) = \int_\alpha^\beta \|F(t)c - f(t)\|^2_E dt + (\lambda, \Omega), \tag{27}$$

$$\delta(t) = A(t)\dot{p}_i(t) + B(t)p_i(t) + \int_\alpha^t K(t,s)p_i(s)ds - f(t),$$

$$\|\delta(t)\|^2_{L_2(T)} = \int_\alpha^\beta \|\delta(t)\|^2_E dt,$$

где (λ, Ω)-скалярное произведение в пространстве R^m, $c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_i \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$,

$$F(t) = A(t)\dot{P}_i(t) + B(t)P_i(t) + \int_\alpha^t K(t,s)P_i(s)ds,$$

$$P_i(t) = (E_n \; tE_n \dots t^i E_n),$$

$$\Omega = Cx(\alpha) + Dx(\beta) - a = C[c_0 + c_1\alpha + \dots + c_i\alpha^i] + D[c_0 + c_1\beta + \dots + c_i\beta^i] - a,$$

Будем искать коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_i$, доставляющие минимум функции (27). Необходимым условием минимума функции многих переменных является равенство нулю ее частных производных первого порядка по независимым переменным. В функции (27) такими независимыми переменными являются коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_i, \lambda$. Выпишем систему линейных алгебраических уравнений порядка $n(k+1)+m$ относительно неизвестных $c_0, c_1, \dots, c_i, \lambda$. Имеем

$$\begin{cases} \partial S/\partial c_0 = 0, \\ \partial S/\partial c_1 = 0, \\ \qquad \dots \\ \partial S/\partial c_i = 0, \\ \partial S/\partial \lambda = 0. \end{cases}$$

С учетом вида функции (27) система выглядит таким образом:

$$\begin{cases} \left(2\int_\alpha^\beta F^T(t)F(t)dt\right) c + (\partial\Omega/\partial c)\lambda = 2\int_\alpha^\beta F^T(t)f(t)dt, \\ (\partial\Omega/\partial c)^T c = a. \end{cases} \tag{28}$$

В векторном виде система (28) имеет вид:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \Delta \\ \Delta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ a \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где

$$\Lambda = 2\int_\alpha^\beta F^T(t)F(t)dt, \Delta = \partial\Omega/\partial c, \Theta = 2\int_\alpha^\beta F^T(t)f(t)dt.$$

Решение системы (29) может быть осуществлено любым из известных методов (например, методом Гаусса). Подставляя найденные значения $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_i)$, λ, получим функции $p_i(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_i t^i$ – приближения к точным решениям задачи (1), (2).

Лемма 4. *Пусть $\nu \geq n$, и задача (1), (2) имеет единственное решение. Тогда существует единственное решение системы линейных алгебраических уравнений (29). Иначе говоря,*

$$\det \mathbf{A} \neq 0. \tag{30}$$

Доказательство. Подставим в задачу (1), (2) полином $p_i(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_i t^i$, $i = 1, 2, \ldots$, и вычислим соответствующие ему $f(t) = f_i(t)$, $a = a_i$. В силу единственности решения исходной задачи в системах (22), (23) решения единственны. Следовательно, решения краевых задач с входными данными $f(t) = f_i(t)$, $a = a_i$ единственны. Это возможно тогда и только тогда, когда справедливо неравенство (30). □

Замечание 4. В случае $\nu < n$ единственность решения задачи (1), (2) невозможна из-за того, что решение зависит от произвольных функций.

Оценим отклонение приближающего полинома от решения задачи Коши. В основу доказательства положим поиск многочлена, отклонение которого от решения мы можем оценить.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, краевая задача (1), (2) является задачей Коши и решение $x(t)$ единственно. Тогда найдется решение системы (29) и соответствующий ей многочлен задачи p_i такой, что*

$$S(c_0, c_1, \ldots, c_i, \lambda) \le \frac{\kappa_1}{(i^2 \cdot (ln\ i)^2)}, \qquad \|p_i(t) - x(t)\|^2_{L_2(T)} \le \frac{\kappa_2}{(i^2 \cdot (ln\ i)^2)},$$

где $\kappa_1 = const$, $\kappa_2 = const$.

Доказательство. Рассмотрим функционал (27) на многочлене $\mu_i(t)$, у которого $\mu_i(t)$ есть многочлен Чебышева для производной решения системы (1) $x(t)$. Согласно [17] имеем

$$\|\dot{\mu}_i(t) - \dot{x}(t)\|_{\mathbf{C}(T)} = O(1/(i \cdot ln\ i)),\ S(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_i, \lambda) = O(1/(i^2 \cdot (ln\ i)^2)),$$

где $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_i$–коэффициенты полинома $\mu_i(t)$. Так как на полиноме $p_i(t)$ достигается минимум, то

$$S(c_0, c_1, \ldots, c_i, \lambda) \le S(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_i, \lambda).$$

Из второго утверждения теоремы 2 следует вторая оценка утверждения. □

Замечание 5. При определенных требованиях на гладкость решения задачи (1), (2) можно брать другие пробные многочлены, например, интерполяционный многочлен Лежандра, и получать другие оценки скорости сходимости.

4. Численные эксперименты

В качестве иллюстрации приведем несколько примеров.

Пример 2. Пусть задана краевая задача

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 1+s & t \\ t & 0 \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{pmatrix} 1 + sint + (1-t)cost \\ t + cost - tcost \end{pmatrix},\ t \in [0, \pi],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Индекс системы равен 1. Точное решение этой краевой задачи: $x(t) = (sint \quad cost)^T$. Результаты расчетов примера приведены в табл. 1. Здесь $Err = \left\|(sin(t) - x_1(t_j), cos(t) - x_2(t_j))^T\right\|_I$.

Из табл. 1 мы видим, что при увеличении степени i полинома $p_i(t)$, погрешности расчетов уменьшаются.

Таблица 1

Результаты расчетов для примера 2

$i=3$				$i=5$			
t_j	$x_1(t_j)$	$x_2(t_j)$	Err	t_j	$x_1(t_j)$	$x_2(t_j)$	Err
0	0,0624	0,9758	0,0624	0	0,0001	0,9999	0,0001
0,3142	0,3669	0,9533	0,0579	0,3142	0,3095	0,9500	0,0011
0,6283	0,6117	0,8193	0,0239	0,6283	0,5878	0,8088	0,0003
0,9425	0,7928	0,6011	0,0162	0,9425	0,8080	0,5884	0,0010
3,1416	–0,0624	–0,9758	0,0624	3,1416	–0,0001	–0,9999	0,0001

Пример 3. Рассмотрим систему из примера 1 при $g(t) \equiv 0,\ t \in [0,1]$ и ненулевом свободном члене.

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} te^t + 2e^{2t} + \gamma e^t \\ te^t + e^{2t} \end{pmatrix},\ t \in [0,1].$$

Система имеет индекс 2, если $\gamma \neq 1$ и разрешима при любой $f(t) \in \mathbf{C}^2[0,1]$. Решение системы единственно, и краевые условия не нужны, $x(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \end{pmatrix}^T$.

В настоящее время для любой конкретной стандартной разностной схемы можно указать значение параметра γ, при которых схема расходится. Результаты расчетов для примера 2 при $\gamma = 2$ приведены в табл. 2. Здесь $Err = \left\| (e^t - x_1(t_j), e^{2t} - x_2(t_j))^T \right\|_I$.

Таблица 2

Результаты расчетов для примера 3

$i=3$				$i=5$			
t_j	$x_1(t_j)$	$x_2(t_j)$	Err	t_j	$x_1(t_j)$	$x_2(t_j)$	Err
0	0,9795	1,0100	0,0205	0	0,9999	1,0000	$0,1029 \times 10^{-3}$
0,1	1,1456	1,2245	0,0405	0,1	1,1057	1,2214	$0,5105 \times 10^{-3}$
0,2	1,2844	1,4832	0,0630	0,2	1,2215	1,4918	$0,0540 \times 10^{-3}$
0,3	1,4068	1,8046	0,0569	0,3	1,3495	1,8222	$0,3362 \times 10^{-3}$
1,0	2,7388	7,3791	0,0205	1,0	2,7184	7,3890	$0,1029 \times 10^{-3}$

Пример 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2t+1 & 2 \\ 3t & 4 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 1+s & t \\ t & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} x(s)ds = f_3(t)\ t \in [0,1]$$

с краевым условием

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} x(1) = 50.$$

Индекс системы равен 1. Решение краевой задачи единственно. В качестве решения был принят векторный многочлен

$$x_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} t^3$$

и вычислен соответствующий свободный член $f_3(t)$. Построена и решена система (29). Вычисленные коэффициенты многочлена $p_3(t)$ отличаются от коэффициентов $x_3(t)$ на величину, не превышающую 10^{-12}.

Заключение

В работе получены условия разрешимости недоопределенных, переопределенных и замкнутых систем вида (1), включающих как частный случай ДАУ. Проанализирована возможность применимости метода наименьших квадратов для решения краевых задач (1), (2). Результаты численных экспериментов хорошо соответствуют теоретическим оценкам.

Литература

1. Сидоров, Н.А. Исследование непрерывных решений задачи Коши в окрестности точки ветвления / Н.А. Сидоров // Известия вузов. Математика. – 1976. – № 9. – С. 99–110.
2. Бояринцев, Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев.– Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.
4. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Известия вузов. Математика. – 1997. № 5. – С. 60–68.
5. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Шоуолтера–Сидорова/ А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 27 (127), вып. 2. – С. 50–56.
6. Чистяков, В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996. – 278 с.
7. Чистякова, Е.В. Методы исследования и решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений и их приложения: дис. ... канд. физ.-мат.наук / Е.В. Чистякова. – Иркутск, 2006.
8. Чистяков В.Ф. О разрешимости линейных интегро-алгебраических уравнений и численных методах их решения / В.Ф. Чистяков // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 932–946.
9. Булатов, М.В. Об одном семействе вырожденных интегродифференциальных уравнений/ М.В. Булатов, Е.В. Чистякова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9.– С. 1665–1673.
10. Фалалеев, М.В. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения / М.В. Фалалеев, С.С. Орлов // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 10. – С. 68–79.
11. Clark, Kenneth D. Numerical Solution of Boundary Value Problems in Differential-Algebraic Systems / D. Kenneth Clark, Linda R. Petzold // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing archive. –1989. – V. 10, № 5. – P. 915–930.
12. Marz, R. On Difference and Shooting Methods for Boundary Value Problems in Differential-Algebraic Equations / Marz R. // ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics: Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik. – 2006. – V. 64, № 11. – P. 463–473.
13. Чистяков, В.Ф. Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений / В.Ф. Чистяков, Е.В. Чистякова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2013. – Т. 21, № 1. – С. 81–95.

14. Ушаков, Е.И. Статическая устойчивость электрических систем / Е.И. Ушаков. – Новосибирск: Наука, 1988.
15. Маслов, В.П. Операторные методы / В.П. Маслов. – М: Наука, 1973.
16. Бертсекас, Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа / Д. Бертсекас. – М.: Радио и связь, 1987.
17. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987.

Банг Дык Нгуен, аспирант, кафедра «Вычислительная техника», Иркутский государственный технический университет(г. Иркутск, Российская Федерация), ducbang@mail.ru.

Виктор Филимонович Чистяков, доктор физико-математических наук, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), chist@icc.ru.

Поступила в редакцию 13 марта 2015 г.

MSC 65R20 **DOI: 10.14529/mmp150207**

On Boundary Value Problems for Singular Systems of Linear Integro-Differential Equations Method of Least Squares

B.D. Nguyen, Irkutsk State Technical University, Irkutsk, Russian Federation, ducbang@mail.ru**,**
V.F. Chistyakov, Institute for System Dynamics and Control Theory of Seberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation, chist@icc.ru

At present, in the analysis of complex electrical and electronic circuits, the system often includes interconnected differential, integral and algebraic equations. Algebraic equations are responsible for the difference of balance relations in the models, in particular, the conservation laws or equations of state, the system of differential equations describing the dynamics of the process. If the process has afteraction, the mathematical model can include integral equation (IE). The systems of interconnected differential, algebraic and integral equations can be written in the form of vector integro-differential equations with a matrix at the highest derivative of a searched vector-function of not full rank in the domain. Numerical solution of boundary and initial problems for such systems conjugates with great difficulty. In this paper we discuss the least squares method and the results of numerical calculations.

Keywords: degenerate system; general solution; integro-differential equations; boundary value problem; least squares method.

References

1. Sidorov N.A. Study of Continuous Solutions of the Cauchy Problem in a Neighborhood of the Branch. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1976, vol. 20, issue 9, pp. 77–87.
2. Boyarintsev Yu.E. *Reguljarnye i singuljarnye sistemy linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravneniy* [Regular and Singular Systems of Linear Ordinary Differential Equations]. Novosibirsk, Nauka, 1980. (in Russian)
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003. DOI: 10.1515/9783110915501
4. Sviridyuk G.A., Keller A.V. Invariant Spaces and Dichotomies of Solutions of a Class of Linear Equations of the Sobolev Type. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1997, vol. 41, issue 5, pp. 57–65.

5. Keller A.V. Numerical Solution of Optimal Control Problem Degenerate Linear System of Ordinary Differential Equations with Initial Showalter–Sidorov Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27 (127), issue 2, pp. 50–56. (in Russian)
6. Chistyakov V. F. Algebro-differentsial'nye operatory s konechnomernym yadrom [Algebraic-Differential Operators with Finite-Dimensional Kernel]. Novosibirsk, Nauka, Siberian Publishing Company of the RAS, 1996.(in Russian)
7. Chistyakova E.V. [Research Methods and Solving Degenerate Integro-Differential Equations and Their Applications. Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics]. Irkutsk, 2006.(in Russian)
8. Chistyakov V.F. On the Solvability and Numerical Methods for Solution of Linear Integro-Algebraic Equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, issue4, pp. 746–758. DOI: 10.1134/S0965542511090065
9. Bulatov M.V., Chistyakova E.V. On a Family of Singular Integro-Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, issue 9, pp. 1558–1566. DOI: 10.1134/S0965542511090065
10. Falaleev M.V., Orlov S.S. Degenerate Integro-Differential Operators in Banach Spaces and Their Applications. *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, issue 10, pp. 59–69.
11. Clark K.D., Petzold L.R. Numerical Solution of Boundary Value Problems in Differential-Algebraic Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing archive*, 1989, vol. 10, issue 5, pp. 915–930.
12. Marz R. On Difference and Shooting Methods for Boundary Value Problems in Differential-Algebraic Equations. *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik*, 2006, vol. 64, issue 11, pp. 463–473.
13. Chistyakov V. F., Chistyakova E.V. Application of the Least Squares Method for Solving Linear Differential-Algebraic Equations. *Numerical Analysis and Applications*, 2013, vol. 6, issue 1, pp. 77–90. DOI: 10.1134/S1995423913010102
14. Ushakov E.I. *Staticheskaya ustoychivostŸ elektricheskikh sistem* [Static Stability of Electrical Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1988.
15. Maslov V.P. *Operatornye metodi* [Operator Methods]. Moscow, Nauka, 1973.
16. Bertsekas D.P. *Conditional Optimization and Lagrange Multiplier Methods.* N.Y., Academic Press Inc. 1987.(in Russian)
17. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)

Received March 13, 2015