УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp150414**

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан

Уравнения соболевского типа в банаховых пространствах изучены довольно полно. Квазисоболевы пространства – это квазинормируемые полные пространства последовательностей. Уравнения соболевского типа в таких пространствах начали изучаться совсем недавно. В данной статье рассматривается вопрос существования ограниченных на всей оси решений для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Кроме введения и списка литературы, статья содержит две части. В первой содержатся предварительные сведения о свойствах операторов в квазибанаховых пространствах, а также об относительно ограниченных операторах. Во второй части приведен основной результат статьи о существовании ограниченных решений для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной в квазисоболевых пространствах. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия авторов.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; пространства последовательностей; квазиоператор Лапласа; функция Грина; аналог уравнения Беренблатта – Жетова – Кочиной.

Введение. Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. В квазисоболевых пространствах последовательностей ℓ_q^r [1] ($r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$) рассмотрим аналог модели Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Lambda)\dot{u}(t) = \alpha\Lambda u(t) + g(t), \tag{1}$$

где параметры $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, вектор-функция $g : \mathbb{R} \to \ell_q^r$, оператор $\Lambda : \ell_q^{r+2} \to \ell_q^r$ – квазиоператор Лапласа [2]. В силу того, что оператор в правой части уравнения (1) может зануляться, то оно относится к уравнениям соболевского типа [3]. Уравнения соболевского типа в квазибанаховых пространствах начали изучаться совсем недавно [4]. Интерес к таким уравненям в этих пространствах продиктован не столько практическими приложениями, сколько желанием пополнить теорию, распространив ее результаты в эти пространства.

Вопросы разрешимости уравнения (1), а также задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

для него в квазисоболевых пространствах рассмотрены, например, в работах [4, 5]. Экспоненциальные дихотомии для уравнения (1) рассмотрены в работе [6]. Целью данной статьи является изучение ограниченных решений модели (1) и задачи Коши (2) для него. При этом будем ориентироваться на аналогичные результаты, полученные при рассмотрении данных вопросов в банаховых пространствах [7].

1. Относительно ограниченные операторы в квазисоболевых пространствах. *Квазибанахово пространство* – это полное линейное пространство, наделенное квазинормой. Пусть монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что

$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = +\infty$, а $q \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим

$$\ell_q^r = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{r}{2}}|u_k|\right)^q < +\infty \right\}.$$

Линейное пространство ℓ_q^r при всех $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой элемента $u = \{u_k\} \in \ell_q^r$

$$_q^r\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{r}{2}}|u_k|\right)^q \right)^{1/q}$$

является квазибанаховым пространством (при $q \in [1, +\infty)$ — банаховым). В [1] пространства ℓ_q^m предложено называть *квазисоболевыми*. Кроме того, эти пространства являются метризуемыми [4]. Причем, имеют силу плотные и непрерывные вложения $\ell_q^l \hookrightarrow \ell_q^r$ при $r \le l$.

Пусть пространства $(\mathfrak{U};\ {}_\mathfrak{U}\|\cdot\|)$ и $(\mathfrak{F};\ {}_\mathfrak{F}\|\cdot\|)$ являются квазисоболевыми, линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, определенный на $\mathrm{dom}L = \mathfrak{U}$, назовем *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L\left(\lim\limits_{k\to\infty} u_k\right)$ для всех последовательностей $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, сходящихся в пространстве $\mathfrak{U}$. Отметим, что, как и вслучае банаховых пространств, линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные). Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ линейное пространство непрерывных операторов (линеал над полем $\mathbb{R}$). Оно будет являться квазибанаховым пространством с квазинормой

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{_\mathfrak{U}\|u\|=1} {}_\mathfrak{F}\|Lu\|.$$

Теперь, пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. По аналогии с [3, п. 2.1], рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Аналогично банаховому случаю (см. замечание 2.1.2 [3]), множество $\rho^L(M)$ открыто, поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M замкнут. Кроме того, если $\rho^L(M) \ne \oslash$, то L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M аналитична в $\rho^L(M)$ [3, теорема 2.1.1]. Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если $\exists a \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \ \Rightarrow\ (\mu \in \rho^L(M))$.

Теперь, пусть M (L,σ)-ограничен. Тогда, выбрав контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = h > a\}$, построим следующие операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^L(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L_\mu^L(M)d\mu,$$

где интегралы понимаются в смысле Римана и существуют по теореме 2 [8] в силу аналитичности правой $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и левой $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L-резольвент оператора M. Также в силу аналитичности $R_\mu^L(M)$ и $L_\mu^L(M)$ операторы P и Q не зависят от радиуса h контура γ. Рассуждая аналогично доказательству [3, лемма 4.1.1], нетрудно показать, что операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ $(\equiv \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}))$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проекторы. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}Q$; и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. [4] *Пусть операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, *причем оператор* M (L, σ)-*ограничен. Тогда*

(i) *операторы* $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ *и* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Положим $H = M_0^{-1} L_0$, $S = L_1^{-1} M_1$. Очевидно, операторы $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Определение 1. Оператор M назовем

(i) $(L, 0)$-*ограниченным*, если $H \equiv \mathbb{O}$;

(ii) (L, p)-*ограниченным*, если $H^k \neq \mathbb{O}$ при $k = \overline{1, p}$, и $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;

(iii) (L, ∞)-*ограниченным*, если $H^k \neq \mathbb{O}$ при $k \in \mathbb{N}$.

2. Ограниченные решения модели Баренблатта – Желтова – Кочиной. Рассмотрим уравнение (1) как конкретную интерпретацию уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t),$$

рассматриваемого в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной является одной из наиболее известных неклассических моделей математической физики [9]. Будем рассматривать уравнение (1) в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$ при $r \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{R}_+$. Положим операторы $L = \lambda - \Lambda$ и $M = \alpha\Lambda$, которые принадлежат классу $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ по построению.

Лемма 1. [4] *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$, *тогда оператор* M *является* $(L, 0)$-*ограниченым.*

В силу результатов [4, 5] относительный L-спектр оператора M имеет вид $\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \dfrac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}, \ \ \lambda_k \neq \lambda \right\}$, разрешающая группа операторов для любого $u \in \mathfrak{U}$

$$U^t u = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle u, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \\ \sum\limits_{k \neq l} e^{\mu_k t} \langle u, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_l = \lambda \text{ для некоторого } l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а пространство $\mathfrak{U}^1$ уравнения (1) имеет вид

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \ell_q^{r+2}, & \text{если } \ \lambda_k \neq \lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in \ell_q^{r+2} : u_k = 0, \ \lambda_k = \lambda\}. \end{cases}$$

Так как $\alpha \neq 0$, то относительный L-спектр оператора M не пересекается с мнимой осью, то в силу замкнутости относительного спектра [4] существуют конечные контуры $\gamma_+ \subset \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu > 0\}$ и $\gamma_- \subset \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu < 0\}$, ограничивающие $\sigma_+ = \{\mu_k \in \sigma^L(M) : \mu_k > 0\}$ и $\sigma_- = \{\mu_k \in \sigma^L(M) : \mu_k < 0\}$ соответственно. В силу чего мы можем определить функцию Грина.

Определение 2. Оператор-функцию

$$G^t = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma_+} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu = -\sum_{k:\ \mu_k>0} e^{\mu_k t}e_k, & t<0; \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma_-} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu = \sum_{k:\ \mu_k<0} e^{\mu_k t}e_k, & t>0, \end{cases}$$

назовем *функцией Грина* уравнения (1).

Используя вид функции Грина G^t, а также относительно спектральную теорему [10], получим следующие результаты.

Лемма 2. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен и L-спектр оператора M не пересекается с мнимой осью. Тогда*

(i) $G^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^1$, *и выполнена оценка* ${}^{r+2}_{\ \ q}\|G^t u\| \le C(u)e^{\nu|t|}$;

(ii) *при* $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *функция Грина* G^t *непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению* $L\frac{dG^t}{dt} = MG^t$, *кроме того,* $\dfrac{dG^t}{dt} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^1$ *ограничена;*

(iii) $G^{0+} - G^{0-} = P$.

Доказательство. (i) Действие оператор-функции G^t из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}^1$ следует из вида функции G^t. Рассмотрим оценку. В силу замкнутости $\sigma^L(M)$, так как L-спектр не пересекается с мнимой осью, существуют положительные константы $\nu_- = \max\{\mu_k \in \sigma^L(M) : \mu_k < 0\}$, $\nu_+ = \min\{\mu_k \in \sigma^L(M) : \mu_k > 0\}$. При отрицательных t в силу метризуемости пространств ℓ^r_q получим

$${}^{r+2}_{\ \ q}\|G^t u\|^\rho = {}^{r+2}_{\ \ q}\left\| -\sum_{k:\ \mu_k>0} e^{\mu_k t}\langle u, e_k\rangle e_k \right\|^\rho = \left(\sum_{k:\ \mu_k>0} \left(e^{\mu_k t}\lambda_k^{\frac{r+2}{2}}|u_k| \right)^q \right)^{\frac{\rho}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k:\ \mu_k>0} \left(e^{\nu_+ t}\lambda_k^{\frac{r+2}{2}}|u_k| \right)^q \right)^{\frac{\rho}{q}} \le e^{\rho\nu_+ t} \left(\sum_{k:\ \mu_k>0} \left(\lambda_k^{\frac{r+2}{2}}|u_k| \right)^q \right)^{\frac{\rho}{q}} \le C(u)e^{-\rho\nu_+|t|}.$$

Аналогично, при $t>0$ получим ${}^{r+2}_{\ \ q}\|G^t u\|^\rho \le C(u)e^{\rho\nu_- t}$. Возьмем $\nu = \min\{-\nu_-, \nu_+\}$ и получим нужную оценку.

(ii) В силу того, что ряды, определяющие функцию Грина, сходятся равномерно и справедливы равенства

$$\frac{dG^t}{dt} = -\sum_{k:\ \mu_k>0} \mu_k e^{\mu_k t}\frac{dG^t}{dt} = \sum_{k:\ \mu_k<0} \mu_k e^{\mu_k t}e_k, \quad t>0,$$

следует непрерывная дифференцируемость G^t по параметру. Кроме того, справедливо равенство

$$L\frac{dG^t}{dt} - MG^t = \mp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm} (\mu L - M)R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu = 0,$$

где $\gamma_\pm$ ограничивает соответствующую часть относительного спектра $\sigma^L(M)$.

Ограниченность $\dfrac{dG^t}{dt}$ проверяется аналогично (i).

(iii) $\quad G^{0+} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_-} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu = \sum\limits_{k:\ \mu_k<0} e_k = Q_-.$

Аналогично, $G^{0-} = -Q_+$, а, следовательно, $G^{0+} - G^{0-} = Q_- + Q_+ = Q$. □

Также в силу результатов [4, 5] оператор для любых $v \in \mathfrak{F}$

$$L_1^{-1} v = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} \langle v, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \\ \sum\limits_{k\neq l} (\lambda - \lambda_k)^{-1} \langle v, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_l = -\lambda \text{ для некоторого } l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Функцию $f : J \to \mathfrak{F}$, где $J \subset \mathbb{R}$, будем называть ограниченной, если $\sup\limits_{t\in J}{}_{\mathfrak{F}} \|f(t)\| < \infty$. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ – проектор. Обозначим через $C^{k,l}(J, \mathfrak{F}; Q)$ класс функций f, таких, что $f^0 = (I - Q)f \in C^k(J, \mathfrak{F})$, $f^1 = Qf \in C^l(J, \mathfrak{F})$. Символом $BC^k(J, \mathfrak{F})$ обозначим множество функций $f \in C^k(J, \mathfrak{F})$, для которых $f, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)} : J \to \mathfrak{F}$ – ограниченные функции. И наконец, через $BC^{k,l}(J, \mathfrak{F}; Q)$ обозначим множество таких функций f, что $(I - Q)f \in BC^k(J, \mathfrak{F})$, $Qf \in BC^l(J, \mathfrak{F})$.

В силу леммы 2 справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть оператор M (L, p)-ограничен и L-спектр оператора M не пересекается с мнимой осью. Тогда для любой функции $g \in BC^{p+1,1}(\mathbb{R}, \mathfrak{F}; Q)$ уравнение (1) имеет единственное решение $u \in BC^1(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$. Это решение имеет вид*

$$u(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{t-s} L_1^{-1} Q g(s) ds - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} g^{0(q)}(t). \tag{3}$$

Если к тому же $u_0 \in \mathfrak{U}$ имеет вид $u_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{-s} L_1^{-1} Q g(s) ds - \sum\limits_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} g^{0(q)}(0)$, то функция (3) является единственным ограниченным на $\mathbb{R}$ решением задачи (1), (2).

Литература

1. Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства l_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.
2. Аль-Делфи, Дж.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2013. – № 2 (13). – С. 13–16.
3. Свиридюк. Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003. – 179 с.
4. Келлер, А.В. Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

5. Hasan, F.L. Solvability of Intial Problems for One Class of Dynamical Equations in Quasi-Sobolev Spaces / F.L. Hasan // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 3. – P. 34–42.
6. Сагадеева, М.А. Существование инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 50–57.
7. Федоров, В.Е. Об ограниченных на прямой решениях линейных уравнений соболевского типа с относителшьно секториальными операторами / В.Е. Федоров, М.А. Сагадеева // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 4. – С. 81–84.
8. Keller, A.V. On Integration in Quasi-Banach Spaces of Sequences / A.V. Keller, A.A. Zamyshlyaeva, M.A. Sagadeeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 1. – P. 52–56.
9. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299), вып. 14. – С. 7–18.
10. Хасан, Ф.Л. Относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах / Ф.Л. Хасан // Воронежская зимняя математическая школа: тр. конф. – Воронеж: изд-во ВГУ, 2014. – С. 393–396.

Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sam79@74.ru

Хасан Фаза Лафта Хасан, аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), fahas90@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 29 августа 2015 г.

MSC 47D06, 47B37, 46B45 **DOI: 10.14529/mmp150414**

Bounded Solutions of Barenblatt – Zheltov – Kochina Model in Quasi-Sobolev Spaces

M.A. Sagadeeva, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, sam79@74.ru***,***
F.L. Hasan, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, fahas90@yahoo.co.uk

The Sobolev type equations are studied quite complete in Banach spaces. Quasi-Sobolev spaces are quasi normalized complete spaces of sequences. Recently the Sobolev type

equations began to be studied in these spaces. The paper is devoted to the study of boundary on axis solutions for the Barenblatt–Zheltov–Kochina model.
Apart the introdsction and bibliograthy the paper contain two parts. In the first one gives preliminary information about the properties of operators in quasi Banach spaces, as well as about the relatively bounded operator. The second part gives main result of the paper about boundary on axis solutions for the Barenblatt–Zheltov–Kochina model in quasi-Sobolev spaces. Note that reference list reflects the tastes of the author and can be supplemented.

Keywords: Sobolev type equation; spaces of sequances; Laplase quasi-operator; Grin function; analogue of Barenblatt – Zheltov – Kochina model.

References

1. Al-Delfi J.K. Quasi-Sobolev Spaces ℓ_p^m. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 107–109. (in Russian)
2. Al-Delfi J.K. Laplas Quasi-Operator in Quasi-Sobolev Spaces. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiz.-mat. nauki* [Bulletin of Samara State Technical University. Series Physics Mathematics Sciences], 2013, no. 2 (13), pp. 13–16. (in Russian)
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Lineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear Sobolev Type Equations]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University, 2003. 179 p. (in Russian)
4. Keller A.V., Al-Delfi J.K. Holomorphic Degenerate Groups of Operators in Quasi-Banach Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 20–27. (in Russian)
5. Hasan F.L. Solvability of Intial Problems for One Class of Dynamical Equations in Quasi-Sobolev Spaces. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, vol. 2, no. 3, pp. 34–42. DOI: 10.14529/jcem150304
6. Sagadeeva M.A., Hasan F.L. Existence of Invariant Spaces and Exponential Dichotomies of Solutions for Dynamical Sobolev Type Equations in Quasi-Banach Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 50–57. DOI: 10.14629/mmph150406 (in Russian)
7. Fedorov V.E., Sagadeeva M.A. Solutions, Bounded on the Line, of Sobolev-Type Linear Equations with Relatively Sectorial Operators. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2005, vol. 49, no. 4, pp. 77–80.
8. Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Sagadeeva M.A. On Integration in Quasi-Banach Spaces of Sequences. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2015, vol. 2, no. 1, pp. 52–56. DOI: 10.14529/jcem150106
9. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 40 (299), issue 14, pp. 7–18. (in Russian)
10. Hasan F.L. Relatively Spectral Theorem in Quasi-Banach Spaces. *Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola* [Voronezh Winter Matematical School]. Voronezh, 2014, pp. 393–396. (in Russian)

Received August 29, 2015