УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp150411

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА

Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова

В статье изучается вопрос существования оптимального управления для одной математической модели, которая была предложена Р. Фитц Хью и Дж.М. Нагумо для моделирования распространения нервного импульса. Данная модель относится к классу моделей «реакции-диффузии», которые моделируют широкий класс процессов, таких как химические реакции с диффузией и распространение нервного импульса. В случае асимптотической устойчивости изучаемой модели и в предположении, что скорость изменения одной компоненты существенно превосходит скорость другой, изучаемая модель может быть сведена к задаче оптимального управления для полулинейного уравнения соболевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. В работе доказано существование единственного слабого обобщенного решения рассматриваемой модели с начальным условием Шоуолтера – Сидорова и существование оптимального управления.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; оптимальное управление; уравнения реакции-диффузии.

Постановка задачи. В основе наиболее популярного подхода нейросетевого моделирования лежит составление сетей со сложной пространственно-топологической организацией из единичных нейронов. В отдельном нейроне ионные токи химических элементов приводят к изменению потенциала мембраны (импульса). Это происходит в ответ на внешнее воздействие при превышении порога возбуждения. Для изучения изменений потенциала мембраны проводятся аналитические и численные исследования математических моделей, основанных на уравнениях вида «реакция-диффузия»

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v + f(v, w), \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + g(v, w). \end{cases}$$

Одной из таких моделей является система уравнений Фитц Хью – Нагумо, моделирующая распространение нервного импульса в мембране [1, 2] и имеющая вид

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 (w - \alpha v - \beta), \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 w - \varkappa_2 v - w^3. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $w = w(s,t)$ – функция, описывающая динамику мембранного потенциала, $v = v(s,t)$ – медленная восстанавливающая функция, связанная с ионными токами, $\beta_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \varkappa_2 \in \mathbb{R}_+$ – фиксированные параметры, характеризующие: α, β_1 – порог возбуждения и его скорость, α_1 – электропроводность среды, α_2 – реполяризацию среды, β – источник возбуждения. Нулевое решение системы при $\beta_2 < 0$ асимптотически устойчиво, а $\beta_2 > 0$ неустойчиво. Качественный анализ систем уравнений (1) в предположении, что скорость изменения одной компоненты существенно превосходит скорость другой в случае $\beta_2 > 0$, был сделан в [3]. Это предположение приводит к системам уравнений вида

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 w - \varkappa_1 v + u_1, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 w - \varkappa_2 v - w^3 + u_2. \end{cases} \tag{2}$$

Нами будет рассмотрен случай, когда $\beta_2 \leq 0$ и $\beta_1 = \varkappa_2$, а вектор-функция $u = (u_1, u_2)$ характеризует источник возбуждения.

Начально-краевые задачи для системы уравнений (2) в специальным образом подобранных функциональных банаховых пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{U}$ редуцируются к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{3}$$

для абстрактного полулинейного уравнения

$$L\, \dot{x} + Mx + N(x) = u, \ \ker L \neq \{0\}. \tag{4}$$

Нашей целью является изучение задачи оптимального управления

$$J(x, u) \to \min \tag{5}$$

решениями задачи (3), (4) в слабом обобщенном смысле [4, 5]. Здесь $J(x, u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Оптимальное управление решениями начально-краевой задачи для системы уравнений (2) позволяет регулировать разницу потенциалов ионных токов в нервной мембране при наименьших затратах на управление. Изучению задач оптимального управления для уравнений соболевского типа посвящены работы [6, 7].

1. Существование решения модели Фитц Хью – Нагумо с условием Шоуолтера – Сидорова. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим систему уравнений Фитц Хью – Нагумо в случае $\beta_1 = \varkappa_2$, $\beta_2 \in \mathbb{R}_-$

$$\begin{cases} -\alpha_1 \Delta v - \beta_1 w + \varkappa_1 v = u_1, \\ w_t - \alpha_2 \Delta w + |\beta_2| w + \beta_1 v + w^3 = u_2 \end{cases} \tag{6}$$

с краевым условием

$$v(s, t) = 0, \ w(s, t) = 0, \ (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{7}$$

и условием Шоуолтера – Сидорова

$$w(s, 0) - w_0(s) = 0, \ s \in \Omega. \tag{8}$$

Положим $\mathfrak{H}_i = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $\mathfrak{B}_i = L_4(\Omega)$, $i = 1, 2$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$, отождествленное со своим сопряженным. Определим пространства $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, а через $\mathfrak{H}^*$, $\mathfrak{B}^*$ обозначим сопряженные пространства к пространству $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$, соответственно. В случае $n \leq 4$ имеют место плотные и непрерывные вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^*, \tag{9}$$

причем вложение $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно. Пусть $x = (v, w)$, $\zeta = (\xi, \eta)$, $u = (u_1, u_2)$, определим операторы

$$[Lx, \zeta] = \langle w, \eta\rangle, \ \ [Mx, \zeta] = \langle -\alpha_1\Delta v - \beta_1 w + \varkappa_1 v, \xi\rangle + \langle -\alpha_2\Delta w + |\beta_2| w + \beta_1 v, \eta\rangle, \ \ x, \zeta \in \mathfrak{H},$$

$$[N(x), \zeta] = \langle w^3, \eta\rangle, \ \ x, \zeta \in \mathfrak{B}.$$

Таким образом, задача (6) – (8) редуцирована к задаче Шоуолтера – Сидорова (3), (4). Построим множество $\operatorname{coim} L = \{0\} \times \mathfrak{H}_2$ и рассмотрим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x| \ v \in L_2(0, T; \mathfrak{H}_1), \ w \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_4(0, T; \mathfrak{B}_2)\}.$$

Определение 1. *Вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$ при $T \in \mathbb{R}_+$ назовем слабым обобщенным решением задачи Шоуолтера – Сидорова (3), (4), если она удовлетворяет*

$$\int\limits_0^T \left([L\frac{dx}{dt}, \zeta] + [Mx + N(x), \zeta]\right) dt = \int\limits_0^T ([u, \zeta])\, dt, \quad [L(x - x_0), \zeta] = 0 \ \ \forall \zeta \in \mathcal{H}.$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω. Последовательность собственных векторов $\{\varphi_k, \varphi_k\}$ тотальна в пространстве $\mathfrak{H}$, а в силу вложений (9) и в пространстве $\mathcal{H}$. Построим галеркинские приближения решения задачи (6) – (8) в виде

$$v_m(s, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)\varphi_k(s), \quad w_m(s, t) = \sum_{k=1}^m b_k(t)\varphi_k(s),$$

где коэффициенты $a_k = a_k(t)$, $b_k = b_k(t)$, $i = 1, ..., m$, определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} &\langle -\alpha_1\Delta v_m - \beta_1 w_m + \varkappa_1 v_m, \varphi_k\rangle = \langle u_1, \varphi_k\rangle, \\ &\langle \frac{\partial w_m}{\partial t} - \alpha_2\Delta w_m + |\beta_2| w_m + \beta_1 v_m + w_m^3, \varphi_k\rangle = \langle u_2, \varphi_k\rangle, \ k = 1, ..., m, \end{aligned} \tag{10}$$

и условием

$$\langle w(0) - w_0, \varphi_k\rangle = 0. \tag{11}$$

Уравнения (10) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{H}_i^m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$, $\mathfrak{H}^m = \mathfrak{H}_1^m \times \mathfrak{H}_2^m$.

Лемма 1. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{H}^m)$ задачи (10), (11).*

Доказательство леммы 1 является следствием теоремы существования и единственности решения задачи Шоуолтера – Сидорова для системы алгебро-дифференциальных уравнений [8].

Теорема 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \varkappa_1 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_2 \in \mathbb{R}_-$ и $n \le 4$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u_1 \in L_2(0, T; \mathfrak{H}_1^*)$, $u_2 \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{B}_2^*)$, существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (6) – (8).*

Доказательство. Существование. Умножим i-ые уравнения системы (10) на $a_i(t)$ и $b_i(t)$ соответственно, результаты сложим по $i = 1, ..., m$, проинтегрируем на $(0,t)$ и получим

$$\frac{1}{2}\|w_m(t)\|^2_{\mathcal{H}_2} + \int\limits_0^t \big(\alpha_1\|v_m(\tau)\|^2_{\mathfrak{H}_1} + \alpha_2\|w_m(\tau)\|^2_{\mathfrak{H}_2} + |\beta_2|\|w_m(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_2} + \varkappa_1\|v_m(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_1} +$$
$$+\|w_m(\tau)\|^4_{\mathfrak{B}_2}\big)\, d\tau = \int\limits_0^t \left(\langle u_1(\tau), v_m(\tau)\rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle u_2(\tau), w_m(\tau)\rangle_{\mathcal{H}_2}\right) d\tau + \|w_m(0)\|^2_{\mathcal{H}_2};$$

$$\|w_m(t)\|^2_{\mathcal{H}_2} + C_1\int\limits_0^t \big(\|v_m(\tau)\|^2_{\mathfrak{H}_1} + \|w_m(\tau)\|^2_{\mathfrak{H}_2} + \|w_m(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_2} + \|v_m(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_1} +$$
$$+\|w_m(\tau)\|^4_{\mathfrak{B}_2}\big)\, d\tau = C_2\int\limits_0^t \|u_1(\tau)\|_{\mathfrak{H}_1^*} d\tau + C_3\int\limits_0^t \|u_2(\tau)\|_{\mathfrak{B}_2^*} d\tau + C_4,\ C_i > 0,\ i = 1, ..., 4.$$

Из оценки следует, что все T_m, гарантированные леммой 1, можно взять равными друг другу: $T_m = T$. Так как пространства $L_4(0,T;\mathfrak{B}_2)$, $L_2(0,T;\mathfrak{H}_1)$ и $L_{\frac{4}{3}}(0,T;\mathfrak{B}_2^*)$ рефлексивны, то существуют слабые пределы

$$w_m \rightharpoonup w \ * -\text{слабо в } L_\infty(0,T;\mathcal{H}_2);$$

$$w_m \rightharpoonup w \text{ слабо в } L_4(0,T;\mathfrak{B}_2);$$
$$w_m^3 \rightharpoonup \mu \text{ слабо в } L_{\frac{4}{3}}(0,T;\mathfrak{B}_2^*);$$
$$\frac{\partial w_m}{\partial t} \rightharpoonup w \ * -\text{слабо в } L_\infty(0,T;\mathcal{H}_2);$$
$$v_m \rightharpoonup v \text{ слабо в } L_2(0,T;\mathfrak{H}_1).$$

Продолжим $x_m = (v_m(t), w_m(t))$ на $\mathbb{R}$ нулем вне $[0,T]$, и соответствующее продолжение обозначим через $\tilde{x}_m(t)$. Тогда из (6) следует, что

$$\langle L\tilde{x}^m_t(t), \varphi_i\rangle + \langle M\tilde{x}^m(t) + N(\tilde{x}^m(t)), \varphi_i\rangle =$$
$$= \langle \tilde{u}(t), \varphi_i\rangle + \langle Lx^m_0, \varphi_i\rangle\, \delta(t-0) + \langle Lx^m(T), \varphi_i\rangle\, \delta(t-T). \tag{12}$$

Перейдем к пределу в (12) при фиксированном j и получим

$$\langle L\tilde{x}_t(t), \varphi_j\rangle + \langle M\tilde{x}, \varphi_j\rangle + \langle \tilde{\mu}, \varphi_j\rangle = \langle \tilde{u}(t), \varphi_j\rangle + \langle Lx_0, \varphi_j\rangle\, \delta(t-0) - \langle \xi, \varphi_j\rangle\, \delta(t-T),$$

следовательно,

$$L\tilde{x}_t(t) + M\tilde{x} + \tilde{\mu} = \tilde{u}(t) + Lx_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \tag{13}$$

Сужая (12) на $(0,T)$, получим, что

$$L\dot{x} + Mx + \mu = u, \tag{14}$$

следовательно, $\dot{w} \in L_2(0,T;\mathfrak{H}_2) \cap L_{\frac{4}{3}}(0,T;\mathfrak{B}_2^*)$, поэтому $w(0) = w_0$ имеет место. В силу компактного вложения $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ последовательность $w_m \to w$ в пространстве $L_2(0,T;\mathcal{H}_2)$, тогда в силу единственности предела получим, что

$$\mu = w^3.$$

Единственность. Пусть $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ – два решения задачи (3), (4). Тогда для их разности $x = x_1 - x_2$ получим

$$[Lx, x] + 2\int_0^t [Mx + (N(x_1) - N(x_2)), x]d\tau = 0. \tag{15}$$

Левая часть равенства неотрицательна, значит, равенство (15) удовлетворяется лишь в случае $x \equiv 0$. □

2. Оптимальное управление в модели Фитц Хью – Нагумо. Рассмотрим задачу оптимального управления (5) для модели (6) – (8). Рассмотрим пространство управлений $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2) : u_1 \in L_2(0, T; \mathfrak{H}_1),\ u_2 \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{B}_2)\}$, выберем непустое замкнутое выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$. В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ при $\vartheta \in (0, 1)$ зададим функционал качества

$$J(x, u) = \vartheta \int_0^T \left(\|v - v_d\|^2_{\mathfrak{H}_1} + \|w - w_d\|^4_{\mathfrak{B}_2}\right) dt + (1 - \vartheta)\int_0^T \left(\|u_1\|^2_{\mathfrak{H}_1^*} + \|u_2\|^{\frac{4}{3}}_{\mathfrak{B}_2^*}\right) dt, \tag{16}$$

где $x_d = (v_d, w_d)$ – требуемое состояние системы, например, состояние, в котором находилась система до прохождения порога возбуждения.

Определение 2. *Пару $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем решением задачи оптимального управления (5) – (8), если*

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x,u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (6) – (8) в смысле определения 1.

Замечание 1. Так как множество допустимых управлений $\mathfrak{U}_{ad} \neq \emptyset$, то для любого $u \in \mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ в силу теоремы 1 существует единственное решение $x = x(u)$ задачи (6) – (8) в слабом обобщенном смысле. Следовательно, множество допустимых пар (x, u) не пусто.

Теорема 2. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \varkappa_1 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_2 \in \mathbb{R}_-$ и $n \leq 4$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует оптимальное управление решениями задачи (5) – (8).*

Доказательство. Поскольку множество допустимых пар (x, u) не пусто, то найдется последовательность $\{x_m, u_m\} \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} J(x_m, u_m) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x, u).$$

Поскольку функционал (16) обладает свойством коэрцитивности, то

$$\begin{aligned} &\|v_m\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H}_1)} \leq \text{const}, \quad \|w_m\|_{L_4(0,T;\mathfrak{B}_2)} \leq \text{const}, \\ &\|u_{1m}\|_{L_2(0,T;\mathfrak{H}_1^*)} \leq \text{const}, \quad \|u_{2m}\|_{L_{\frac{4}{3}}(0,T;\mathfrak{B}_2^*)} \leq \text{const} \end{aligned} \tag{17}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$. Из (17) (переходя, если надо, к подпоследовательности) извлечем слабо сходящиеся в соответствующих пространствах последовательности

$$v_m \rightharpoonup \hat{v},\ w_m \rightharpoonup \hat{w},\ u_{1m} \rightharpoonup \hat{u}_1,\ u_{2m} \rightharpoonup \hat{u}_2.$$

В силу теоремы Мазура и секвенциальной слабой замкнутости множества $\mathfrak{U}_{ad}$ точка $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Используя рассуждения теоремы 1, перейдем к пределу в уравнении состояния (4) и получим

$$[L\frac{d\hat{x}}{dt} + M\hat{x} + \mu, \zeta] = [\hat{u}, \zeta]. \tag{18}$$

Из полученных в теореме 1 априорных оценок, монотонности оператора N и компактного вложения $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ получим

$$\mu = N(\hat{x}).$$

Значит, переходя к пределу в уравнении состояния (4), получим

$$L\frac{d\hat{x}}{dt} + M\hat{x} + N(\hat{x}) = \hat{u}.$$

Следовательно, $\hat{x} = \hat{x}(\hat{u})$ и $\liminf J(u_m) \geq J(\hat{u})$. Значит, $\tilde{u}$ – есть оптимальное управление в задаче (5) – (8). □

Авторы выражает глубокую признательность проф. Г.А. Свиридюку за поддержку и научные дискуссии.

Литература

1. Fitz Hugh, R. Mathematical Models of Threshold Phenomena in the Nerve Membrane / R. Fitz Hugh // Bulletin of Mathematical Biology. – 1955. – V. 17, № 4. – P. 257–278.
2. Nagumo, J. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // Proceedings of the IRE. – 1962. – V. 50, № 10 – P. 2061–2070.
3. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.
4. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
5. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
6. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
7. Келлер, А.В. Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа / А.В. Келлер, М.А. Сагадеева // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Серия: Математика. Физика. – 2013. – Т. 32, № 19. – С. 57–66.
8. Свиридюк, Г.А. О разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1637–1639.

Поступила в редакцию 15 июня 2015 г.

Наталья Александровна Манакова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), manakovana@susu.ac.ru.

Ольга Витальевна Гаврилова, старший преподаватель, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), gavrilovaov@susu.ac.ru.

MSC 49J20 **10.14529/mmp150411**

Optimal Control for a Mathematical Model of Nerve Impulse Spreading

N.A. Manakova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, manakovana@susu.ac.ru***,***
O.V. Gavrilova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, gavrilovaov@susu.ac.ru

The article concerns the matter of existence of optimal control for the mathematical model set forward by R. Fitzhugh and J.M. Nagumo for modelling of nerve impulse spreading. The model belongs to the group of diffusion-reaction models simulating a wide range of processes such as chemical reactions with diffusion and nerve impulse spreading. In case, that there is an asymptotical stability of the studied model, and under an assumption that the rate of variation of one component is greatly higher than the other one, the said model could be reduced to a problem of optimal control of a Sobolev type semi-linear equation with Showalter – Sidorov initial condition. The article contents a demonstration of the only weak generalized solution for the model under discussion with Showalter – Sidorov initial condition and optimal control existence.

Ключевые слова: Sobolev type equations; optimal control; diffusion-reaction equations.

References

1. Fitz Hugh R. Mathematical Models of Threshold Phenomena in the Nerve Membrane. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1955, vol. 17, no. 4, pp. 257–278.
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, vol. 50, no. 10, pp. 2061–2070.
3. Bokareva T.A., Sviridyuk G.A. Whitney Folds of the Phase Spaces of Some Semilinear Equations of Sobolev Type. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 55, no. 3-4, pp. 237–242.
4. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear the Sobolev Type Equations]. Moscow, FIZMATLIT, 2007. 736 p. (in Russian)
5. Lions J.-L. *Quelques mérthodes de reśolution des problémes aux limites non linéaires.* Paris, Dunod, 1968.
6. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations with Relativity p-Sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1882–1890.
7. Keller A.V., Sagadeeva M.A. [The Numerical Solution of Optimal and Hard Control for Nonstationary System of Leontiev Type]. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics, Physics*, 2013, vol. 32, no. 19, pp. 57–66. (in Russian)
8. Sviridyuk G.A. [On the Solvability of Singular Systems of Ordinary Differential Equations]. *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1987, vol. 23, no. 9, pp. 1637–1639. (in Russian)

Received June 15, 2015