УДК 517.4+958 **DOI: 10.14529/mmp150413**

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА НАГРЕВА НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

А.Н. Наимов

В статье исследована математическая модель процесса нагрева неоднородной среды «ТЭН – песок – воздух». Данная модель применяется в инженерных задачах для расчета температурного режима и тепловых характеристик в процессе нагрева. Методология таких расчетов разработана в работах академиков А.Н. Тихонова и А.А. Самарского. Исследуемая математическая модель представляет собой смешанную задачу для уравнения теплопроводности на конечном отрезке. В рассматриваемой задаче, в отличие от классических, три неизвестных: в уравнении неизвестна одна функция от двух переменных, а в граничных условиях неизвестны две функции от одной переменной. Приводится решение смешанной задачи в виде формальных функциональных рядов. Эти ряды строятся на основе решения соответствующей краевой задачи Штурма – Лиувилля в форме Кнезера. Доказывается, что таким образом построенные функциональные ряды определяют единственное классическое решение смешанной задачи. Единственность решения доказывается методом энергетических неравенств.

Ключевые слова: математическая модель процесса нагрева неоднородной среды; решение смешанной задачи; метод энергетических неравенств.

Введение. Статья посвящена исследованию математической модели процесса нагрева неоднородной среды «ТЭН – песок – воздух». Данная модель применяется в инженерных задачах для расчета температурного режима и тепловых характеристик в процессе нагрева. Методология таких расчетов разработана в работах академиков А.Н. Тихонова и А.А. Самарского ([1]). Исследуемая математическая модель представляет собой смешанную задачу для уравнения теплопроводности на конечном отрезке:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right), \quad t>0, \quad r<x<R, \tag{1}$$

$$c_r\frac{du_r}{dt}(t) - k\frac{\partial u}{\partial x}(t,r) = Q, \quad t>0, \tag{2}$$

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}(t,r) = h_r(u_r(t)-u(t,r)), \quad t>0, \tag{3}$$

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}(t,R) = h_R(u(t,R)-u_R(t)), \quad t>0, \tag{4}$$

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}(t,R) = c_R\frac{du_R}{dt}(t) + \alpha_R u_R(t), \quad t>0, \tag{5}$$

$$u(0,x) = u_r(0) = u_R(0) = u_0, \quad r<x<R. \tag{6}$$

Здесь a, r, R, k, c_r, h_r, c_R, h_R, α_R, u_0, Q – заданные положительные числа, t, x – независимые переменные, $u(t,x)$, $u_r(t)$, $u_R(t)$ – неизвестные функции.

Смешанная задача (1) – (6) в качестве математической модели процесса нагрева неоднородной среды «ТЭН – песок – воздух»рассмотрена в работах [2, 3]. В этих работах, используя методологию работы [1], с помощью решения задачи (1) – (6) разработаны алгоритмы расчета температурного режима и тепловых характеристик наблюдаемого процесса нагрева неоднородной среды. При этом решение задачи (1) – (6) представляется формальными рядами

$$u(t,x)=\overline{u}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}D_nu_n(x)e^{-\lambda_nat},$$

$$u_r(t)=\overline{u}_r+\sum_{n=1}^{\infty}D_nu_{n,r}e^{-\lambda_nat},\qquad u_R(t)=\overline{u}_R+\sum_{n=1}^{\infty}D_nu_{n,R}e^{-\lambda_nat}. \tag{7}$$

Но вопрос о том, сходятся ли эти ряды и являются ли суммы этих рядов классическим решением задачи (1) – (6), в работах [2, 3] не рассматривается. Этому вопросу посвящена настоящая работа.

Определение 1. *Решением смешанной задачи (1) – (6) назовем тройку* $(u(t,x),u_r(t),u_R(t))$ *функций* $u(t,x)\in C^{1,2}((0,+\infty)\times(r,R))\cap C^{0,1}((0,+\infty)\times[r,R])$, $u_r(t),u_R(t)\in C^1(0,+\infty)$, *удовлетворяющих уравнению (1), краевым условиям (2) – (5) и начальным условиям (6) в следующем смысле:*

$$\int_r^R x(u(t,x)-u_0)^2dx\to 0,\quad u_r(t)\to u_0,\quad u_R(t)\to u_0\quad \textit{при}\quad t\to 0. \tag{8}$$

Решение задачи (1) – (6) будем искать в виде рядов (7). Подставляем (7) в (1) – (5) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем следующие краевые задачи для неизвестных $(\overline{u}(x),\overline{u}_r,\overline{u}_R)$ и $(u_n(x),u_{n,r},u_{n,R})$, $n=1,2,...$:

$$x\overline{u}''(x)+\overline{u}'(x)=0,\quad r<x<R, \tag{9}$$

$$-k\overline{u}'(r)=Q,\quad -k\overline{u}'(r)=h_r(\overline{u}_r-\overline{u}(r)),\quad -k\overline{u}'(R)=\alpha_R\overline{u}_R,\quad -k\overline{u}'(R)=h_R(\overline{u}(R)-\overline{u}_R),$$

$$\begin{gathered}xu_n''(x)+u_n'(x)+\lambda_nxu_n(x)=0,\quad r<x<R,\\ -ku_n'(r)=\lambda_nac_ru_{n,r},\quad -ku_n'(r)=h_r(u_{n,r}-u_n(r)),\\ -ku_n'(R)=(\alpha_R-\lambda_nac_R)u_{n,R},\quad -ku_n'(R)=h_R(u_n(R)-u_{n,R}).\end{gathered} \tag{10}$$

Краевая задача (9) решается непосредственно:

$$\overline{u}(x)=\frac{rQ}{R}\left(\frac{1}{\alpha_R}+\frac{1}{h_R}\right)+\frac{rQ}{k}ln\frac{R}{x},\quad r\le x\le R,\qquad \overline{u}_r=\overline{u}(r)+\frac{Q}{h_r},\quad \overline{u}_R=\frac{rQ}{R\alpha_R}. \tag{11}$$

Краевая задача (10), представляющая собой задачу Штурма – Лиувилля в форме Кнезера, явно не решается. В работах [4, 5], исследуя данную задачу, доказано существование счетного числа положительных значений $\lambda_1<\lambda_2<...$ таких, что: а) при каждом значении λ_n существует ненулевое решение $(u_n(x),u_{n,r},u_{n,R})$ краевой задачи (10); б) для λ_n при больших n верна асимптотика $\sqrt{\lambda_n}=(\pi(n+n_0))/(R-r)+o(1),n\to\infty$, где n_0 – фиксированное целое число, зависящее от данных задачи; в) ненулевые решения $(u_n(x),u_{n,r},u_{n,R})$, $n=1,2,...$ можно нормировать так, что они образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, состоящем из всех троек $F=(f(x),A,B)$, где $f(x)\in L_2(r,R)$ и A, B – вещественные числа, со скалярным произведением

$$<F,\widetilde{F}>=\int_r^R xf(x)\widetilde{f}(x)dx+\frac{rac_r}{k}A\widetilde{A}+\frac{Rac_R}{k}B\widetilde{B}.$$

Тройку $(u_0 - \overline{u}(x), u_0 - \overline{u}_r, u_0 - \overline{u}_R)$, как элемент гильбертового пространства H, можно разложить по ортонормированному базису $(u_n(x), u_{n,r}, u_{n,R})$, $n = 1, 2, ...$ Коэффициенты этого разложения возьмем в качестве чисел D_n, $n = 1, 2, ...$ в формулах (7):

$$D_n = \int\limits_r^R x(u_0 - \overline{u}(x))u_n(x)dx + \frac{rac_r}{k}(u_0 - \overline{u}_r)u_{n,r} + \frac{Rac_R}{k}(u_0 - \overline{u}_R)u_{n,R}, \quad n = 1, 2, ... \tag{12}$$

Имеют место следующие теоремы о существовании и единственности решения смешанной задачи (1) – (6).

Теорема 1. *Тройка функций $(u(t, x), u_r(t), u_R(t))$, которая определяется формулами (7), является решением смешанной задачи (1) – (6), если*

1) тройку $(\overline{u}(x), \overline{u}_r, \overline{u}_R)$ определить формулами (11);

2) тройки $(u_n(x), u_{n,r}, u_{n,R})$, $n = 1, 2, ...$ считать ненулевыми решениями краевой задачи (10), образующими ортонормированный базис в пространстве H;

3) числа D_n, $n = 1, 2, ...$ находить формулой (12).

Теорема 2. *Решение смешанной задачи (1) – (6) единственно.*

Единственность решения доказывается методом энергетических неравенств [6].

1. Существование решения смешанной задачи. В этом параграфе приведем доказательство теоремы 1 о существовании решения смешанной задачи (1) – (6).

Из того, что последовательность $(u_n(x), u_{n,r}, u_{n,R})$, $n = 1, 2, ...$ ортонормирована в H, следует, что числовые последовательности $u_{n,r}$, $u_{n,R}$, D_n, $n = 1, 2, ...$ ограничены:

$$\frac{rac_r}{k}u_{n,r}^2 \le 1, \quad \frac{Rac_R}{k}u_{n,R}^2 \le 1,$$

$$|D_n| = | < (u_0 - \overline{u}, u_0 - \overline{u}_r, u_0 - \overline{u}_R), (u_n, u_{n,r}, u_{n,R}) > | \le ||(u_0 - \overline{u}, u_0 - \overline{u}_r, u_0 - \overline{u}_R)||.$$

Отсюда вытекает, что функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n u_{n,r}(-\lambda_n a)^m e^{-\lambda_n at}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_{n,R}(-\lambda_n a)^m e^{-\lambda_n at}$$

при любом целом $m = 0, 1, 2, ...$ абсолютно и равномерно сходятся на любом промежутке $[t_0, +\infty)$, где $t_0 > 0$; здесь учитывается положительность λ_n, $n = 1, 2, ...$ и асимптотика λ_n при $n \to \infty$. Следовательно, функции $u_r(t)$, $u_R(t)$ бесконечно дифференцируемы на промежутке $(0, +\infty)$ и $u_r(t) \to \overline{u}_r$, $u_R(t) \to \overline{u}_R$ при $t \to +\infty$.

Покажем, что на любом множестве $[t_0, +\infty) \times [r, R]$, где $t_0 > 0$, абсолютно и равномерно сходятся ряд функции $u(t, x)$ и его производные любого порядка по t и x. Для этого достаточно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Последовательность функций $\lambda_n^{-1-m/2}u_n^{(m)}(x)$, $n = 1, 2, ...$ при любом целом $m = 0, 1, 2, ...$ равномерно ограничена на отрезке $[r, R]$.*

Доказательство. Из краевых условий краевой задачи (10), в силу ограниченности последовательностей $u_{n,r}$, $u_{n,R}$, $n = 1, 2, ...$ следует, что числовые последовательности $\lambda_n^{-1}u_n(r)$, $\lambda_n^{-1}u'_n(r)$, $n = 1, 2, ...$ ограничены.

Дифференциальное уравнение

$$u''_n(x) + \frac{1}{x}u'_n(x) + \lambda_n u_n(x) = 0, \quad r < x < R,$$

перемножая на $2u_n'(x)$ и интегрируя от r до x, имеем:

$$(u_n'(x))^2 + \lambda_n (u_n(x))^2 + 2\int_r^x s^{-1}(u_n'(s))^2 ds = (u_n'(r))^2 + \lambda_n (u_n(r))^2.$$

Отсюда вытекает, что последовательности функций $\lambda_n^{-1}u_n(x)$, $\lambda_n^{-3/2}u_n'(x)$, $n = 1, 2, ...$ равномерно ограничены на отрезке $[r, R]$. Из самого дифференциального уравнения, которому удовлетворяет $u_n(x)$, следует равномерная ограниченность функций $\lambda_n^{-2}u_n''(x)$, $n = 1, 2, ...$ Далее, индукцией по m, легко проверить, что при любом целом $m = 3, 4, ...$ последовательность функций $\lambda_n^{-1-m/2}u_n^{(m)}(x)$, $n = 1, 2, ...$ равномерно ограничена на отрезке $[r, R]$. □

Из доказанной леммы следует, что функция $u(t, x)$ бесконечно дифференцируема на множестве $(0, +\infty) \times [r, R]$, является решением уравнения (1), и вместе с функциями $u_r(t)$, $u_R(t)$ удовлетворяет краевым условиям (2) – (5).

Теперь, для завершения доказательства теоремы остается проверить, что при $t \to 0$ имеют место пределы (8). Воспользуемся тем, что в силу выбора чисел D_n, $n = 1, 2, ...$ последовательность троек

$$\left(\sum_{n=1}^N D_n u_n(x), \sum_{n=1}^N D_n u_{n,r}, \sum_{n=1}^N D_n u_{n,R}\right), \quad N = 1, 2, ...$$

сходится к тройке $(u_0 - \overline{u}(x), u_0 - \overline{u}_r, u_0 - \overline{u}_R)$ по норме пространства H:

$$\left\|\left(u_0 - \overline{u} - \sum_{n=1}^N D_n u_n, u_0 - \overline{u}_r - \sum_{n=1}^N D_n u_{n,r}, u_0 - \overline{u}_R - \sum_{n=1}^N D_n u_{n,R}\right)\right\|^2 =$$

$$= \left\|(u_0 - \overline{u}, u_0 - \overline{u}_r, u_0 - \overline{u}_R) - \sum_{n=1}^N D_n(u_n, u_{n,r}, u_{n,R})\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} D_n^2 \to 0, \quad N \to \infty.$$

Учитывая это, для любого $t > 0$ имеем:

$$\left\|\left(u_0 - \overline{u} - \sum_{n=1}^N D_n u_n e^{-\lambda_n a t}, \quad u_0 - \overline{u}_r - \sum_{n=1}^N D_n u_{n,r} e^{-\lambda_n a t}, \quad u_0 - \overline{u}_R - \sum_{n=1}^N D_n u_{n,R} e^{-\lambda_n a t}\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(u_0 - \overline{u} - \sum_{n=1}^N D_n u_n, u_0 - \overline{u}_r - \sum_{n=1}^N D_n u_{n,r}, u_0 - \overline{u}_R - \sum_{n=1}^N D_n u_{n,R}\right)\right\| +$$

$$+ \left\|\left(\sum_{n=1}^N D_n u_n (1 - e^{-\lambda_n a t}), \sum_{n=1}^N D_n u_{n,r}(1 - e^{-\lambda_n a t}), \sum_{n=1}^N D_n u_{n,R}(1 - e^{-\lambda_n a t})\right)\right\| =$$

$$= \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} D_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^N D_n^2 (1 - e^{-\lambda_n a t})^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} D_n^2\right)^{1/2} + (1 - e^{-\lambda_1 a t})\left(\sum_{n=1}^N D_n^2\right)^{1/2}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим:

$$||(u_0 - u(t, \cdot), u_0 - u_r(t), u_0 - u_R(t))|| \le (1 - e^{-\lambda_1 a t})\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что при $t \to 0$ имеют место пределы (8). Теорема 1 доказана.

2. Единственность решения смешанной задачи. Докажем теорему 2 о единственности решения смешанной задачи (1) – (6) методом энергетических неравенств [6]. Пусть $Q = 0$ и $u_0 = 0$. Покажем, что в этом случае решение $(u(t,x), u_r(t), u_R(t))$ задачи (1) – (6) тождественно равно нулю. Так как $u_0 = 0$, поэтому согласно (8) имеем:

$$\int\limits_r^R xu^2(t,x)dx \to 0, \quad u_r(t) \to 0, \quad u_R(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{13}$$

Проверим, что при любых $s_2 > s_1 > 0$ имеет место энергетическое неравенство

$$\begin{gathered}\int\limits_r^R xu^2(s_2,x)dx + \frac{rac_r}{k}u_r^2(s_2) + \frac{Rac_R}{k}u_R^2(s_2) \le \\ \le \int\limits_r^R xu^2(s_1,x)dx + \frac{rac_r}{k}u_r^2(s_1) + \frac{Rac_R}{k}u_R^2(s_1).\end{gathered} \tag{14}$$

Тогда из (13) и (14) следует, что функции $u(t,x)$, $u_r(t)$, $u_R(t)$ тождественно равны нулю. Этим самым теорема 2 будет доказана.

Обе стороны уравнения (1) перемножим на $xu(t,x)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $[s_1, s_2] \times [r+\varepsilon, R-\varepsilon]$:

$$\int\limits_{s_1}^{s_2}\int\limits_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} x\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)u(t,x)dxdt = a\int\limits_{s_1}^{s_2}\int\limits_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)u(t,x)dxdt,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} xu^2(t,x)dx\right)dt = a\int\limits_{s_1}^{s_2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)u(t,x)\Big|_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} - \int\limits_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} x\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 dx\right)dt,$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} xu^2(s_2,x)dx - \int\limits_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} xu^2(s_1,x)dx\right) =$$

$$= a\int\limits_{s_1}^{s_2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)u(t,x)\Big|_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} - \int\limits_{r+\varepsilon}^{R-\varepsilon} x\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 dx\right)dt.$$

Устремляя ε к нулю, получим:

$$\begin{gathered}\int\limits_r^R xu^2(s_2,x)dx - \int\limits_r^R xu^2(s_1,x)dx = 2Ra\int\limits_{s_1}^{s_2} u(t,R)\frac{\partial u}{\partial x}(t,R)dt - \\ -2ra\int\limits_{s_1}^{s_2} u(t,r)\frac{\partial u}{\partial x}(t,r)dt - 2a\int\limits_{s_1}^{s_2}\int\limits_r^R x\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 dxdt.\end{gathered} \tag{15}$$

Из краевых условий (3) и (2), учитывая равенство $Q = 0$, выводим:

$$u(t,r) = u_r(t) + \frac{k}{h_r}\frac{\partial u}{\partial x}(t,r) = u_r(t) + \frac{c_r}{h_r}\frac{du_r}{dt}(t),\ u(t,r)\frac{\partial u}{\partial x}(t,r) = \left(u_r(t) + \frac{c_r}{h_r}\frac{du_r}{dt}(t)\right)\frac{c_r}{k}\frac{du_r}{dt}(t),$$

$$u(t,r)\frac{\partial u}{\partial x}(t,r)=\frac{c_r^2}{kh_r}\left(\frac{du_r}{dt}(t)\right)^2+\frac{c_r}{2k}\frac{d}{dt}\left(u_r^2(t)\right),$$

$$-2ra\int\limits_{s_1}^{s_2}u(t,r)\frac{\partial u}{\partial x}(t,r)dt=-\left.\frac{rac_r}{k}u_r^2(t)\right|_{s_1}^{s_2}-2ra\frac{c_r^2}{kh_r}\int\limits_{s_1}^{s_2}\left(\frac{du_r}{dt}(t)\right)^2dt\le-\left.\frac{rac_r}{k}u_r^2(t)\right|_{s_1}^{s_2},$$

$$-2ra\int\limits_{s_1}^{s_2}u(t,r)\frac{\partial u}{\partial x}(t,r)dt\le-\left.\frac{rac_r}{k}u_r^2(t)\right|_{s_1}^{s_2}. \tag{16}$$

Аналогичным образом, из краевых условий (4) и (5) выводим:

$$2Ra\int\limits_{s_1}^{s_2}u(t,R)\frac{\partial u}{\partial x}(t,R)dt=-\left.\frac{Rac_R}{k}u_R^2(t)\right|_{s_1}^{s_2}-$$

$$-2Ra\int\limits_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\alpha_R}{k}u_R^2(t)+\frac{1}{kh_R}\left(c_R\frac{du_R}{dt}(t)+\alpha_Ru_R(t)\right)^2\right)dt\le-\left.\frac{Rac_R}{k}u_R^2(t)\right|_{s_1}^{s_2},$$

$$2Ra\int\limits_{s_1}^{s_2}u(t,R)\frac{\partial u}{\partial x}(t,R)dt\le-\left.\frac{Rac_R}{k}u_R^2(t)\right|_{s_1}^{s_2}. \tag{17}$$

Таким образом, из (15), (16) и (17) следует, что

$$\int\limits_r^R xu^2(s_2,x)dx-\int\limits_r^R xu^2(s_1,x)dx\le-\left.\frac{rac_r}{k}u_r^2(t)\right|_{s_1}^{s_2}-\left.\frac{Rac_R}{k}u_R^2(t)\right|_{s_1}^{s_2}-2a\int\limits_{s_1}^{s_2}\int\limits_r^R x\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2dxdt.$$

Отсюда вытекает неравенство (14). Теорема 2 доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 15-01-04713а

Литература

1. Самарский, А.А. Об одной задаче распространения тепла / А.А. Самарский // Вестник МГУ. – 1947. – № 3. – С. 85–102.
2. Телков, М.Г. Алгоритм расчета регулярного температурного режима в процессе нагрева неоднородной среды / М.Г. Телков, А.Н. Наимов // Материалы 6-й международной научно-технической конференции ИНФОС, Вологда, ВоГТУ. – Вологда, 2011. – С. 193–197.
3. Исследование температурного режима в процессе нагрева неоднородной среды «ТЭН – песок – воздух» / М.Г. Телков, П.О. Тимошенко, И.А. Суханов, А.Н. Наимов, А.А. Синицын // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 11-12. – С. 458–462.
4. Телков, М.Г. Существование и полнота собственных векторов задачи Штурма – Лиувилля в форме Кнезера / М.Г. Телков, А.Н. Наимов // Вузовская наука – региону: материалы всерос. науч.-техн. конф. – Вологда, 2012. – Т. 1. – С. 177–181.
5. Наимов, А.Н. О собственных значениях одной краевой задачи Штурма – Лиувилля / А.Н. Наимов, А.А. Синицын // Вузовская наука – региону: материалы всерос. науч.-техн. конф. – Вологда, 2014. – Т. 1. – С. 152–158.
6. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными / О.А. Олейник. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2005. – 260 с.

Наимов Алижон Набиджанович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Информационные системы и технологии», Вологодский государственный университет (г. Вологда, Российская Федерация), nan67@rambler.ru.

Поступила в редакцию 3 апреля 2015 г.

MSC 39A14, 39A60 **DOI: 10.14529/mmp150413**

Research of Mathematical Model of Inhomogeneous Media the Heating Process

A.N. Naimov, Vologda State University, Vologda, Russian Federation, nan67@rambler.ru

In the paper mathematical model of inhomogeneous medium "TEN – sand – air" heating is investigated. This model is used in engineering problems to calculate the temperature and thermal characteristics during heating. The methodology of these calculations was developed in works of academician A.N. Tikhonov and A.A. Samarskiy. The considered mathematical model is an initial-boundary value problem for heat equation on a finite interval. Our problem, in contrast to the classical problems, includes three unknowns: one unknown function of two variables in the equation and two unknown functions of a single variable in the boundary conditions. The solution of initial-boundary value problem is found in the form of series of functions. These series are constructed by solving of the corresponding boundary value Sturm – Liouville problem in the Kneser's form. It is proved that the series of functions constructed in this way determines a unique classical solution of the initial-boundary value problem. Uniqueness of solution is proved by energy inequalities method.

Keywords: the mathematical model of heat inhomogeneous medium; solution of initial-boundary value problem; method of energy inequalities.

References

1. Samarskiy A.A. [On a Problem of Heat Propagation]. *Vestnik MGU* [Bulletin of the MSU], 1947, no. 3, pp. 85–102. (in Russian)
2. Telkov M.G., Naimov A.N. [The Algorithm for Calculating the Regular Temperature Mode in During Heating of an Inhomogeneous Medium]. *Materialy 6-oy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii INFOS* [Proceedings of the 6th International Scientific and Technical Conference INFOS], Vologda, 2011, pp. 193–197. (in Russian)
3. Telkov M.G., Timoshenko P.O., Sukhanov I.A., Naimov A.N., Sinitsyn A.A. [Investigation of the Temperature Mode in During the Heating of an Inhomogeneous Medium "TEN-sand-to-air"]. *Fundamentalnye issledovaniya* [Fundamental Researches], 2012, no. 11-12, pp. 458–462. (in Russian)
4. Telkov M.G., Naimov A.N. [The Existence and Completeness of Eigenvectors of the Problem Sturm – Liouville in the Kneser's Form]. *Materialy vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Vuzovskaya nauka - regionu"* [All-Russian Scientific and Technical Conference "University Science – the Region"], Vologda, 2012, vol. 1, pp. 177–181. (in Russian)
5. Naimov A.N., Sinitsyn A.A. [On the Eigenvalues of a Boundary Value Problem Sturm – Liouville]. *Materialy vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Vuzovskaya nauka – regionu"* [All-Russian Scientific and Technical Conference "University Science – the Region"], Vologda, 2014, vol. 1, pp. 152–158. (in Russian)
6. Oleynik O.A. *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations], Moscow, Binom, 2005. 260 p.

Received April 3, 2015